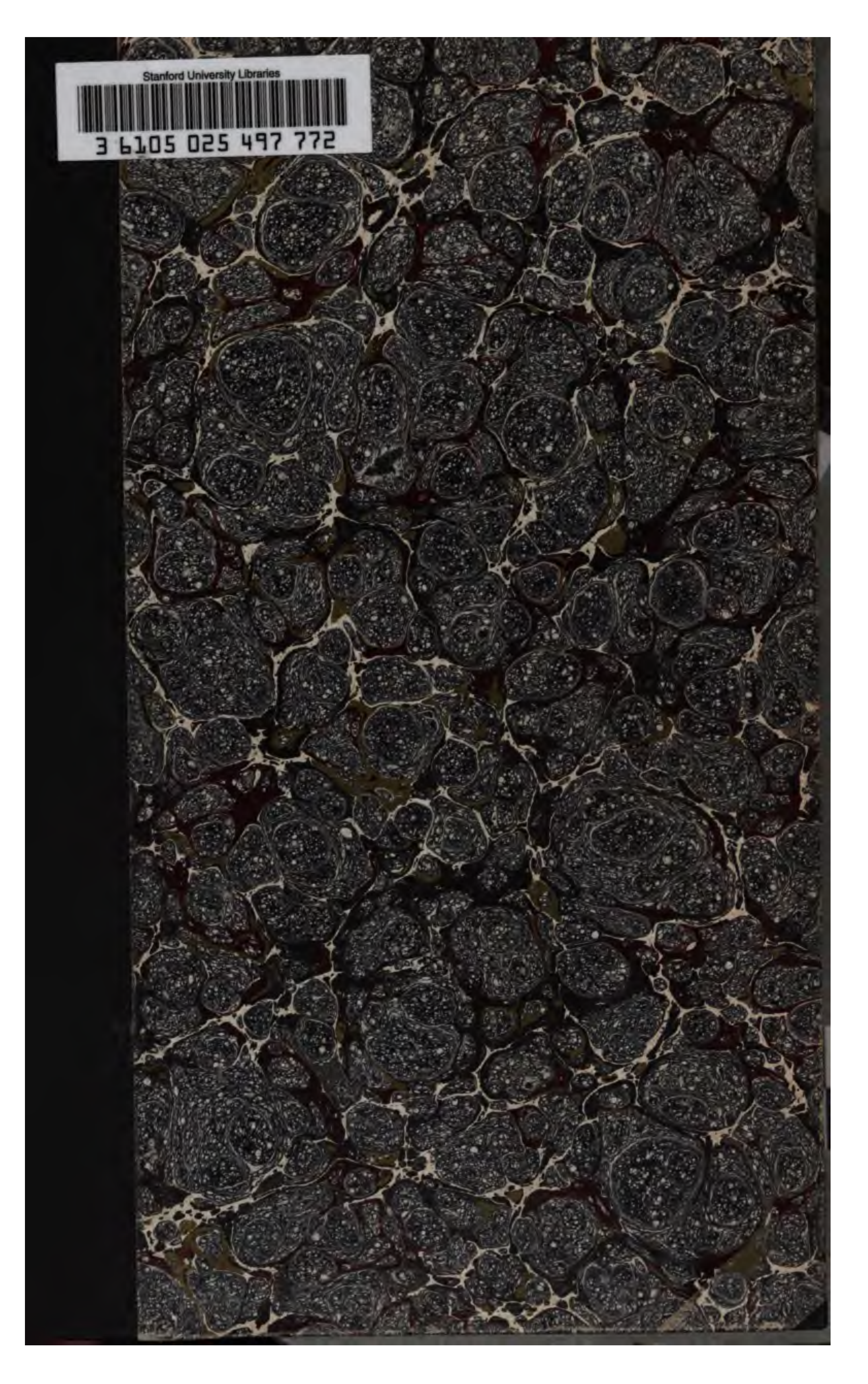

Stanford University Libraries
3 6105 025 497 772

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Sechsundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1874.

Inhalts-Verzeichniss
des sechsundfunfzigsten Teils.

Geometrie des Raumes.

Im 3. Heft. N. XXIX. bitten wir folgende Druckfehler zu berichtigen:

Seite		Zeile					
Seite	313.	Zeile	4.	statt	herausgegeben	lies	herausgegeben
—	315.	—	6.	—	pro	—	patri
—	—	—	27.	—	clauditus	—	clauditur
—	316.	—	2.	—	vires	—	viros
—	—	—	8.	—	potest, nostri	—	potest. Nostri
—	317.	—	7.	—	estiam	—	etiam
—	—	—	19.	—	Esse	—	Ecce
—	—	—	28.	—	Gaudavum	—	Gandavum
—	—	—	29.	hinter	solvere	tilge	das Komma
—	—	—	38.	statt	Goelenius	lies	Goclenius
—	318.	—	29.	—	quantum	—	quantum-
—	319.	—	19.	—	Helione	—	Helicone
—	322.	—	31.	—	Sed	—	sed
—	—	—	37.	—	gandet	—	gaudet
—	325.	—	4.	—	perte	—	peste
—	—	—	—	—	Beansardus	—	Beausardus
—	326.	—	3.	—	Palermo	—	Messina
—	—	—	16.	—	Abul-Wesa	—	Abul-Wefa

I.

Eine Aufgabe aus der Theorie der einhüllenden Curven.

Von

Herrn *Carl Wagner*,

Assistenten an der k. k. technischen Hochschule zu Wien.

Im Aprilhefte 1873 der „Nouvelles Annales des Mathématiques" von Gerono findet sich sub No. 1112 die folgende Aufgabe:

„Montrer que la développée de l'ellipse peut être considerée comme l'enveloppe des ellipses concentriques et co-axales à la proposée."

Es liegt nahe, das Problem in folgender Weise ganz allgemein zu fassen:

„Es ist eine ebene Curve c durch ihre Gleichung in orthogonalen Coordinaten

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

gegeben, und ebenso eine zweite Curve c' mit zwei veränderlichen Parametern α und β

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c')$$

Kann die Curve c als Einhüllende der durch Gleichung (c') repräsentirten Curven betrachtet werden, und welche Relation muss dann zwischen α und β bestehen?"

Die Lösung dieses Problems bietet weiter keine Schwierigkeiten dar, da dasselbe jedoch zur Aufstellung einer Reihe von hübschen Uebungsbeispielen dienen kann, dürfte eine kurze Erörterung desselben nicht überflüssig erscheinen.

Wir nehmen in (c) einen beliebigen Punkt (x, y) an, es besteht dann die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch denselben Punkt muss eine der Curven (c') gehen, es ist also

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Beide Curven müssen aber in (x, y) eine gemeinsame Tangente besitzen, also es muss für jeden Punkt in (c).

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

sein. Eliminirt man aus (1), (2) und (3) x und y, so ergibt sich die gesuchte Relation zwischen α und β, etwa

$$\beta = \psi(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Curve (c) ist dann die Einhüllende der Curven

$$\varphi[x, y, \alpha, \psi(\alpha)] = 0$$

Man sieht, dass das Problem im Allgemeinen stets eine Lösung zulässt, und dass dasselbe, falls die Gleichung (c') blos zwei veränderliche Parameter enthält, ein bestimmtes ist.

Beispiel 1. Als erste Anwendung des soeben Entwickelten mag die Eingangs erwähnte Aufgabe dienen.

Die Curve (c) ist in diesem Falle die Evolute der Ellipse, ihre Gleichung lautet demnach

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{a^2-b^2}{a} = m \quad \text{und} \quad \frac{a^2-b^2}{b} = n$$

setzt,

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Curve c' ist eine Ellipse, deren Halbaxen α und β die veränderlichen Parameter sind; Gleichung (2) lautet also

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man leitet aus (1) ab

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3m^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3n^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}},$$

und aus (2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2x}{\alpha^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2y}{\beta^2}.$$

Gleichung (3) lautet demnach

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y},$$

oder

$$n^{\frac{2}{3}}\alpha^2 y^{\frac{4}{3}} = m^{\frac{2}{3}}\beta^2 x^{\frac{4}{3}},$$

woraus man hier unmittelbar auf

$$n^{\frac{1}{3}}\alpha y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{1}{3}}\beta x^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

schliessen darf.

Die Elimination der Grössen x und y, welche in manchen Fällen schwierig und umständlich wird, lässt sich hier sehr leicht und bequem ausführen. Aus (1) und (3) bestimmt man nämlich die Grössen $x^{\frac{2}{3}}$ und $y^{\frac{2}{3}}$, und erhält

$$x^{\frac{2}{3}} = \frac{m^{\frac{2}{3}}n\alpha}{n\alpha + m\beta}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{mn^{\frac{2}{3}}\beta}{n\alpha + m\beta},$$

welche Werte in (2) substituirt ergeben

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

„Die Evolute einer Ellipse ergibt sich somit als Einhüllende von Ellipsen, bei welchen die eine Halbaxe eine lineare Function der anderen ist.“

Ist $B'AB$ (s. Fig.) die gegebene Ellipse, deren Evolute als Einhüllende erhalten werden soll, so construire man zunächst in bekannter, und in der Figur angedeuteter Weise die Gerade MN, welche die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel A und B' verbindet.

1*

Nimmt man dann in MN einen beliebigen Punkt P an, und zieht $PQ \parallel OY$ und $PR \parallel OX$, so sind $OQ = \alpha$ und $OR = \beta$ die Halbaxen einer der erzeugenden Ellipsen. Die Richtigkeit dieser Construction erhellt unmittelbar aus Gleichung (4).

Für den speciellen Fall $m = n = k$ geht Gl. (4) über in

$$\alpha + \beta = k,$$

und Gl. (1) lautet

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

d. h. „die Asteroide ist die Einhüllende von Ellipsen, bei welchen die Summe der Halbaxen constant ist." (Die Umkehrung des letzteren Specialfalles s. Schlömilch, Uebungsb. zum Studium der höh. Analysis, Theil I. § 25. Nr. 14. pag. 140).

Beispiel 2. Ein zweites, gleichfalls leicht zu behandelndes Beispiel ist das folgende:

„Kann die Neil'sche Parabel

$$y^2 - \frac{x^3}{c} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

als Einhüllende von Apollonischen Parabeln, deren Hauptaxe OX ist, betrachtet werden, und welche Relation muss dann zwischen Scheitelabscisse und Parameter der erzeugenden Parabel bestehen?"

Gleichung (2) lautet in diesem Falle

$$y^2 - 2\beta(x - \alpha) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

wenn α die Scheitelabscisse und β den Parameter bezeichnet.

Als Gleichung (3) erhält man

$$\frac{3x^2}{c} = 2\beta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Elimination des y

$$x^2 = 2c\beta - 2\frac{c\beta\alpha}{x},$$

aus (3) folgt

$$x^2 = \tfrac{2}{3}c\beta,$$

somit resultirt aus der subtractiven Verbindung der beiden letzteren Gleichungen für x der Wert

$$x = \tfrac{3}{2}\alpha,$$

der in (3) substituirt die Relation

$$\beta = \frac{27}{8} \frac{\alpha^2}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

liefert. Der Parameter der erzeugenden Parabel muss somit dem Quadrate der Scheitel-Abscisse proportional sein.

Zeichnet man demnach eine beliebige Parabel und nimmt die Ordinaten beliebiger Punkte derselben als Scheitel-Abscissen α, und die zugehörigen Ordinaten β als Parameter von Parabeln, so ist die Einhüllende des letzteren Systems eine Neil'sche Parabel.

Insbesondere ergeben sich einfache Beispiele, wenn man als Curve (c') eine Gerade nimmt. Man hat dann

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0 \quad \ldots \ldots (2')$$

und für Gleichung (3)

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} = \beta \frac{\partial F}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3')$$

Beispiel 3. „Wie muss sich eine Gerade bewegen, damit sich als Einhüllende eine Parabel

$$y^2 = 4qx$$

ergibt?“

Man findet

$$\beta^2 = -q\alpha,$$

welche Gleichung eine einfache Construction zulässt (Umkehrung von Beisp. 1, § 25, Schlömilch l. c.).

Beispiel 4. „Wie muss sich eine Gerade bewegen, damit die Einhüllende derselben eine die Coordinaten-Axen in Abständen a und b vom Ursprunge berührende Parabel

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0$$

sei?“

Es ergibt sich

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

das gleichfalls eine einfache Construction zulässt. (Umkehrung von Beispiel 5, l. c.).

Beispiel 5. „Wie muss sich eine Gerade bewegen, damit sich als Einhüllende eine gleichseitige Hyperbel

$$xy = k^2.$$

ergibt?"

Man findet

$$\alpha\beta = 4k^2.$$

(Umkehrung von Beispiel 7, l. c.).

Beispiel 6. „Nach welchem Gesetze muss sich eine Gerade bewegen, damit die Einhüllende die Evolute einer Ellipse

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

sei?"

Es resultirt

$$\frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{\beta^2}{n^2} = 1,$$

eine Gleichung, welche eine einfache geometrische Interpretation zulässt. (Umkehrung von Beispiel 6, l. c.).

Ganz analog ergibt sich die Lösung des entsprechenden Problems für den Raum; wobei an die Stelle der Curven c und c' krumme Flächen s und s' treten.

Man nimmt wieder auf der Fläche s einen Punkt (x, y, z) an, es besteht dann die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch diesen Punkt geht auch eine der Flächen s', d. h. es muss

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta \ldots) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sein. Die beiden krummen Flächen müssen in (x, y, z) eine gemeinschaftliche Berührungs-Ebene besitzen, was man am einfachsten analytisch ausdrückt, indem man die partiellen Differential-Quotienten des z nach x aus (1) und (2) einander gleichsetzt, und ebenso die nach y genommenen. Aus den beiden so erhaltenen Gleichungen in Verbindung mit (1) und (2) eliminirt man x, y und z, wodurch man zur gesuchten Relation zwischen $\alpha, \beta \ldots$ gelangt.

Beispiel 7. „Die Fläche

$$xyz = k^3$$

soll als Einhüllende von Ebenen

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$$

erhalten werden. Welche Relation muss zwischen α, β und γ bestehen?"

Die Elimination von x, y und z aus den 4 Gleichungen

$$xyz = k^3$$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$$

$$\frac{k^3}{x^2y}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{k^3}{xy^2}=\frac{\gamma}{\beta}$$

ergibt:

$$\alpha\beta\gamma = 27k^3.$$

(Umkehrung von Beispiel 9, l. c. § 26. pag. 145).

II.

Cissoidalcurven.

Von

Herrn *Karl Zakradnik*,

Assistenten am Polytechnikum zu Prag.

Die Construction der gewöhnlichen Cissoide, nämlich der des Diokles, ist hinlänglich bekannt. Wir können aber die Entstehungsart derselben verallgemeinern, wenn wir statt des Grundkreises einen beliebigen Kegelschnitt und statt der Tangente eine beliebige Gerade wählen. So gelangen wir zu einer Art von Curven dritter Ordnung, die wir wegen der analogen Construction „Cissoidalcurven" benennen wollen.

Gegeben sei ein Kegelschnitt C_2 und eine Gerade P. Auf C_2 wählen wir einen beliebigen Punkt 0 als Scheitel eines Strahlenbüschels und zum Anfangspunkt der Coordinaten. Q sei ein Strahl dieses Büschels; derselbe schneidet den Kegelschnitt C_2 (ausser im Punkte 0) in einem Punkte $m_2(x_2, y_2)$ und die Gerade P im Punkte $m_1(x_1\ y_1)$. Tragen wir nun die Sehne $\overline{om_2}$ vom Punkte m_1 auf dem Strahl Q in der Richtung gegen 0 auf, so wird auf demselben ein Punkt $m_3(x_3\ y_3)$ bestimmt und wir erhalten $\overline{om_2} = \overline{m_3 m_1}$. Jedem Strahl Q entspricht so ein bestimmter Punkt m_3 und der geometrische Ort aller Punkte m_3 ist, wie oben erwähnt, eine Cissoidalcurve.

Ziehen wir nun von der Gleichung $\overline{om_2} = \overline{m_3 m_1}$ die gemeinschaftliche Länge $\overline{om_1}$, so erhalten wir

$$\overline{om_3} = \overline{m_2 m_1} \tag{1}$$

als Grundgleichung einer Cissoidalcurve.

Projiciren wir nun die Längen $\overline{om_3}$, $\overline{m_2 m_1}$ in die Axen, so erhalten wir vermittelst der Coordinaten der Punkte m_2, zwei neue Gleichungen, welche uns die Gleichung (1) ersetzen und zwar

$$x_3 = x_1 - x_2 \tag{2}$$

$$y_3 = y_1 - y_2 \tag{3}$$

Die Coordinaten der Punkte m_2 und m_1 ergeben sich als Durchschnittspunkte des Strahles Q mit dem Kegelschnitt C_2 und der Geraden P, deren Gleichungen:

$$C_2 \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$
$$P \equiv mx + ny + p = 0$$
$$Q \equiv y - ux = 0$$

$$(QP) = m_1 \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p}{m+nu} \\ y_1 = -\dfrac{pu}{m+nu} \end{cases} \qquad (QC_2) = m_2 \begin{cases} x_2 = -\dfrac{d+eu}{a+bu+eu^2} \\ y_2 = -\dfrac{(d+eu)u}{a+bu+cu^2} \end{cases}$$

Führen wir nun diese Grössen in die Gleichungen (2) und (3) ein, und schreiben statt x_3, y_3 einfach x, y so erhalten wir:

$$x = -\frac{p}{m+nu} + \frac{d+eu}{a+bu+cu} \tag{4}$$

$$y = \left(-\frac{p}{m+nu} + \frac{d+eu}{a+bu+cu^2}\right)u \tag{5}$$

Jedem Werte für u entsprechen bestimmte Werte für x und y, daher ein bestimmter Punkt auf der Cissoidalcurve. Diese Veränderliche u, welche uns die Coordinaten eines beliebigen Punktes m einer Cissoidalcurve eindeutig bestimmt, nennen wir den Parameter des Punktes m. Die Gleichung in Parallelcoordinaten erhalten wir durch Elimination der Veränderlichen u aus (4) und (5).

Aus (5) folgt $u = \frac{y}{x}$ und führen wir diesen Wert in die Gleichung (4) ein so erhalten wir

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + ey) = 0, \tag{6}$$

oder entwickelt in Form:

$$a_1 x^3 + b_1 x^2 y + c_1 xy^2 + d_1 y^3 + e_1 x^2 + f_1 xy + q_1 y^2 = 0, \tag{7}$$

woraus erhellt, dass eine jede Cissoidalcurve eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, demnach vierter Classe ist. Nun ist aber die allgemeine Gleichung einer Curve

dritter Ordnung und vierter Classe von Form (7). Dieselbe hat sechs willkürliche Constanten, somit erhellt, dass eine Curve dritter Ordnung vierter Classe durch sechs Punkte und durch den Doppelpunkt vollkommen bestimmt ist. Die Gleichung der Cissoidalcurve enthält auch sechs willkürliche Constanten, vier von $C_2 = 0$ und zwei von $P = 0$, daraus folgt, dass eine jede Curve dritter Ordnung und vierter Classe eine Cissoidalcurve ist.

Die Parameter der unendlich fernen Punkte ergeben sich aus Gleichung (5), und zwar:

$$(m + nu)(a + bu + cu^2) = 0. \tag{8}$$

Je nachdem $b^2 \gtreqless 4ac$ ist, hat die Cissoidalcurve im ersten Falle drei reelle Asymptoten, im zweiten Falle zwei der reellen Asymptoten fallen zusammen, im dritten Falle besitzt sie eine reelle und zwei imaginäre Asymptoten. Da nun aber $b^2 - 4ac$ die Invariante des Kegelschnittes C_2 ist, so sehen wir, dass die drei erwähnten Fälle zutreffen, je nachdem der Grundkegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist.

Es ist von selbst einleuchtend, dass die Verbindungslinien der zwei Durchschnittspunkte der Geraden P und des Kegelschnittes C_2 mit dem Punkte 0, die Doppelpunktstangenten der Cissoidalcurve sind, und dass die Bedingungsgleichung für die Existenz eines Rückkehrpunktes mit derjenigen zusammenfällt, unter welcher die Gerade P den Kegelschnitt C_2 berührt; im letzteren Falle ist dann die Cissoidalcurve dritter Ordnung und dritter Classe.

Aus der allgemeinen Gleichung (6) erhalten wir die Gleichung der Cissoide des Diokles, wenn wir

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -a, \quad e = 0, \quad n = 0, \quad \frac{m}{p} = -a$$

setzen, in Form

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

oder aus den Gleichungen (5), (6), vermittelst des Parameters u:

$$x = \frac{au^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{au^3}{1 + u^2}.$$

III.

Ein geometrischer Lehrsatz.

Von
Karl Zahradnik.

Wenn sich zwei Ecken eines Dreieckes auf zwei festen Geraden bewegen, und dessen Seiten sich um drei feste in einer Geraden liegende Punkte drehen, so beschreibt auch die dritte Ecke eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der zwei festen Geraden hindurchgeht. Bei dieser Bewegung beschreibt der Schwerpunkt des veränderlichen Dreieckes eine rationale Curve dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten.

Den ersten Teil dieses Satzes führt schon Pappus in seinen „Collectiones mathematicae" auf; in der neueren Geometrie ergibt sich derselbe als specieller Fall der Deformation der Polygone und wurde auch analytisch mehrfach bewiesen. Wir geben hier einen einfachen Beweis dieses Satzes, wobei sich uns der Beweis des zweiten Teiles unmittelbar ergeben wird.

Es seien in Fig. (1.) b_1, b_2, b_3 drei in einer Geraden liegende Punkte. Den Punkt b_3 nehmen wir als Anfangspunkt der Coordinaten und die Gerade $\overline{b_1 b_3}$ als X-Axe an. Daher $b_1(\xi, 0)$, $b_2(\xi_1, 0)$, $b_3(0,0)$. Ziehen wir durch b_3 die Gerade Q_3, so bestimmt dieselbe auf den festen Geraden P_1, P_2 die Punkte a_1, a_2, zwei der Ecken des veränderlichen Dreieckes, dessen dritte Ecke a_3 sich als Durchschnittspunkt von $\overline{a_1 b_2}$ und $\overline{a_2 b_1}$ ergibt. Die Lage des Punktes a_3 ist durch den Winkel $Q_3 X$ bestimmt, und bezeichnen wir $\operatorname{tg}(Q_3 X)$ mit u, so können wir u als Parameter des Punktes a_3 betrachten, mittelst welches wir die Coordinaten dieses Punktes eindeutig bestimmen können. Die Gleichungen der Geraden P_1, P_2, Q_3 seien respective

$$P_1 \equiv m_1 x + n_1 y - 1 = 0$$
$$P_2 \equiv m_2 x + n_2 y - 1 = 0$$
$$Q_3 \equiv y - ux = 0.$$

Diese Coordinaten der Punkte a_1 und a_2 ergeben sich als Durchschnitte von $(P_1 Q_3)$, $(P_2 Q_3)$ in Form:

$$(P_1 Q_3) = a_1 \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{m_1 + n_1 u} \\ y_1 = \dfrac{u}{m_1 + n_1 u} \end{cases} \tag{1}$$

$$(P_2 Q_3) = a_2 \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{m_2 + n_2 u} \\ y_2 = \dfrac{u}{m_2 + n_2 u} \end{cases} \tag{2}$$

Die Coordinaten der dritten Ecke a_3 als des Schnittpunktes der Geraden $\overline{a_1 b_2}$ und $\overline{a_2 b_1}$ sind:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{\xi_1 \xi_2 (m_1 - m_2) - (\xi_1 - \xi_2) + \xi_1 \xi_2 (n_1 - n_2) u}{(\xi_2 m_1 - \xi_1 m_2) + (\xi_2 n_1 - \xi_1 n_2) u} \\ y_3 &= \frac{-(\xi_1 - \xi_2) u}{(\xi_2 m_1) + (\xi_2 n_1) u}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo $(\xi_2 m_1)$ uns wie üblich die Determinante $(\xi_2 m_1 - \xi_1 m_2)$ und ebenso $(\xi_1 n_1)$ bezeichnet. Die Form der Gleichungen (3) zeigt uns an, dass der geometrische Ort der Ecke a_3 eine Gerade ist, deren Gleichung wir in gewöhnlicher Form erhalten, mittelst Elimination des veränderlichen Parameters u und zwar

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi_1 \xi_2 (n_1 - n_2), & -(\xi_1 - \xi_2), & \xi_2 n_1 - \xi_1 n_2 \\ \xi_1 \xi_2 (m_1 - m_2) - (\xi_1 - \xi_2), & 0, & \xi_2 m_1 - \xi_1 m_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt $(P_1 P_2)$, wie wir uns leicht durch Einführung der Coordinaten derselben in die Gleichung (4) überzeugen können.

Bezeichnen wir nun mit s den Schwerpunkt des veränderlichen Dreieckes $a_1 a_2 a_3$, so sind seine Coordinaten

$$s \begin{cases} 3x = \dfrac{1}{m_1 + n_1 u} + \dfrac{1}{m_2 + n_2 u} + \dfrac{\xi_1 \xi_2 (m_1 - m_2) - (\xi_1 - \xi_2) + \xi_1 \xi_2 (n_1 - n_2) u}{(\xi_2 m_1) + (\xi_2 n_1) u} \\ 3y = \dfrac{u}{m_1 + n_1 u} + \dfrac{u}{m_2 + n_2 u} - \dfrac{(\xi_1 - \xi_2) u}{(\xi_2 m_1) + (\xi_2 n_1) u} \end{cases}$$

Bringen wir nun diese Ausdrücke auf gemeinschaftlichen Nenner, so erhalten wir

$$3x = \frac{[(m_1+m_2)+(n_1+n_2)u][(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u]}{(m_1+n_1u)(m_2+n_2u)[(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u]}$$
$$+\frac{(m_1+n_1u)(m_1+n_2u)[\xi_1\xi_2(m_1-m_2)-(\xi_1-\xi_2)+\xi_1\xi_2(n_1-n_2)u]}{(m_1+n_1u)(m_2+n_2u)[(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u]}$$
$$\tag{5}$$
$$3y = \frac{[(m_1+m_2)+(n_1+n_2)u][(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u-(m_1+n_1u)(m_2+n_2u)(\xi_1-\xi_2)}{(m_1+u_1u)(m_2+n_2u)[(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u]}u.$$

Die Coordinaten des veränderlichen Schwerpunktes (x, y) lassen sich demnach ausdrücken als rationale Functionen des veränderlichen Parameters u, und wie die Form der Gleichungen (5) zeigt, sind diese Functionen rationale Brüche mit gemeinschaftlichen Nenner vom dritten Grade in Bezug auf u, daher ist der geometrische Ort des Schwerpunktes eine rationale Curve dritter Ordnung, d. i. eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Die Parameter der unendlich fernen Punkte erhalten wir, indem wir den gemeinschaftlichen Nenner gleich Null setzen, daher:

$$(m_1+n_1u)(m_2+n_2u)[(\xi_2 m_1)+(\xi_2 n_1)u]=0, \tag{6}$$

aus dieser Gleichung ergeben sich, als Parameter der unendlich fernen Punkte:

$$u_1 = -\frac{m_1}{n_1}, \quad u_2 = -\frac{m_2}{n_2}, \quad u_3 = -\frac{(\xi_2 m_1)}{(\xi_2 n_1)}.$$

Aus der Realität der Parameter folgt die Realität sämmtlicher drei Asymptoten dieser Curve dritter Ordnung.

Den vorhergehenden Lehrsatz könnten wir folgendermassen allgemeiner aussprechen: Wenn die drei Punkte b_1, b_2, b_3 nicht in einer Geraden liegen, so beschreibt die veränderliche Ecke a_3 einen Kegelschnitt. (Maclaurin'sche Erzeugungsmethode der Kegelschnitte *) und der Schwerpunkt s des veränderlichen Dreieckes $a_1a_2a_3$ eine rationale Curve vierter Ordnung.

Der erste Teil ist geometrisch evident. Das Strahlenbüschel (b_3) bildet auf P_1 und P_2 zwei perspektivische Punktreihen, welche beziehungsweise in den Strahlenbüscheln (b_2) und (b_1) perspektivisch sind, daher (b_2) zu (b_1) projektivisch, womit der Satz als bewiesen erscheint. Liegen nun b_1, b_2, b_3 auf einer Geraden, so entspricht in den beiden Strahlenbüscheln der Strahl $\overline{b_1b_2}$ sich selbst, die Strahlen-

---

*) Der erste Teil dieses Satzes ist bekannt und an ihn knüpft sich die schöne Abhandlung Chasles in „Aperçu historique“ ... deutsch von Sohnke Note XV. pg. 349.

büschel (b_2) und (b_1) sind dann perspectivisch, und der Kegelschnitt degenerirt in zwei Gerade in $\overline{b_1 b_2}$ und $a_3 t$. (Siehe Figur 1.). Wir wollen aber denselben auch ähnlich wie im vorhergehenden beweisen, mit Zuhilfenahme des veränderlichen Parameters u. Eine beliebige durch b_3 gehende Gerade nehmen wir als x-Axe an und b_3 selbst als Anfang der Coordinaten; die Coordinaten der Punkte b_1 und b_2 seien $b_1(\xi_1 \eta_1)$, $b_2(\xi_2 \eta_2)$. Die Coordinaten der Punkte a_1 und a_2 sind wie früher, die Gleichungen der Geraden $\overline{a_1 b_2}$ und $\overline{a_2 b_2}$ sind:

$$\overline{a_1 b_2} : y(\xi_2 N_1 - 1) - x(\eta_2 N_1 - u) = \eta_2(\xi_2 N_1 - 1) - \xi_2(\eta_2 N_1 - u)$$
$$\overline{a_2 b_1} : y(\eta_1 N_2 - 1) - x(\eta_1 N_2 - u) = \eta_1(\xi_1 N_2 - 1) - \xi_1(\eta_1 N_2 - u)$$

wo der Kürze wegen $N_1 = m_1 + n_1 u$, $N_2 = m_2 + n_2 u$ gesetzt wurde. Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich die Coordinaten des Durchschnittspunktes a_3:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{\xi_2 N_1(\eta_1 - u\xi_1) + \xi_1 N_2(\eta_2 - u\xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)u - (\eta_1 - \eta_2)}{N_1 N_2(\xi_2 \eta_1) + (\eta_2 N_1) + u(\xi_1 N_2)} \\ y_1 &= \frac{\eta_2 N_1(\eta_1 - u\xi_1) + \eta_1 N_2(\eta_2 - u\xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)u^2 - (\eta - \eta_2)u}{N_1 N_2(\xi_2 \eta_1) + (\eta_2 N_1) + u(\xi_1 N_2)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Coordinaten des Punktes a_3 sind demnach ausgedrückt als echte rationale Functionen des variablen Parameters u in Bruchform bei gleichen Nennern vom zweiten Grade in Bezug auf u; daher der geometrische Ort der Punkte a_3 ein Kegelschnitt. Entwickeln wir den Nenner nach den Potenzen von u, so erhalten wir:

$$(\xi_1 n_2)u^2 + \{(\xi_2 \eta_1)(m_1 n_2 + n_1 m_2) + (n_1 \eta_2) + (\xi_1 m_2)\} u + m_1 m_2(\xi_2 \eta_1) + (m_1 \eta_2)$$

Der Kegelschnitt ist demnach eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse je nachdem

$$[(\xi_1 \eta_1)(m_1 n_2 + n_1 m_2) + (n_1 \eta_2 + (\xi_1 m_2)] \gtreqless 4(\xi_1 n_1)[m_1 m_2(\xi_2 \eta_1) + (m_1 \eta_2)] \quad (8)$$

ist.

Dass der geometrische Ort der Schwerpunkte eine rationale Curve vierter Ordnung ist, ergibt sich aus den Gleichungen (1), (2) und (7), denn derselbe wird bestimmt durch

$$3x = x_1 + x_2 + x_3$$
$$3y = y_1 + y_2 + y_3.$$

Führen wir die Werte aus (1), (2) und (7) in diese Gleichungen ein, und bringen wir dieselben auf gemeinschaftlichen Nenner, so erhalten

wir x und y als Functionen des variablen Parameters u. Diese Functionen sind echte rationale Brüche von gleichen Nenner in Bezug auf u vierten Grades, daher ist der geometrische Ort von $xy_{,,}$ eine rationale Curve vierten Grades.

IV.

Welches ist die Bedingungsgleichung, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen?

Von

Karl Zahradnik.

Es sein gegeben vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Zur x-Axe nehmen wir die Gerade $\overline{A_1 A_2}$ und A_1 selbst zum Anfangspunkt der Coordinaten. Bezeichnen wir nun die Längen $A_1A_2 = a$, $A_2A_3 = b$, $A_3A_4 = a_1$, $A_4A_1 = b_1$, $A_1A_3 = c$, $A_2A_4 = c_1$, so ergeben sich als Coordinaten der vier Punkte $A_1(0, 0)$, $A_2(a_1, 0)$, $A_3(c.\cos(ac), c.\sin(ac))$, $A_4(b_1\cos(ab_1), b_1\sin(ab_1))$.

Die allgemeine Gleichung des Kreises ist

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2 \tag{1}$$

Da derselbe durch den Punkt A_1 gehen soll, so gilt

$$p^2+q^2 = r^2, \tag{2}$$

und die Gleichung (1) geht über in

$$x^2-2px+y^2-2qy = 0. \tag{3}$$

Da dieser Kreis auch durch die Punkte A_2, A_3, A_4 hindurchgehen soll, so müssen die Coordinaten dieser Punkte der Gleichung (3) einzeln genügen, und wir erhalten so:

$$\begin{aligned} &a - 2p = 0 \\ &c - 2p\cos(ac) - 2q\sin(ac) = 0 \\ &b_1 - 2p\cos(ab_1) - 2q\sin(ab_1) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Elimination der Coordinaten des Mittelpunktes (p, q) führt uns zur verlangten Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & \cos(ac) & \sin(ac) \\ b_1 & \cos(ab_1) & \sin(ab_1) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Bemerken wir nun, dass

$$\cos(ac)\sin(ab_1) - \cos(ab_1)\sin(ac) = \sin(b_1c)$$

ist, so geht die Gleichung (5) über in

$$a\sin(b_1c) + b_1\sin(ac) = c\sin(ab_1). \tag{6}$$

Aus der Figur (3) erhellt, dass

$$\sin(b_1c) = \frac{a_1}{2r}, \quad \sin(ac) = \frac{b}{2r}, \quad \sin(ab_1) = \frac{c_1}{2r}.$$

Führen wir diese Werte in die Gleichung (6) ein, so erhalten wir die bekannte Gleichung

$$aa_1 + bb_1 = cc_1 \tag{7}$$

welche uns den Ptolemäischen Lehrsatz ausdrückt.

Als Bedingungsgleichung eines Sehnenviereckes stellt sich uns demnach der Ptolemäische Lehrsatz dar, dem in Bezug auf die Winkel der Satz entspricht, dass ihre Summe gleich π sei.

Aehnlich der Gleichung (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} &a\sin(b_1c) + b_1\sin(ac) = c\sin(ab_1) \\ &a_1\sin(b_1c_1) + b_1\sin(a_1c_1) = c_1\sin(a_1b_1) \\ &a\sin(bc_1) + b\sin(ac_1) = c_1\sin(ab) \\ &a_1\sin(bc) + b\sin(a_1c) = c\sin(a_1b) \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichungen enthalten folgenden Lehrsatz:

Jede Diagonale in einem Sehnenviereck teilt den Winkel, durch den sie durchgeht so, dass das Product der Diagonale mit dem Sinus des ganzen Winkels gleich ist der Summe der beiden diesen Winkel bildenden Seiten multiplicirt mit dem Sinus des ihr nicht anliegenden Teilwinkels.

V.

Einfacher Beweis eines Satzes vom Tetraëderinhalt.

Von

Siegmund Günther.

---

1. Der im Folgenden eingehender behandelte Lehrsatz ist der folgende:

Der Inhalt eines Tetraëders ist gleich dem Ausdruck

$$\tfrac{1}{6}\, ab\sigma \cos v,$$

in welchem a und b zwei beliebige Gegenkanten, σ deren kürzeste Entfernung, v endlich den Winkel bezeichnet, welchen dieselben mit einander bilden.

Es gelang nicht, darüber Klarheit zu erhalten, auf welchen Urheber diess berühmte Theorem zurückzuführen sei. Diese Berühmtheit erlangte es durch den französischen Geometer Chasles, welcher die Bedeutung derselben für die Statik hervorhob. Bekanntlich hatte die analytische Statik zu Anfang dieses Jahrhunderts das Fundamentalproblem der Reduction von n auf einen starren Körper wirkenden Kräften in Angriff genommen und gelöst; durch Lagrange's und Poisson's Bemühungen war man dahin gelangt, zeigen zu können, dass sämmtliche Kräfte auf zwei sich reduciren liessen, deren Richtungen im Allgemeinen nicht in ein und dieselbe Ebene fallen. Wahrscheinlich ward diesem wichtigen Resultate deshalb nicht volle Würdigung zu Teil, weil die fast um die nämliche Zeit auftretende Theorie der Kräftepaare von Poinsot dieselbe Tatsache in ein noch eleganteres Gewand zu kleiden verstand. Als eine wichtige Ergänzung muss es angesehen werden, dass Chasles[1]) nachwies, der Inhalt des Tetraëders, welches durch die beiden resultirenden Kräfte

als Gegenkanten bestimmt ist, sei ein constanter, die Zusammenfassung der Einzelkräfte möge erfolgen, wie sie wolle. Zum Beweis dieser Eigenschaft eines Kräftesystems bedurfte nun Chasles den erwähnten stereometrischen Satz, welchen er jedoch ohne alle weitre Discussion mitteilt. Vom rein statischen Gesichtspunkte aus hat sich unmittelbar darauf Möbius [2]) mit ihm beschäftigt; Schell, welcher ihn bereits in der Kinematik als Hülfssatz benützt, beweist ihn [3]) mit Hülfe eines allgemeineren Theorems von Rodrigues.

Im Allgemeinen scheint dieser Satz, so wichtig und bekannt auch seine mechanische Anwendung ist, vom rein geometrischen Standpunkte aus nicht so berücksichtigt worden zu sein, wie seine unläugbare Eleganz es verdient. Einen solchen Beweis für denselben hat zuerst, wie es scheint, C. F. A. Jacobi angedeutet [4]) und eine ausführliche analytische Behandlung ist ihm von Grunert [5]) zu Teil geworden.

1) Chasles, in Gorgonne's Annales de Mathém., 28. Band.

2) Möbius, Beweis eines neuen, von Hrn. Chasles entdeckten Satzes der Statik; nebst einigen Zusätzen, Crelle's Journ. f. reine u. angew. Math., 4. Band. S. 179.

3) Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte. Leipzig 1870. S. 165.

4) J. H. van Swinden's Elemente der Geometrie, übers. v. C. F. A. Jacobi, Jena 1834. S. 458.

5) Grunert, Analytischer Beweis eines bekannten Satzes von dem Inhalte des Tetraëders, Archiv d. Math. u. Phys., 45. Teil. S. 67.

2. Der Beweis dieses Theorems soll hier im Sinne jenes geometrischen Principes geführt werden, welches von Möbius herrührt und allgemeine Eigenschaften geometrischer Gebilde durch blosse Schlüsse mit Zuziehung specieller Fälle finden lehrt. Die Anwendung desselben kann jedoch nur unter gewissen Cautelen geschehen, welchen desshalb auch im Folgenden besondre Beachtung gewidmet werden wird. Alsdann aber ist diese Methode besonders geeignet, den Aufbau, gewissermassen die Notwendigkeit der Schlussformel erkennen zu lassen.

Es sei $ABCD$ (Fig. 1.) das vorliegende Tetraëder, $AB = a$, $CD = b$ zwei Gegenkanten desselben. Alsdann kann zuerst nachgewiesen werden, dass diese Kanten sich beliebig in ihren Richtungen verschieben lassen, ohne dass der Inhalt des durch sie bestimmten Tetraëders ein anderer würde.

Es sei AB über B hinaus verlängert, und auf dieser Verlängerung $EF = AB$ abgetragen. Zieht man alsdann EC, ED, FC, FD, so ist nach einem bekannten Satze

$$\triangle EFC = \triangle ABC,$$

und, da beide Dreiecke in der nämlichen Ebene liegen,

$$\text{Tetr. } EFCD = \text{Tetr. } ABCD.$$

Aus gleichen Gründen ist, wenn man $HG = CD$ macht und die Linien EG, EH, FG, FH zieht,

$$\text{Tetr. } EFCD = \text{Tetr. } EFHG,$$

also ganz allgemein

$$\text{Tetr. } ABCD = \text{Tetr. } EFHG,$$

womit unsre vorläufige Behauptung bewiesen ist.

Wir sehen somit, dass der gesuchte Tetraëderinhalt J dem Producte

$$ab$$

proportional ist, und wir haben somit, wenn μ einen numerischen, M einen linearen Factor bezeichnet,

$$J = \mu ab M.$$

Es bleibt uns somit nur noch übrig die Bestimmung von μ und M. Offenbar kann die Grösse des Faktors M nur abhängig sein von der Lage der beiden Kanten, und diese Lage hinwiederum ist bedingt, einerseits durch die kürzeste Entfernung der beiden Kanten, andererseits durch den Winkel, welchen dieselben mit einander einschliessen. Nun erkennt man aber sofort, dass der Inhalt des Tetraëders um so grösser wird, je mehr diese kürzeste Distanz σ zunimmt; es ist also J auch direct proportional der Grösse σ, und wir haben somit

$$J = \mu ab\sigma F_{(\nu)},$$

wo (F_ν) eine noch zu bestimmende Function des Neigungswinkels ν der beiden Kanten ist.

Zur Bestimmung dieser Winkelgrösse liegen uns nun folgende Daten vor. Zuerst lässt sich dartun, dass ein Grösserwerden des Neigungswinkels auch ein Wachsen des Tetraëdervolums zur Folge hat. Denn es sei im Tetraëder $ADCD$ (Fig. 2.) $Ax \parallel CD$, und $\angle BAx' > \angle BAx$. Zieht man dann durch C eine Parallele zu Ax, macht auf dieser $CD' = CD$ und zieht AD' und BD', so entsteht ein Tetraëder $ABCD'$, und es lässt sich behaupten:

$$\text{Tetr. } ABCD' > \text{Tetr. } ABCD.$$

Denn fällt man resp. von D und D' die Höhen auf die Grundfläche ABC, und verbindet deren Fusspunkte H und H' mit C, so folgt aus der Construction,

$$\angle D'CH' > \angle DCH$$

also auch

$$\sin D'CH' > \sin DCH,$$

d. h.

$$\frac{D'H'}{b} > \frac{DH}{b}$$

und somit auch in der Tat

$$\text{Tetr. } ABCD' > \text{Tetr. } ABCD.$$

a und b sollen wieder die beiden Gegenkanten AB und CD sein.

Ferner lässt sich über die unbekannte Function $F_{(v)}$ noch Folgendes aussagen. Der Tetraëderinhalt ist durch die bei den Kanten, die kürzeste Distanz und den Neigungswinkel derselben eindeutig bestimmt, und umgekehrt kann er demnach, wenn die Länge der beiden Kanten und die kürzeste Entfernung dieser gegeben sind, nicht zwei verschiedene Tetraëder geben, welche diese Bestimmungsstücke und dazu noch den nämlichen Factor $F_{(n)}$ enthielten. Es muss also $F_{(v)}$ vom ersten Grade sein; dass aber nicht

$$F_{(v)} = pv$$

sein könne, geht daraus hervor, dass unter sonst gleichen Umständen für

$$v = m$$

und

$$v = m + 2\pi$$

der nämliche Tetraëderinhalt erscheinen muss. Von den trigonometrischen Functionen sind aber Cosinus und Cotangente dadurch ausgeschlossen, dass für

$$v > v'$$

auch

$$F_{(v)} > F_{(v')}$$

sein muss. Es kann jedoch auch die Function nicht gleich der Tangente sein, indem unsre Formel offenbar auch für das rechtkantige Tetraëder ihre Gültigkeit behaupten muss, während andrerseits für

$$F_{(v)} = \operatorname{tang} v$$

das Volum

$$J = \infty$$

erhalten werden würde. Es bleibt sonach für $F_{(v)}$ nur der Sinus des Neigungswinkels übrig, und wir erhalten so

$$J = \mu a b \sigma \sin v.$$

Zur Ermittelung des constanten Factors μ können wir nun folgenden Weg einschlagen. Wir benützen das reguläre Tetraëder; nach einer bekannten Formel ist, wenn A dessen Seite, h seine Höhe bedeutet, der Inhalt

$$J' = \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{A\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

Ist $ABCD$ ein solches regelmässiges Tetraëder (Fig. 4.), und fällt man von einem beliebigen Eckpunkte C ein Lot auf die gegenüberliegende Seitenfläche, dessen Fusspunkt H, mit A verbunden, die Strecke $AH = y$ liefert, so hat man

$$\frac{A^2}{4} = x^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

Ferner besteht die Relation

$$h^2 = A^2 - x^2 = A^2 - \frac{A^2}{3}$$

also

$$h = A\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Durch Substitution dieses Wertes folgt

$$J' = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} A^3$$

Hier kommen allerdings zwei Zahlenfactoren vor; wir haben somit zu unterscheiden, welcher derselben für das Tetraëder als solches charakteristisch ist, und welcher aus dem speciellen Falle resultirt, den wir in Betracht gezogen hatten. Offenbar ist letztres der Factor

$$\frac{1}{\sqrt{2}},$$

indem, wenn er bei jedem Tetraëder vorkäme, das Volum eines Tetraëders resp. Dreiecks sich nicht mehr rational ausdrücken lassen würde, was doch bekanntlich nicht der Fall ist.

Es bleibt also nur übrig, den gesuchten Factor

$$\mu = \tfrac{1}{6}$$

zu setzen; hieraus folgt dann

$$J = \tfrac{1}{6} ab\sigma \sin\nu.$$

Anmerkung. Es möge zur Vergleichung auf die analogen Betrachtungen hingewiesen werden, vermöge deren **Hankel**[6]) den Dreiecksinhalt bestimmt. „Da F verschwindet, wenn das Dreieck in eine Gerade zusammenklappt, d. h. wenn, mit Rücksicht auf den positiven und negativen Sinn der Seiten, eine der Grössen $a+b-c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $-a-b+c$ verschwindet, so darf man

$$F^2 = D(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

setzen.... Setzt man die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks, in dem $b=c$,

$$F^2 = \tfrac{1}{4}a^2(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

als bekannt voraus, so wird für diesen Fall $D = \frac{1}{16}$.... und die bekannte Formel

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

ist somit ohne alle Rechnung aus den fundamentalsten Eigenschaften, die in dem allgemeinen Begriffe der Fläche eines Dreiecks liegen, abgeleitet."

6) Hankel, Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und die Rektifikation algebraischer Curven. Leipzig 1864. S. 11.

3. Der vorige Paragraph zeigt augenfällig, wie durch consequente Anwendung des Princips von **Möbius** die gewünschte Schlussformel, so zu sagen, erzwungen werden kann. Dabei drängt sich jedoch auch ein gewisses Bedenken auf, welches nicht ohne weiteres abgewiesen werden kann, ja welches sich, wie wir sehen werden, auch durch eingehende Untersuchung, nur bis zu einem gewissen Grade beseitigen lässt.

Es wurde oben gezeigt, dass für die Function

$$F(\gamma)$$

weder der Cosinus, noch Tangente oder Cotangente genommen werden könne, dass also, wenn die bewusste Function irgend eine geometrische war, diess nur der Sinus sein konnte. Man könnte jedoch hier mit Grund den Einwurf machen, eine eigentliche Notwendigkeit hiezu sei nicht vorhanden; es könnte vielmehr jene Function eine nicht näher bekannte, selbst irreguläre sein, welche nur mit dem Sinus gewisse Eigenschaften gemein hätte. Wüssten wir z. B., dass resp. für

$$F(\gamma) = 1, \ 0, \ -1$$

der Winkel ν die Werte

$$\frac{\pi}{2}, \; 0, \; \frac{3\pi}{2}$$

annähme, so könnte man auf einer Geraden mn (Fig. 3.) von einem beliebig gewählten Nullpunkte aus zwei gleiche Strecken AB und AC abtragen, so dass die Punkte B, A, C resp. den Werten von ν

$$\frac{3\pi}{2}, \; 0, \; \frac{\pi}{2}$$

entsprächen. Würden dann resp. in B und C nach entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe die Lote $BD = -1$ und $CE = 1$ errichtet, so würde eine bestimmte durch D, A und E gehende und gegen die x-Axe symmetrische Curve den Verlauf der Function $\sin \nu$ ausdrücken. Ersichtlich giebt es aber alsdann noch unendlich viele andre Curvenzüge, welche mit dem erstgenannten die angegebenen Eigenschaften gemein haben, ohne gleichwohl mit ihm zusammenzufallen. Wäre z. B. $DpAqE$ die Sinuscurve, so würde $Dp'Aq'E$ eine jener unendlich vielen andren Curven sein, und es lässt sich mit völliger Bestimmtheit nicht behaupten, dass gerade $\sin \nu$ die zu bestimmende Function sei. Nehmen wir jedoch an, dass in dem Wissensgebiete, in dem wir uns bewegen, für solche irreguläre Functionen kein Platz sei — und diese Annahme dürfen wir, da uns kein einziger entgegengesetzter Fall bekannt ist, mit einem an Gewissheit grenzenden Grade von Wahrscheinlichkeit machen —, so ist der oben gezogne Schluss ein richtiger, wenn nur erst dargetan ist, dass für die bestimmten ausgezeichneten Werte von ν die Funktion $F(\nu)$ in der Tat die Werte -1, 0, 1 annimmt. Die erste und letzte Relation sind offenbar gleichbedeutend, und der Beweis braucht daher nur einmal geführt zu werden, während der Zusammenhang der zweiten Stelle ganz unmittelbar aus dem Obigen sich ergiebt.

Um jenen ersten Beweis zu führen, gehen wir wiederum von dem gleichseitigen Tetraëder aus. Den körperlichen Inhalt eines solchen mit der Seitenlänge A haben wir schon oben gefunden; er ist

$$J' = \frac{A^3}{6.\sqrt{2}}$$

Sehen wir nun zu, wie diese Formel sich aus den uns vorliegenden Bestimmungsstücken zusammensetzt. Um die kürzeste Distanz zweier Seiten zu finden, verbinde man deren Mittelpunkte, sind E und F (Fig. 4.) resp. die Halbirungspunkte der Gegenkanten AC und BD, so erhellt sofort, dass die Gerade EF sowohl auf AC, als auch auf

AC senkrecht steht und somit deren kürzeste Entfernung repräsentirt. Zieht man noch BE und DE, so ist

$$BE = DE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Ferner ist

$$\overline{FE}^2 = r^2 = \overline{DE}^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Es ist also

$$\frac{1}{6} a^2 \frac{a}{\sqrt{2}} F_r = \frac{1}{6} a^2 \frac{a}{\sqrt{2}}$$

und hieraus

$$F_r = 1.$$

In der That bilden nun aber zwei Gegenkanten eines regulären Tetraeders einen rechten Winkel mit einander, wie man sich sofort überzeugt, wenn man durch B $Be \parallel AC$ zieht.

Mit Zuhilfenahme dieser Neigungsbestimmung dürfte also nunmehr der Beweis unseres Satzes auf die Evidenz gebracht sein, welche überhaupt das Müller'sche Princip zu gewähren vermag.

Anmerkung. Wie nothwendig die so eben besprochenen Cautelen für Gewinnung eines unzweideutigen Resultates sind, möge folgende Thatsache beweisen. Nennen wir A die Grundfläche eines Kreiscylinders, B den Flächeninhalt eines beliebigen, unter dem Winkel φ durch den Cylinder gelegten ebenen Schnittes, so ist nach einem bekannten Satze

$$A = B \sin\varphi$$

Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, dass, wenn r der Kreisradius, ρ die grosse Achse jener Schnittcurve bezeichnet,

$$\sin\varphi = \frac{r}{\rho}$$

ist. Man hat also

$$r^2\pi = B\frac{r}{\rho}$$

oder

$$B = r\rho\pi$$

Da nun auch der Flächeninhalt einer durch die Halbaxen r und ρ charakterisirten Ellipse

$$B = r\varrho\pi$$

ist, so könnte man zu dem Schlusse sich berechtigt glauben, jene Schnittcurve sei eine Ellipse. Obschon diess bekanntlich sich auch so verhält, so wäre jene Folgerung nichts destoweniger unrichtig, da es unendlich viele Curven mit einer grössten Sehne 2ϱ und einer kleinsten Sehne $2r$ geben kann, deren Flächeninhalt durch den Ausdruck

$$r\varrho\pi$$

gegeben ist.

4. Obschon diese Notiz ihrer eigentlichen Absicht nach weniger zur Verification des genannten Theorems, als vielmehr zur Beleuchtung der Verwendbarkeit des Möbius'schen Princips dienen soll, so möge doch anhangsweise noch ein rein geometrischer Beweis desselben hier mitgeteilt werden, welcher sich durch besondre Eleganz auszeichnet *).

Nachdem, ganz wie oben, gezeigt ist, dass die beiden Kanten AB und CD (Fig. 5.) sich in ihren Richtungen willkürlich verschieben lassen, construire man die kürzeste Distanz $BD = \sigma$ dieser beiden Linien mn und pq, und betrachte das Tetraëder $ABCD$, in welchem $AB = a$, $CD = b$ ist. Fällt man von C auf die Ebene ABD das Lot CE, so ist, wie man sieht,

$$CE \parallel mn,$$

also

$$\angle DCE = v.$$

Ferner ist, wenn wieder J seine frühere Bedeutung hat,

$$J = \tfrac{1}{3} \triangle ABD \,.\, CE$$

Dieses Dreieck ist rechtwinklig; man hat also

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} a\sigma$$

Weiterhin besteht die Relation

$$CE = CD \sin DEC = b \sin v$$

und man findet demnach, indem man all diese Werte in der obigen Gleichung für J substituirt,

$$J = \tfrac{1}{3} \,.\, \tfrac{1}{2} a\sigma b \sin v = \tfrac{1}{6} ab\sigma \sin v.$$

Ein kürzerer Beweis dürfte sich schwerlich erbringen lassen.

*) Derselbe rührt von Hrn. Professor F. Klein in Erlangen her.

VI.

Ueber einige Anwendungen und Erweiterungen des Hauber'schen Theorems.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Bei den verschiedensten mathematischen Untersuchungen begegnet uns die Frage, ob es gestattet sei, einen bestimmten Satz ohne weiteres umzukehren, d. h. ob, in jedem Falle, wo aus einer Bedingung durch Schlüsse die Richtigkeit einer Behauptung gefolgert worden ist, auch umgekehrt aus der Behauptung sich auf die Richtigkeit der Bedingung zurückschliessen lasse. Bekanntlich ist diess im Allgemeinen nicht der Fall, und es muss deshalb ein Kriterium höchst erwünscht sein, welches uns bei jedem Satze sogleich erkennen lässt, ob demselben die Eigenschaft der Umkehrbarkeit zukomme, oder nicht. Ein solches Kriterium wurde nun aber bereits vor längerer Zeit von dem Würtemberger Hauber aufgestellt, einem Manne, dessen wissenschaftliche Verdienste nicht genug anerkannt worden zu sein scheinen, welcher jedoch auf dem in seinem Vaterlande stets mit Vorliebe cultivirten Gebiete —, wir erinnern hier nur an Namen, wie Pfleiderer, Schwab, Camerer — der Geometrie im Sinne der Alten vielfach mit Glück gewirkt hat. Diesem Bestreben, für das Studium der griechischen Classiker eine möglichst tüchtige Grundlage zu schaffen, verdanken wir denn auch das Werk [1], in welchem er eben [2] jenes „theorema logicum novum nec inelegans et multiplicis in mathematica saltim doctrina usus" entwickelt hat.

Hauber selbst giebt seinem Lehrsatze nachstehende Fassung [3]: „Si genus aliquod dividatur in suas species duplici ratione, et singulis

speciebus unius divisionis respondeant singulae species alterius ut attributa: vicissim etiam singulis speciebus alterius divisionis singulae species prioris ut attributa respondebunt.

Ut si genus quoddam A dividatur primum in species b, c, ac deinde in species β, γ: ut omne A sit aut b aut c, et rursus omne A sit aut β aut γ; et praeterea, quae sint ex specie b, iis attribuuntur β; quae ex specie c, iis γ: his igitur positis, vicissim, quae sunt ex specie β, iis attribuuntur b; et quae ex specie γ, iis attribuetur c."

Obwohl Hauber im unmittelbaren Anschlusse hieran den vielfältigen Nutzen seines Lehrsatzes für Gegenstände der Elementargeometrie nachwies, so scheint derselbe doch nicht so bekannt geworden zu sein, als er es verdient. Es muss diess wohl einerseits der Form des Buches zugeschrieben werden, in welchem er zuerst erschien; andrerseits ist auch nicht zu leugnen, dass derselbe in der Formulirung, welche ihm sein Urheber gegeben hatte, wenig Anwendung gestattet. Denn nur die allereinfachsten Sätze werden so beschaffen sein, dass man mit dem nämlichen Subject, welches in der Bedingung auftritt, auch in der Behauptung ausreicht, und es war deshalb der von Drobisch gelieferte Nachweis, dass man statt eines Subjectes auch deren zwei verwenden dürfe, eine notwendige Ergänzung. Mit dieser Erweiterung lautet nunmehr der Satz folgendermassen [4]:

„Wenn einem Subject S entweder a oder b oder c, dessgleichen einem Subject Σ entweder α oder β oder γ als Prädicat zukommt, und es überdies bekannt ist, dass

1) wenn $S..a$, immer auch $\Sigma..\alpha$,
2) wenn $S..b$, immer auch $\Sigma..\beta$,
3) wenn $S..c$, immer auch $\Sigma..\gamma$,

so ist auch umgekehrt

4) wenn $\Sigma..\alpha$, immer auch $S..a$,
5) wenn $\Sigma..\beta$, immer auch $S..b$,
6) wnnn $\Sigma..\gamma$, immer auch $S..c$."

Drobisch nennt diesen so vervollkommneten Lehrsatz einen „apagogisch zu erweisenden," was jedoch nicht völlig zutreffen möchte, indem Matzka [5]) einen directen Beweis für denselben geliefert hat. Derselbe ist einfach folgender: „Aus den vorausgesetzten beiden disjunctiven und allen hypothetischen Urteilen folgt der Satz: Wenn S nicht a ist, folglich entweder b oder c oder d u. s. f., so ist Σ entweder β oder γ oder δ u. s. f. also nicht α; kurz wenn S nicht a

ist, so ist auch Σ nicht a. Hieraus folgert man aber durch Contraposition sogleich richtig den behaupteten Satz: Wenn Σ, α ist, so ist S, a."

Die beiden genannten Mathematiker haben es sich angelegen sein lassen, zahlreiches Material zur Beleuchtung der Nützlichkeit unseres Theorems zu sammeln. Während Matzka hiebei besonders den bereits von Hauber eingeschlagnen Weg verfolgend seine Verwendbarkeit bei verschiednen der Geometrie angehörigen und häufig stillschweigend als richtig vorausgesetzten Elementar-Wahrheiten darzutun bemüht war, entnimmt Drobisch seine Beispiele der höheren Mathematik. Er zeigt, dass verschiedne Relationen in letzter Instanz sich auf ein Corollar des verallgemeinerten Hauber'schen Satzes zurückführen lassen, das sich[6]) so aussprechen lässt: „Stehen zwei veränderliche Grössen x, y in einem solchen wechselseitigen Zusammenhange, dass, wenn für irgend einen Wert von $x = x'$, $y = y'$ wird, und entweder 1) für jeden beliebigen anderen Wert $x \gtrless x'$, $y \gtrless y'$, oder 2) für $x \gtrless x'$, $y \lessgtr y'$, so ist auch im ersten Falle, wenn $y \gtrless y'$, $x \gtrless x'$, und im zweiten, wenn $y' \gtrless y$, $x \lessgtr x'$. Als eine einfache Folgerung ergiebt sich auch, dass jede indirecte Operation die logische Umkehrung der zugehörigen directen ist.

Anmerkung. Wie wenig sich Hauber's Werk einer weiteren Verbreitung zu erfreuen hatte, geht schon aus dem Umstande hervor, dass Matzka, welcher doch dem Gegenstande seine eifrige Teilnahme zuwandte, die Originalschrift gar nicht gekannt zu haben scheint. Derselbe schreibt nämlich den Satz in der oben gegebenen Gestalt bereits Hauber zu, während er dieselbe doch, wie wir sehen, erst von Drobisch erhalten hat; auch das kleine Versehen, wonach als Druckort von Hauber's Buch nicht Reutlingen, sondern vielmehr Stuttgart angegeben ist, ist wol aus Drobisch's Logik in Matzka's Abhandlung übergegangen.

1) Scholae logico-mathematicae, auctore F. C. Haubero, Reutlingae 1829.

2) Ibid. Praefatio, S. IX.

3) Ibid. S. 265.

4) Drobisch, Neue Darstellung der Logik mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft, Leipzig 1863. S. 227.

5) Matzka, Betrachtungen einiger Gegenstände der Logik, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendungen in der Mathematik, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 6. Band. S. 259.

6) Drobisch, S. 228.

§. 2. Ehe wir auf eine speciellere Discussion des vorliegenden Satzes eingehen, muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Fassung desselben noch einen etwas bestimmteren Ausdruck haben sollte. Man könnte nämlich leicht auf die Meinung kommen, als ob die Sätze:

$$\text{wenn } S \ldots a, \text{ immer auch } \Sigma \ldots \alpha,$$
$$\text{wenn } S \ldots b, \text{ immer auch } \Sigma \ldots \beta,$$

etc. nur coordinirt neben einander gestellt wären, ohne eines Abhängigkeit vom andern, während doch in der Tat lediglich auf diesem Zusammenhang die Gültigkeit des ganzen Beweises beruht. Auch aus den von Drobisch und Matzka beigebrachten Belegen ist nicht so genau, als es zu wünschen wäre, diese Verbindung zu entnehmen. Es sollte noch bestimmter hervorgehoben sein, dass, wenn es sich um irgend eine Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks z. B. handelt, man notwendig auch die bezügliche Eigenschaft des ungleichseitigen Dreiecks kennen müsse.

Wenn es darauf ankommt, einen neuen Satz zu prüfen, so wird diese Prüfung stets eine doppelte sein müssen, wir möchten sagen, eine positive und negative. Was die erstre Seite anlangt, so ist, wie wir sahen, schon Vieles zur Erläuterung des Theorems geschehen, indem man direct seine Nützlichkeit bei den verschiedensten mathematischen Problemen nachwies, und es wird sich unsre Tätigkeit hier darauf beschränken müssen, auf einige bisher noch unerörtete Punkte von anerkanntem Interesse hinzuweisen.

Hingegen dürfte es gerade bei einem Satze, wie der Hauber-sche ist, doppelt nötig sein, auch diejenigen Fälle zu untersuchen, wo derselbe seinen Dienst versagt, wo also die Annahme der Umkehrbarkeit zu irrigen Resultaten führen würde. Ist diess schon ohnehin eine Anforderung, ohne deren Erfüllung die Bedeutung irgend eines neu aufgestellten Kriteriums nie klar hervortreten kann, so ist dieselbe doppelt berechtigt bei unsrem Falle, wo das Kriterium einen so überaus einfachen Charakter trägt. Es liegt hier der Argwohn nur allzunahe, dass ein Satz, dessen Wahrheit so sehr von selbst klar zu sein scheint, sich zu Allem möglichen verwenden lasse, und es wird dieser Argwohn erst dann schwinden, wenn an einigen prägnanten Fällen gezeigt sein wird, dass bei gewissen Theoremen der Hauber-sche Satz unmittelbar erkennen lasse, wie denselben die Eigenschaft der Umkehrbarkeit abgehe.

Zuvor jedoch möge es gestattet sein, dem Theorem eine Formulirung zu erteilen, wie sie für unsre Zwecke passender zu sein scheint, indem die Mathematik nicht mit Subjecten und Prädicaten, sondern

mit Grössen und deren Eigenschaften zu tun hat. Für alle geometrischen Anwendungen werden wir mit folgender Fassung ausreichen:

Wenn von dem geometrischen Gebilde (s. d. Figur.) S und ebenso von einem andren Σ ausgesagt werden kann, dass denselben resp. die — metrischen oder projectivischen — Eigenschaften a, b, c und α, β, γ zukommen, und dass, wenn

$$S \ldots a, \quad S \ldots b, \quad S \ldots c \quad \text{etc.}$$

immer auch

$$\Sigma \ldots \alpha, \quad \Sigma \ldots \beta, \quad \Sigma \ldots \gamma \quad \text{etc.}$$

als richtig dargetan ist, so ist die Umkehrung all dieser Einzelsätze gestattet.

Den Ausdruck „projectivische“ Eigenschaft haben wir hier lediglich in dem Sinne genommen, dass diese Eigenschaften sich auf die Lage, nicht auf die Grösse der einzelnen Teile der Figur beziehen sollen. Es möge nun der Anfang damit gemacht werden, die Anwendbarkeit unsres Kennzeichens bei solchen Sätzen zu prüfen, deren Umkehrung sich verbietet.

§. 3. Hier empfiehlt sich nun sofort ein Satz, der vermöge seiner Einfachheit von jeher benutzt wurde, die Unmöglichkeit zu demonstriren, dass alle Sätze der Geometrie sich umkehren liessen. Es ist diess der folgende: Alle rechten Winkel sind gleich, dessen Umkehrung das absurdum ergiebt: Alle gleichen Winkel sind rechte.

Unser S ist hier offenbar der Winkel; seiner Eigenschaft ein rechter zu sein, können wir nicht eine bestimmte Anzahl andrer entgegensetzen, sondern nur eine unendliche Anzahl, indem ja der Winkel alle denkbaren Werte zwischen 0 und 2π annehmen kann. Wir können also nur sagen, hat der Winkel S zur vollen Umdrehung successive das Verhältniss

$$\tfrac{1}{4}, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e \ldots$$

und ein andrer Winkel Σ die nämlichen Verhältnisse, so folgt in jedem einzelnen Falle die Gleichheit der betreffenden Winkel, also auch die Gleichheit zweier rechten Winkel. Die Umkehrung liefert uns dann blos, dass zwei Winkel, die zu 2π das nämliche Verhältniss haben, einander gleich sind, nicht aber das oben angeführte irrige Resultat. Wir sehen so, dass hier der Hauber'sche Satz, dadurch dass er anstatt eines Irrtums eine Anzahl richtiger, wenn auch selbstverständlicher Resultate ergiebt, seine Brauchbarkeit documentirte.

Während in diesem Fall es am Tage lag, dass eine directe Umkehrung des Satzes nicht möglich sei, ist diess wesentlich anders bei demjenigen Satze, zu dessen Betrachtung wir nunmehr übergehen wollen; derselbe unterscheidet sich auch dadurch von dem eben besprochnen, dass in ihm, wenigstens teilweise, nicht Beziehungen der Grösse, sondern der Lage zur Sprache kommen. Derselbe befindet sich in der Geometrie von Kunze[7]), — wo auch bereits auf seine Umkehrbarkeit aufmerksam gemacht wird — und lautet: „In jedem Kreisvieleck von gerader Eckenzahl ist resp. die Summe des 1ten, 3ten ... $(2n-1)$ten Winkels gleich der Summe des 2ten, 4ten .. $(2n)$ten.

In diesem Falle ist nun also S ein Polygon von gerader Seitenzahl (etwa das Achteck $ABCDEFGH$ (s. d. Fig.)), welches die Eigenschaft a besitzt, dass seine Ecken einem Kreise (vom Mittelpunkt M) angehören. Das zur Anwendnng des Hauber'schen Satzes erforderliche Schema construirt sich alsdann folgendermassen, indem wir den speciellen Fall des Achtecks zu Grunde legen.

Gehören von einem Achteck S mit bestimmten Winkeln alle 8 Winkel als Peripheriewinkel zu einem Kreise — Eigenschaft a —, so besteht, wenn Σ_{2n-1} und Σ_{2n} die bezüglichen Winkelsummen sind, die Relation

$$\frac{\Sigma_{2n-1}}{\Sigma_{2n}}(\Sigma) = 1\ (\alpha)$$

Construiren wir nun durch Ziehung geeigneter Parallelen neue Achtecke von der Eigenschaft, dass resp. nur noch 6, 4, 2, 0 Eckpunkte auf der Peripherie von M liegen (die Figur repräsentirt in dem Achteck $\alpha' \beta' \gamma' \delta' \varepsilon' \zeta' \eta' \vartheta'$ nur den letzterwähnten Fall), so zeigt sich, dass die Eigenschaft des ursprünglichen Achtecks erhalten bleibt. Wir müssen also sagen: Gehören von einem Achteck mit bestimmten Winkeln nur mehr 6 (b), oder 4 (c), oder 2 (d), oder endlich 0 (e) Winkel dem Kreise als Peripheriewinkel an, so besteht doch stets die Beziehung

$$\frac{\Sigma_{2n-1}}{\Sigma_{2n}}(\Sigma) = 1\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

Ist also diese Relation gegeben, so lässt sich aus ihr nur der Schluss ziehen, dass das betreffende Polygon mit einem Kreispolygon von derselben Eckenzal die Relation

$$\Sigma_{2n-1} = \Sigma_{2n}$$

gemein hat, nicht aber, dass es selbst ein Kreispolygon ist, und somit hat sich auch hier wiederum der Hauber'sche Satz bewährt.

7) Kunze, Lehrbuch der Geometrie, Jena 1851. S. 121.

§. 4. War es bisher unser Bestreben, diejenigen Fälle hervorzuheben, wo unser Lehrsatz, indem er nicht das gewünschte, sondern eine Reihe ganz irrelevanter Resultate zu Tage fördert, die Irrigkeit des erstren anzeigt, so mögen im Folgenden dagegen solche Sätze als Material der Prüfung verwendet werden, deren Umkehrung zwar gestattet, aber mit gewöhnlichen Mitteln schwieriger zu beweisen ist. Hier tritt also ein reeller Nutzen unsres Kriteriums zu Tage, insofern uns derselbe mühsame Beweise ersparen lehrt, und dieser Nutzen dürfte um so höher anzuschlagen sein, wenn wir bedenken, wie wenig reellen Gewinn die apagogischen Beweise, deren man sich bei Umkehrungen in der Regel bedient, der Wissenschaft bringen.

Derjenige Satz, dessen Beweis wir im Folgenden mit Hülfe des Verfahrens von Hauber zu leisten beabsichtigen, ist folgender: Sind die beiden Geraden, welche je zwei Winkel eines Dreiecks in gleichem Verhältnisse $m:n$ teilen, einander gleich, so sind diess auch die resp. den beiden in Frage kommenden Dreieckswinkeln gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks.

Dieser Satz, und speciell sein Unterfall, wo $m:n$ ist, hat eine gewisse Berühmtheit erlangt, und sein Beweis war zu einer gewissen Zeit recht eigentlich zur Modesache geworden. Er wurde zuerst von Steiner[8]) in folgender Form ausgesprochen: „Wenn die Winkel an der Grundlinie eines Dreiecks in gleichem Verhältniss geteilt werden, so dass $\alpha:\alpha_1 = \beta:\beta_1$, und wenn die bis an die Gegenseiten verlängerten Teilungslinien gleichlang sind, so ist die Frage, ob denn das Dreieck gleichschenklig sei?" Steiner giebt sowol für diesen, als auch für den analogen Satz vom sphärischen Dreieck, einen elementaren Beweis. In ebenfalls ziemlich einfacher Weise ist der Beweis von Zech[9]) geführt, ungleich complicirter, nämlich durch eine Art von Grenzübergang, von Lange[10]). Von besonderem Interesse für uns ist jedoch das Verfahren Baltzer's[11]), welcher bei seinem Beweise ganz nach Art der Hauber'schen Vorschrift zu Werke geht, ohne jedoch diesen Namen zu nennen.

Mit Zugrundelegung dieses Satzes können wir nun folgendermassen uns ausdrücken. Hat ein Dreieck (S) zwei gleiche Winkel (a), so sind die beiden Transversalen (Σ), welche jeden dieser Winkel in einem bestimmten Verhältnisse

$$m:n$$

teilen, einander gleich (α). Hat dagegen das Dreieck (S) zwei ungleiche Winkel an Stelle jener (b), so erhellt sofort, dass auch die beiden Geraden (Σ), welche diese Winkel in dem bewussten Verhältnisse teilen, einander nicht gleich sein können (β). Wenden wir also nun

den Hauber'schen Satz an, so erhalten wir folgendes Doppelresultat:

A) Sind die beiden Transversalen (Σ), welche zwei Winkel eines Dreiecks im nämlichen Verhältnisse teilen, einander nicht gleich (β), so ist jenes Dreieck (S) ungleichseitig (b).

B) sind die beiden Transversalen (Σ), welche zwei Winkel eines Dreiecks im nämlichen Verhältnisse teilen, einander gleich, so ist jenes Dreieck (S) gleichschenklig (a).

8) Steiner, Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und über das sphärische Dreieck, Crelle Journal für reine u. angew. Math., 28. Band. S. 375.

9) Zech, Ueber einige geometrische Sätze und die Rechnung mit imaginären Grössen, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys.. 15. Teil. S. 356.

10) Lange, Beweis des Satzes: Sind die Linien, welche aus zwei Dreieckswinkeln auf die Gegenseiten gezogen sind, und diese Dreieckswinkel in gleichen Verhältnissen teilen, einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig, und zwar sind die erwähnten Gegenseiten einander gleich, Grunert's Archiv 13. Teil, S. 357.

11) Baltzer, Ueber das Dreieck, worin die Transversalen gleich sind, welche zwei Winkel desselben nach gleichen Verhältnissen teilen, Grunert's Archiv, 15. Teil, S. 201.

§. 5. Hiemit mögen die geometrischen Anwendungen ihren Abschluss finden, und es soll im Folgenden lediglich noch die Nützlichkeit des Hauber'schen Satzes für die Analysis in's Auge gefasst werden. Indessen wird es hier, wenigstens für eine umfassende Classe von Problemen möglich sein, demselben noch eine einfachere Fassung zu geben, welche uns der Mühe, alle denkbaren Verhältnisse betrachten zu müssen, überheben soll.

Besteht nämlich zwischen zwei beliebigen analytischen Formen eine durch das Gleichheitszeichen charakterisirte Relation, so soll doch durch dieses ausgedrückt werden, dass nur dann die linke und rechte Seite dieser Verbindung, welche wir Gleichung nennen, wirklich jene Beziehung erfüllen können, wenn sie wieder ganz bestimmten Bedingungen genügen. Hören diese Bedingungen auf gültig zu sein, so hört auch jene Relation auf zu existiren, und es ist somit in all diesen Fällen unnötig, alle die Voruntersuchungen durchzuführen, welche die Anwendung des Hauber'schen Satzes verlangt, indem dieselben durch die Natur der Sache überflüssig werden. Wir dürfen also sagen:

Ist irgend ein analytischer Ausdruck (oder auch eine Anzahl sol-

cher) (S) mit einer Reihe von charakteristischen Bedingungen behaftet (a), ebenso ein andrer (Σ) mit entsprechenden Bedingungen (α), und steht zwischen diesen Ausdrücken das Gleichheitszeichen, d. h. also, geht daraus, dass S die Eigenschaft a hat, sofort hervor, dass Σ die Eigenschaft b hat, so muss das Gleichheitszeichen auch im umgekehrten Fall bestehen bleiben: für $\Sigma\,..\,\alpha$, besteht $S\,..\,a$.

Bekanntlich lässt sich zeigen, dass wenn ein System (S) trinomischer recurrirender Gleichungen (a)

$$\begin{array}{l} p_1 u - q_1 u_1 + u_2 = 0 \\ p_2 u_1 - q_2 u_2 + u_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

vorliegt, der Quotient $\frac{u_1}{u}$ zweier aufeinanderfolgenden Unbekannten (Σ) sich in den Kettenbruch (α)

$$\frac{u_1}{u} = \cfrac{p_1}{q_1 - \cfrac{p_2}{q_2 - \cfrac{p_3}{q_3 - \cdots}}}$$

entwickeln lässt. Es kann nun bei gewissen Untersuchungen wünschenswert sein, diesen Satz umzukehren [12]), ohne doch auf den ziemlich complicirten analytischen Nachweis der Umkehrbarkeit eingehen zu müssen. Mit Hülfe des vereinfachten Hauber'schen Satzes schliessen wir so: Giebt es eine durch das Gleichheitszeichen vermittelte Beziehung (a) zwischen den das System (S) bildenden Grössen u, p, q, nämlich eben jene recurrirende, so besteht zwischen dem Quotienten (Σ) und dem Kettenbruch (α) ebenfalls die Beziehung der Gleichheit; ist es also bekannt, dass Σ und α durch das Gleichheitszeichen in Beziehung gesetzt sind, so muss auch das System (S) trinomischer recurrirender Gleichungen (a) existiren.

12) Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 79.

§. 6. Auch in der Theorie der Gleichungen scheint unser Satz berufen, eine gewisse Rolle zu spielen. Es scheint nämlich diese Disciplin das Eigentümliche zu haben, dass ihre Wahrheiten sofort in ihrer Richtigkeit erkannt werden, während auf der andren Seite der strenge mathematische Beweis fast stets mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Wir erinnern nur an den fälschlich nach Harriot benannten Lehrsatz, welcher lange Zeit für unbeweisbar galt, und in der Tat ist der erste Beweis, welchen derselbe fand, nicht *eigentlich* ein rein mathematischer, sondern vielmehr ein philosophi-

scher. Ein gewisser Stübner[13]) soll ihn vermittelst des metaphysischen Satzes vom zureichenden Grunde geführt haben. Noch weit unzugänglicher für die rein mathematischen Methoden erwies sich bekanntlich der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra, dem erst Gauss eine Seite abzugewinnen vermochte, welche es gestattete, ihn mit bekannten algebraischen Sätzen in Verbindung zu bringen. Und doch wird sich nicht läugnen lassen, dass gerade dieses Theorem nie dem geringsten Zweifel unterlag, dass vielmehr seine innnere Wahrheit zu allen Zeiten so sehr von selbst einzuleuchten schien, dass man ihm mehrfach[14]) den Charakter eines Axioms unterlegen zu können glaubte. Ohne nun selbstverständlich den hohen Wert der rein analytischen Beweismethoden irgendwie schmälern zu wollen, möchte es doch möglich sein, sich lediglich durch Gründe der formalen Logik von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, ebenso, wie der Harriot'sche Satz zum erstenmale von philosophischem Boden aus in Angriff genommen wurde.

Hat man n Grössen von der Form

$$(x-a_1), \quad (x-a_2), \quad \ldots \quad (x-a_n)$$

mit einander zu multipliciren — $S \ldots a$ —, so lässt sich bekanntlich unmittelbar zeigen, dass dieses Product mit dem Polynom (Σ)

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n \ldots (\alpha)$$

durch das Gleichheitszeichen verbunden sei; hat also ein Polynom (Σ) die hier gekennzeichnete Eigenschaft (α), nämlich vom $n$ten Grade zu sein, so lässt sich diess Polynom in n Factoren (S) zerfällen, deren jeder die Eigenschaft (a) hat, linear zu sein. In wie naher Beziehung dieser umgekehrte Satz zum Fundamentalsatz der Algebra steht, liegt auf der Hand.

13) Egen, Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 2. Teil, Berlin 1849. S. 275.

14) Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen 1. Teil, Leipzig 1867. S. 98.

§. 7. Zum Schlusse sei noch auf den erwähnenswerten Umstand aufmerksam gemacht, dass auch in der angewandten Mathematik der Hauber'sche Satz bei den mannigfachsten Gelegenheiten mit Vorteil zur Anwendung gelangen kann. Von vielen Beispielen heben wir eines, das von historischem Interesse ist, heraus, Newton's Untersuchungen über die Bahn eines Planeten, dessen Attractionsgesetz bekannt ist. Bekanntlich hatten Kepler's Gesetze und Huyghen's Sätze über Centralbewegung den Boden für Newton so weit geebnet,

dass die Ableitung dieses Gravitationsgesetzes aus der als gegeben zu denkenden Bahn der Himmelskörper wesentliche Schwierigkeiten nicht mehr darbot. Ganz anders verhielt es sich mit der umgekehrten Aufgabe. Erforderte die Lösung des directen Problems blos Kenntniss der Differentialrechnung, so bedurfte man für das umgekehrte bereits einer Integration, und diese musste Newton leisten, wenn er seinem System die letzte Vollendung geben wollte; denn wir müssen, wie Dühring[15]) sagt, eingedenk bleiben, „dass der Kernpunkt der neuen Theorie der Attractionsbewegungen in Satz XVII des ersten Buches zu suchen ist, wo die Aufgabe gelöst wird, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit und quadratischer Anziehung die Bahn zu bestimmen.“ Wir dürfen sonach sagen, dass der grosse Fortschritt, welchen die Infinitesimalmethoden Newton zu danken haben, direct durch diess Problem angeregt worden sei. Ebenso wie auch (s. o.) die Integration sich nach dem Hauber'schen Theorem als directe Umkehrung des Differentiirens ergiebt, muss dieses Kennzeichen uns sofort erkennen lassen, dass es nach Lösung des ersten Problems in rein allgemein logischem Sinne keiner Lösung des zweiten oder umgekehrten Problems mehr bedurfte, so wenig auch natürlich durch diese Erkenntniss für die mathematische Behandlung gewonnen sein mochte.

Wir können so sagen: Bewegt sich ein von einem anfänglichen Tangentialstoss betroffnes Mobil (S) in einem Kegelschnitt (a) um das attrahirende Centrum, so muss das Gesetz, nach welchem jene Anziehungskraft (Σ) wirkt, das der umgekehrten quadratischen Entfernung (α) sein, und es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn die Bahn kein Kegelschnitt (b) ist, auch das Attractionsgesetz irgend ein andres (β) sein muss.

Durch Anwendung des Hauber'schen Lehrsatzes gelangen wir somit, wie oben, (s. o. §. 4.) zu dem zweifachen Resultate: Wird ein mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich bewegender Körper (S) von einer nach dem Newton'schen Gesetze (α) wirkenden Attractionskraft (Σ) beeinflusst, so beschreibt er einen Kegelschnitt (a); ist die auf den Körper (S) wirkende centrale Kraft (Σ) einem beliebigen andren Gesetze (β) unterworfen, so kann die Trajectorie keine Curve zweiter Ordnung sein.

Der Hauber'sche Satz lässt bei vielen Gelegenheiten seine Brauchbarkeit für Gegenstände der angewandten Mathematik erkennen; auch das von Bernoulli aufgestellte Gesetz, wonach gleichen Ursachen gleiche Wirkungen, und auch umgekehrt gleichen Wirkungen gleiche Ursachen entsprechen sollen, dürfte, insoweit es volle Gültigkeit beanspruchen kann, als einfaches Corollar desselben an-

zusehen sein. Wir erinnern nur an die auf demselben Grunde beruhende Spectralanalyse.

15) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1872. S. 191.

Anhang.

Zugleich als Nachtrag zu dem Aufsatze in diesem Archiv, S. 163.

In dem hier genannten Aufsatze „Ueber einige Probleme der höheren Geometrie" (2. Heft) findet sich ein Passus, der in gewissem Sinne Einwürfen ausgesetzt zu sein scheint, und deshalb wohl einer Erläuterung bedarf. Wir wählen diesen Ort, um die Erläuterung zu geben, weil wir uns eben auf den im Vorstehenden discutirten Satz teilweise zu stützen gedenken. Hiebei mögen jedoch noch einige Worte über das die einzelnen Probleme jener Abhandlung beherrschende Princip ihre Stelle finden.

Dasselbe ist kein neues, nur dass allerdings eine Anwendung auf Gegenstände der analytischen Geometrie noch nicht gemacht worden zu sein scheint. Im wesentlichen hat sich seiner bereits Lagrange bei Aufstellung seiner bekannten Interpolationsformel bedient. Eine bestimmtere Fassung erhielt dasselbe jedoch erst von Möbius; seine hierauf bezüglichen Bemerkungen wurden jedoch nicht von ihm selbst, sondern von seinen Schülern Baltzer[16]) und Hankel[17]) in Gelegenheitsschriften veröffentlicht. Dieselben knüpfen sich an die Bestimmung des Dreiecksinhalts aus den drei Seiten. Die Gleichberechtigung dieser drei Seiten, sowie der Umstand, dass der Inhalt von den Vorzeichen der Seiten unabhängig sein muss, bedingen, dass die den Inhalt ausdrückende Formel eine symmetrische Function von a^2, b^2, c^2 sein muss; ebenso ergiebt sich aus der Eigenschaft ähnlicher Dreiecke ihre Homogeneität. Da dieselbe ferner, wie sofort erhellt, teilbar ist durch die Grössen

$$a+b+c,\quad a+b-c,\quad a-b+c,\quad a-b-c,$$

so muss der Inhaltsausdruck zu der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$$

ein von a, b, c unabhängiges Verhältniss haben. Setzt man, um den noch unbekannten Factor zu bestimmen, $a = b = c$, so ist der Dreiecksinhalt gleich

$$\tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

der Factor also $\frac{1}{4}$, wie wir aus andren Gründen wissen.

Vergleichen wir mit dieser Methode die in jener Arbeit zu Grunde gelegte, so finden wir, dass der Aufbau der Formeln auf ganz entsprechende Weise vor sich geht. Die schliessliche Anwendung des gleichseitigen Dreiecks zur Bestimmung des Factors $\frac{1}{4}$ verhält sich ganz analog der Art und Weise, wie dort durch Betrachtung einer ausgezeichneten Lage der betreffenden Curve (Gerade, Ellipse), in beiden Fällen der unbekannte Exponent der Curvengleichungen

$$x^m + y^m - a^m = 0$$

und

$$x^{2n} - a^{2n} + y^{2n} - b^{2n} = 0$$

ermittelt wurde.

Der von uns oben erwähnte Passus (S. 165) ist folgender: „Nun ist aber ganz allgemein die Gleichung einer Curve, deren Mittelpunkt in den Ursprung fällt, unter der Form

$$\alpha x^m + \beta y^m = C$$

darstellbar." Dieser Satz bedarf notwendig einer Ergänzung.

Wir haben nämlich zunächst danach zu fragen, was wir unter dem Mittelpunkt einer Curve uns zu denken haben. Die allgemeinste Antwort auf diese Frage giebt uns wohl Steiner[15]) mit folgender Definition: „Unter „Mittelpunkt" einer Curve $m$ten Grades, C^m, wird ein solcher in ihrer Ebene liegender Punkt M verstanden, welcher die Eigenschaft hat, dass jede durch ihn gezogene unbegrenzte Gerade S die Curve in solchen m Punkten schneidet, welche paarweise gleichweit von ihm abstehen, so dass also die Schnittpunkte auf beiden Seiten von jenem Punkte M gleich verteilt sind, und jedem Punkt p auf der einen Seite ein anderer p_1 auf der entgegengesetzten Seite, in gleichem Abstande von M, entsprechen muss und sein „Gegenpunkt" genannt wird." Dieser umfassenden Definition scheinen sich selbst die transscendenten Curven einzufügen, indem in diesem Sinne offenbar jeder Knotenpunkt einer Sinuslinie als Mittelpunkt sich auffassen lässt.

Es ist nun klar, dass nicht jede Curve, welche einen solchen [illegible]punkt besitzt, eine Gleichung von der angegebnen Form be-

sitzen muss. Ganz abgesehen von den transscendenten Curven, welchen unendlich viele Mittelpunkte zukommen, wird es bereits Curven 3ter Ordnung mit Mittelpunkt geben, deren Gleichung in ihrer einfachsten Form

$$Ax^3 + Bxy + Ay^3 = C^3$$

ist, welche also jenem Gesetze nicht entsprechen. Allein bei genauerem Zusehen ergiebt sich auch sofort, dass diese Curven keine geschlossne Gestalt haben, und deshalb nicht mit jenen übereinstimmen, welche in jener Abhandlung betrachtet wurden. Wir können unsrem Satze somit folgende Form geben, deren Richtigkeit sich stricte dartun lässt: „Die Gleichung einer Curve, welche einen Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkt hat, und welche überdiess in sich zurückläuft, lässt sich stets auf die Form

$$\alpha x^m + \beta y^m = C$$

bringen.“ In dem hier uns allein interessirenden Falle, wo die vier Zweige in den vier Quadranten einander congruent sind und eine ganz symmetrische Lage zum Centrum haben, wird $\alpha = \beta$; die Gleichung der Curve ist demnach die folgende

$$x^{2m} + y^{2m} = a^{2m}$$

Dass diess in der Tat der Fall sei, geht aus folgender Betrachtung hervor.

Es hat keine Schwierigkeiten, die Gestalt von Flächen anzugeben, welche der Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = 1$$

genügen. Es ergiebt sich sofort, dass bei Flächen dieser Art keine unendlichen Aeste auftreten können, sowie dass keine Unterbrechung der Continuität denkbar ist. Setzen wir noch

$$n = 2p$$

wo p eine beliebige ganze oder gebrochne Zahl sein kann, — wie diess bei unsren beiden Beispielen auch sich so verhält — so können wir für diese Flächen folgenden Satz [19]) gelten lassen: „Die krumme Fläche ist eine geschlossene. Wegen des geraden Factors im Exponenten hat die Fläche in allen 8 Coordinatenräumen dieselbe Gestalt.“

Der Hauber'sche Satz lehrt uns dann Folgendes: Hat eine geschlossne Fläche für sämmtliche Octanten des Systems die Eigenschaft vollständiger Symmetrie, so lässt sie sich durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2p} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2p} + \left(\frac{z}{a}\right)^{2p} = 1$$

oder, was dasselbe ist,

$$x^{2p} + y^{2p} + z^{2p} = a^{2p}$$

darstellen, indem diese Gleichung, für $a = 1$, in

$$x^{2p} + y^{2p} + z^{2p} = 1$$

übergeht. Ist $z = 0$, so ist folgerichtig

$$x^{2p} + y^{2p} = a^{2p}$$

die Gleichung aller auf die bewusste Weise gestalteten Curven.

16) Baltzer, Historische Bemerkungen, Berichte über d. Verh. d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Math.-Phys. Classe, Jahrg. 1865. S. 5.

17) Hankel, Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rectification algebraischer Curven, Leipzig 1864. S. 11.

18) Steiner, Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren, Crelle's Journal, 47. Band. S. 7.

19) Burhenne, Ueber krumme Flächen, welche der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 1$ genügen, Grunert's Archiv, 21. Theil. S. 36.

VII.

Principien der analytischen Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Im Anschluss an den Artikel IX. des vorigen Bandes S. 77. will ich im folgenden die Grundzüge einer Curventheorie entwickeln, durch deren Einfachheit ich die an jener Stelle ausgesprochene Behauptung zu rechtfertigen denke. Vorausgehender Erläuterungen bedarf es nicht; dagegen werde ich mannichfachem Missbrauch und verbreiteten Meinungen gegenüber meine universellen Ansichten in einer Reihe von Thesen darlegen, die zum grössten Teil zwar sofort eingeräumt werden, die man jedoch gemeinhin vorzieht stillschweigend unbeachtet zu lassen. Die übrigen werde ich zu begründen suchen.

1. Analytisch heisst die Geometrie, insbesondere die Curventheorie, sofern sie von der allgemeinsten Auffassung ihrer Aufgabe ausgeht, dieser gemäss ihre Begriffe und Sätze stets zuerst in grösstmöglicher Allgemeinheit entwickelt, und erst nach Erforderniss die speciellere Betrachtung eintreten lässt, im Gegensatz zur synthetischen Geometrie, welche vom Bekannten ausgeht, dessen Gebiet zu erweitern und zu systematisiren sucht.

2. Die Bedeutung des Rechnens in der Geometrie besteht in der Reduction der dreifach ausgedehnten Raumgebilde auf die einfache Dimension der abstracten Grösse. Sein Hauptzweck, hinsichtlich dessen es unersetzlich ist, liegt in der Herausstellung der Identität der Probleme, durch welche es allein möglich ist, den jeweiligen Standpunkt der Theorie, d. i. die Grenze, bis zu welcher die Probleme gelöst sind, zu erkennen. Den Gegensatz zur rechnenden Geo-

[illegible] die sogenannte rein geometrische Schlussfolgerung, [illegible] jene Reduction nicht anwendet.

3. Es ist incorrect, entstellend und unausführbar, den Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie in die Anwendung des Rechnens und der rein geometrischen Schlussfolgerung zu setzen. Incorrect ist es, weil das ausschliessliche Gebundensein an die eine oder andre Schlussform die natürliche Entwickelung beider Zweige kreuzt, entstellend weil factisch beiderlei Schlussformen in beiden Disciplinen mit gegenseitiger Unterstützung vorkommen, [illegible] die Vorzüge der Methoden durch jene vorgreifende Sonderung [illegible] Abbruch erleiden, unausführbar weil bei vorliegender Verbindung beider Schlussformen der Einteilungsgrund keine Anwendung zulässt.

4. Es ist nicht die Bestimmung der Principien der analytischen Geometrie, Universalmethoden zur Lösung aller geometrischen Probleme aufzustellen, vielmehr sollen sie nach Vollziehung der obengenannten Reduction disponible Werkzeuge der Untersuchung liefern. Die Methode bleibt stets Sache der Erfindung und ist erst nach Studium des Datums jeder Aufgabe zu suchen.

5. Die Anwendung der Rechnung macht nicht der Anschauung und Betrachtung ein Ende, sondern begünstigt sie vielmehr, weil in [illegible] das Wesentliche vom Accidentellen unterschieden wahr[illegible], was in der stets individuellen Figur sich nur in den [illegible] lässt.

6. Alle Gesichtspunkte vereinigen sich zu der Entscheidung: [illegible] Geometrie muss mit dem Raume, nicht [illegible] beginnen. — Zunächst liegt es im analytischen [illegible] Ausgangspunkten auszugehen. Dieser naturgemässe Weg [illegible] den Erfolg in der Gestaltung der Doctrin voll[illegible]. Denn erstlich ist der Anfang in den drei [illegible] zu erlernen, weil man bei correcter Methode [illegible] mit einer Dimension operirt, während in [illegible] sich die Vertauschbarkeit der Dimensionen [illegible] der Determinanten verhüllt und wegen [illegible] des Vertauschens nicht zur Anschauung gelangt [illegible] in den Complicationen zweier Dimensionen [illegible]. Zweitens ist die Geometrie der Ebene so gut [illegible] der Geometrie des Raumes, er[illegible] durch ungeeignete Gewöhnung, während [illegible] jedem einzelnen Schritte, mit Leich[illegible] nach Erforderniss stets in Anwendung [illegible] die nötigen Vorkenntnisse für die Geo-

metrie des Raumes nach Betreibung der elementaren Stereometrie reichlich vorhanden und müssten bei Einschaltung der Geometrie der Ebene erst noch einmal ausser Uebung gesetzt werden.

7. Die analytische Geometrie fusst auf die synthetische elementare Geometrie, von der sie einige Grundbegriffe und Sätze aufnimmt und zur Verwendung in die geeignete Form bringt. Dass sie also mit einer Theorie der Ebenen und Geraden ihren Anfang nimmt, hat man nicht als ein Aufsteigen von der linearen Gleichungsform, sondern als vorausgehende Gestaltung der entlehnten Grundbegriffe anzusehen und demgemäss auch die betreffenden Formeln nicht unabhängig von der elementaren Doctrin zu beweisen.

8. Die analytische Curventheorie hat ihre Begriffe nicht aus irgend welcher Gleichungsform, z. B. der algebraischen, herzuleiten, vielmehr müssen umgekehrt die zur Darstellung dienenden Functionen dem allgemeinsten Curvenbegriff entsprechen. Die Theorie der algebraischen Curven ist im Grunde nur eine Theorie der algebraischen Gleichungen mit geometrischer Darstellung und vermag nicht die allgemeinen Eigenschaften der Curven zu bestimmen. Bei Uebergang durch Betrachtung der Linien zweiten Grades und successiver Gradscala zur allgemeinen Theorie werden gewöhnlich unrichtige Vorstellungen erzeugt, die der allgemeinen Auffassung sehr im Wege stehen. Nach correctem Verfahren kann die Theorie der algebraischen Curven als Specialität nur der allgemeinen nachfolgen.

9. Die analytische Curventheorie hat in ihrer Grundlegung jede willkürliche Synthese von sich auszuschliessen und muss im Gegenteil auf grösstmögliche Isolirung der zu behandelnden Elemente gerichtet sein. Es ist demgemäss in einzuführenden Begriffen und Grundtheoremen nur die Natur einer Curve in einem ihrer Punkte in Betracht zu ziehen, mit dieser nur solche andre Raumgebilde zu verbinden, deren Bestimmung aus der Natur der Curve hervorgeht; unentbehrliche Constructionen von willkürlicher Lage hingegen, wie die Coordinatensysteme, sind als interimistische Hülfsgebilde anzusehen und nicht weiter in die Begriffe zu involviren. Jede Einmischung von Synthesen in die Anfänge der Theorie vereitelt den Einblick in ihren einheitlichen Zusammenhang und führt zur Zerspaltung der Doctrin in eine unabsehbare Menge einzelner Theoreme.

§. 1. Curve, Tangente, Normalebene.

Eine Curve ist stets aufzufassen als die Bahn eines bewegten Punktes. Sie kann daher keine gesonderten, sich schneidenden oder berührenden Zweige oder singulären Punkte haben, vielmehr heissen solche Zweige ebensoviele Curven.

Der analytische Ausdruck einer Curve ist die Bestimmung der Coordinaten eines Punkts als Functionen eines Parameters.

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

Diese Functionen sind notwendig reell, eindeutig und stetig, und zwar ist für den Begriff der Stetigkeit die Bedingung massgebend, dass die Gleichungen eine zusammenhängende Curve darstellen, welche der Punkt xyz erzeugt, wenn der Parameter u beständig wachsend alle Werte innerhalb eines Intervalls durchläuft.

Die Tangente im Punkte P an die Curve s heisst die finale Gerade einer durch P und seinen consecutiven Punkt P' gezogenen Geraden, momentane Richtung der Curve im Punkte P die Richtung dieser Tangente.

Die Coordinaten des consecutiven Punkts sind

$$x(u-\partial u), \quad y(u-\partial u), \quad z(u-\partial u)$$

woraus die Richtungscosinus der Sehne $PP' = r$

$$\frac{x(u-\partial u)-x(u)}{r}, \quad \frac{y(u-\partial u)-y(u)}{r}, \quad \frac{z(u-\partial u)-z(u)}{r}$$

Dass diese 3 Ausdrücke Grenzwerte haben müssen, welche alsdann sind

$$\frac{\partial x(u)}{\partial u}\lim\frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial y(u)}{\partial u}\lim\frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial z(u)}{\partial u}\lim\frac{\partial u}{r}$$

dass demnach immer eine Tangente existirt, geht aus folgender Betrachtung hervor. Bewegt sich P' zurück bis P, so ist während der Dauer der Bewegung die Lage von PP' und ihrer Verlängerung stets durch 2 Punkte bestimmt. Aus bestimmter Bewegung kann am Schluss nur eine bestimmte Lage resultiren, also befindet sich die Gerade im Augenblick des Zusammentreffens von P' mit P in einer bestimmten Geraden T. Der Winkel zwischen T und PP' ist unendlich klein, weil PP' bis in T gelangen kann, folglich ist fürs erste T finale Gerade von PP'. Ferner ist jener unendlich kleine Winkel nicht kleiner als die Differenz der Richtungswinkel von T und PP', weil alle drei Winkel Seiten einer dreiseitigen Ecke sind, folglich differiren auch die Cosinus dieser Richtungswinkel unendlich wenig von einander, u. s. w.

Die Länge eines Curvenbogens s von einem beliebigen festen Punkte bis zum laufenden Punkte P würde einer besondern Definition bedürfen. Diese lässt sich jedoch einfacher durch das Axiom ersetzen, dass das unendlich kleine Increment ∂s dividirt durch seine Sehne r den Grenz-

Dass ferner $\frac{\partial s}{\partial u}$ einen, im allgemeinen endlichen Grenzwert hat, können wir annehmen, indem wir einen Parameter verwerfen, welcher dem nicht genügte. Ein möglicher Parameter, s selbst, existirt immer.

Hiernach hat $\frac{\partial u}{r}$ einen Grenzwert $= \frac{\partial u}{\partial s}$, und die Richtungscosinus der Tangente sind nun:

$$f = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad g = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad h = \frac{\partial z}{\partial s} \tag{1}$$

Da deren Quadratsumme $= 1$ ist, so hat man:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 \tag{2}$$

Zugleich ist hiermit bewiesen, dass die Coordinaten des laufenden Punkts einer Curve stets Functionen des Bogens sind, die sich differentiiren lassen. Der Beweis für ihre Differentiabilität bis zu dritter Ordnung wird, sobald die geometrische Darstellung vorliegt, ganz analog geführt, weshalb wir ihn übergehen.

Bezeichnen wir die Coordinaten eines variirenden Punkts auf irgend einer andern Linie oder Fläche ausser der Curve durch ξ, η, ζ, so sind die Gleichungen der Tangente:

$$\frac{\xi - x}{f} = \frac{\eta - y}{g} = \frac{\zeta - z}{h} \tag{3}$$

Durch dieselben Grössen wird auch eine Ebene bestimmt, welche normal zur Tangente durch (xyz) geht. Sie heisst die Normalebene der Curve, und ihre Gleichung ist:

$$f(\xi - x) + g(\eta - y) + h(\zeta - z) = 0 \tag{4}$$

§. 2. Charakterisirung der Curve aus der Bewegung ihrer Normalebene.

Es soll jetzt die Bewegung der Normalebene analytisch dargestellt werden, die sie bei Variation des Parameters oder bei Fortrücken des laufenden Punkts längs der Curve vollführt. Um hierauf die Formeln der Anfangs citirten Schrift „Cinematische Grundlage der Curventheorie“ S. 96. u. f. anzuwenden, haben wir für a, b, c zu setzen f, g, h. Aus diesen erhält man zunächst den Rotationswinkel ν, welcher für die Normalebene mit τ bezeichnet sei, und Krümmungswinkel heisse, und der nach Gl. (53) bestimmt ist durch

$$\partial \tau^2 = \partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2 \tag{5}$$

Diese Grösse τ ist jetzt als Parameter zu betrachten, und die Differentiation nach τ durch Accente zu bezeichnen. Dann sind nach den Gl. (e') (55) f', g', h' die Richtungscosinus einer auf der Normalebene senkrechten Ebene, welche erstere in ihrer Coincidenzlinie, genannt Krümmungsaxe, schneidet. Deren Richtungscosinus l, m, n sind in den Formeln für a_1, b_1, c_1 zu substituiren.

Hiermit sind 3 auf einander senkrechte Richtungen bestimmt. Wir ziehen vom Punkte (xyz) in gleichen Richtungen 3 Geraden. Die erste, normal zur Normalebene, ist die Tangente, die zweite normal zur zweiten Ebene, heisst die Hauptnormale, die dritte, in der Richtung der Krümmungsaxe, die Binormale, alle drei in dieser Reihenfolge die begleitenden Axen der Curve. Ihre Richtungscosinus sind demnach:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Tangente} & f, & g, & h \\ \text{Hauptnormale} & f', & g', & h' \\ \text{Binormale} & l, & m, & n \end{array}\right\} \tag{6}$$

Vermöge ihrer senkrechten Stellung bestehen folgende 22 Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} f^2+g^2+h^2=1 & f'l+g'm+h'n=0 \\ f'^2+g'^2+h'^2=1 & lf+mg+nh=0 \\ l^2+m^2+n^2=1 & ff'+gg'+hh'=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f^2+f'^2+l^2=1 & gh+g'h'+mn=0 \\ g^2+g'^2+m^2=1 & hf+h'f'+nl=0 \\ h^2+h'^2+n^2=1 & fg+f'g'+lm=0 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f}\begin{vmatrix} g' & m \\ h' & n \end{vmatrix} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} h' & n \\ f' & l \end{vmatrix} = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} f' & l \\ g' & m \end{vmatrix} = \\ &\frac{1}{f'}\begin{vmatrix} m & g \\ n & h \end{vmatrix} = \frac{1}{g'}\begin{vmatrix} n & h \\ l & f \end{vmatrix} = \frac{1}{h'}\begin{vmatrix} l & f \\ m & g \end{vmatrix} = \\ &\frac{1}{l}\begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} = \frac{1}{m}\begin{vmatrix} h & h' \\ f & f' \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\begin{vmatrix} f & f' \\ g & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & f' & l \\ g & g' & m \\ h & h' & n \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Normal zu den begleitenden Axen gehen durch (xyz) 3 Ebenen, welche in gleicher Reihenfolge die Namen haben: Normalebene, rectificirende Ebene, Schmiegungsebene, und den gemeinsamen: begleitende Hauptebenen. Die Gleichungen der so bestimmten Geraden und Ebenen sind also:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Hauptnormale} & \frac{\xi-x}{f'}=\frac{\eta-y}{g'}=\frac{\zeta-z}{h'} \\ \text{Binormale} & \frac{\xi-x}{l}=\frac{\eta-y}{m}=\frac{\zeta-z}{n}\end{array}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Rectificirende Ebene} & f'(\xi-x)+g'(\eta-y)+h'(\zeta-z)=0 \\ \text{Schmiegungsebene} & l(\xi-x)\ +m(\eta-y)+n\ (\zeta-z)=0\end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Bewegung der Krümmungsaxe als Coincidenzlinie der Normalebene wird bestimmt durch die Gl. (62) (58) (61), die, wenn ϑ ihren Rotationswinkel, den **Torsionswinkel** der Curve, bezeichnet, lauten:

$$\partial\vartheta=\vartheta'\partial\tau;\quad \vartheta'=\begin{vmatrix} f\ f'\ f'' \\ g\ g'\ g'' \\ h\ h'\ h''\end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\partial l=-f'\partial\vartheta;\quad \partial m=-g'\partial\vartheta;\quad \partial n=-h'\partial\vartheta$$

Hieraus und nach Definition des Rotationswinkels hat man:

$$\partial\vartheta^2=\partial l^2+\partial m^2+\partial n^2 \quad (13)$$

Differentiirt man, um die Lage der Krümmungsaxe vollständig zu erhalten, die Gleichung der Normalebene, so kommt:

$$f'(\xi-x)+g'(\eta-y)+h'(\zeta-z)-\frac{f\partial x+g\partial y+h\partial z}{\partial\tau}=0$$

oder, da nach (1)

$$f\partial x+g\partial y+h\partial z=(f^2+g^2+h^2)\partial s=(f'^2+g'^2+h'^2)\partial s$$

ist:

$$f'(\xi-x-f's')+g'(\eta-y-g's')+h'(\zeta-z-h's')=0$$

Die Gleichung der Normalebene lässt sich schreiben:

$$f(\xi-x-f's')+g'(\eta-y-g's')+h(\zeta-z-h's')=0$$

Beide Ebenen gehen durch denselben Punkt, dessen Coordinaten sind

$$x+s'f',\quad y+s'g',\quad z+s'h'$$

welcher auf der Hauptnormale im Abstand s' vom Punkte (xyz) liegt, und der **Krümmungsmittelpunkt** heisst. Er ist der Mittelpunkt eines die Curve in (xyz) berührenden Kreises, des **Krümmungskreises**, dessen Radius, der **Krümmungsradius**, $=s'$, und dessen Axe die Krümmungsaxe ist. Die Gleichungen der Krümmungsaxe sind demnach

$$\frac{\xi - x - s'f'}{l} = \frac{\eta - y - s'g'}{m} = \frac{\zeta - z - s'h'}{n} \tag{14}$$

Der Rotationswinkel der Hauptnormale und rectificirenden Ebene, den wir Torsionsbogen nennen und mit σ bezeichnen, ist zunächst bestimmt durch

$$\partial\sigma^2 = \partial f'^2 + \partial g'^2 + \partial h'^2 \tag{15}$$

Nun erhält man, indem man die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

differentiirt:

$$ff'\partial\tau + f'\partial f' - lf'\partial\vartheta = 0$$

woraus nach Analogie:

$$\partial f' = l\partial\vartheta - f\partial\tau; \quad \partial g' = m\partial\vartheta - g\partial\tau; \quad \partial h' = n\partial\vartheta - h\partial\tau$$

und nach Einführung der Werte in (15):

$$\partial\sigma^2 = \partial\vartheta^2 + \partial\tau^2 \tag{16}$$

eine Gleichung, die sich auflösen lässt in

$$\partial\vartheta = \partial\sigma \sin\lambda; \quad \partial\tau = \partial\sigma\cos\lambda; \quad \vartheta' = \operatorname{tg}\lambda \tag{17}$$

Die so bestimmte Grösse λ heisst die Krümmungsbreite, ihr Tangens ϑ' das Krümmungsverhältniss der Curve.

Zum Schluss stellen wir um der häufigen Anwendung willen die Differentialformeln für die Richtungscosinus der begleitenden Axen zusammen. Sie sind:

$$\left.\begin{aligned} \partial f &= f'\partial\tau; & \partial l &= -f'\partial\vartheta; & \partial f' &= (l \sin\lambda - f\cos\lambda)\partial\sigma \\ \partial g &= g'\partial\tau; & \partial m &= -g'\partial\vartheta; & \partial g' &= (m\sin\lambda - g\cos\lambda)\partial\sigma \\ \partial h &= h'\partial\tau; & \partial n &= -h'\partial\vartheta; & \partial h' &= (n \sin\lambda - h\cos\lambda)\partial\sigma \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

An diesen Formeln ist zu bemerken, dass jede nur auf eine Coordinatenaxe Bezug hat, also von der Stellung der beiden andern unabhängig ist. Man kann daher die x Axe als willkürliche Gerade ansehen, so dass die y und z Axe nur specielle Lagen derselben sind, und die Formeln der zweiten und dritten Zeile nur dasselbe sagen, wie die der ersten. Da dieser Fall, wo eine einzige Axe zur Bestimmung hinreicht, sich nicht nur wiederholen, sondern in den weiter unten folgenden Operationen mit geringen Ausnahmen durchweg gelten wird, so wollen wir alsdann die überflüssigen Analoga weglassen. Die Anmerkung „x Axe willkürlich" sagt dann aus, dass jede von deren

Lage abhängige Gleichung drei analoge Gleichungen vertritt, die man daraus durch Substitution der Buchstaben (y, g, m) und (z, h, n) für (x, f, l) ableitet.

§. 3. Indicatricen, Torsionslinie, Verdrehung.

Die geometrische Darstellung der Rotationswinkel ist auf S. 94. d. cit. Schr. bereits angegeben. Wir wenden das Verfahren jetzt auf die Rotationswinkel τ, ϑ, σ an. Wir ziehen von einem festen Punkte drei Gerade von der Länge $= 1$ in den Richtungen der Tangente, Binormale und Hauptnormale; dann erzeugen deren Endpunkte bei Variation des Parameters drei Curven, die auf einer um den festen Punkt mit der Linieneinheit als Radius beschriebenen Kugel liegen, und die Indicatricen der Tangente, Binormale, Hauptnormale heissen. Die Coordinaten der drei Endpunkte sind die Grössen (6), wenn man den festen Mittelpunkt als Anfangspunkt betrachtet; die Gl. (5) (13) (15) drücken gemäss Gl. (2) aus, dass die Längen der Indicatricen von drei beliebigen Anfängen an gerechnet bzhw. $= \tau$, ϑ, σ sind.

Mit dieser Construction verbinden wir eine neue. Die drei Geraden unbegrenzt gedacht lassen sich als ein bewegtes System von Coordinatenaxen betrachten. Die Coordinate eines Punktes in der Richtung der Tangente sei $= \vartheta$, in der Richtung der Binormale $= \tau$, in der Richtung der Hauptnormale $= 0$. Der so bestimmte Punkt $(\vartheta\tau)$ erzeugt dann in der der rectificirenden Ebene parallelen Ebene eine Linie, die Torsionslinie, deren Länge nach Gl. (16) $= \sigma$ ist. Nach (17) sind $\sin\lambda$, $\cos\lambda$ die Richtungscosinus ihrer Tangente, mithin ist λ deren Richtungswinkel gegen die τ Axe. Die Gleichung der Torsionslinie

$$f(\vartheta, \tau) = 0$$

nennen wir die specifische Gleichung der Urcurve. Hiermit hängt nun folgendes Theorem zusammen.

Drehen wir das variable Axensystems um einen constanten Winkel $\varDelta$ um seinen Anfang, so dass die Hauptnormale ihre Richtung nicht ändert, so gehen die Richtungscosinus der Tangente und Binormale der Urcurve f, l über in

$$f_1 = f\cos\varDelta + l\sin\varDelta; \quad l_1 = -f\sin\varDelta + l\cos\varDelta \tag{19}$$

woraus durch Differentiation:

$$f_1'\partial\tau_1 = f'\partial\tau\cos\varDelta - f'\partial\vartheta\sin\varDelta$$
$$f_1'\partial\vartheta_1 = f'\partial\tau\sin\varDelta + f'\partial\vartheta\cos\varDelta$$

Dividirt man durch $f_1' = f'$ und integrirt unter Voraussetzung gleichzeitigen Anfangs beider Krümmungs- und Torsionswinkel, so kommt:

$$\vartheta_1 = \vartheta \cos \varDelta + \tau \sin \varDelta; \quad \tau_1 = -\vartheta \sin \varDelta + \tau \cos \varDelta \tag{20}$$

Das aber sind die Coordinaten desselben Punkts ($\vartheta\tau$) der Torsionslinie in Bezug auf die neuen Axen der $\vartheta_1 \tau_1$; folglich ist die Torsionslinie sammt ihrer Lage in der unveränderten Ebene der $\vartheta\tau$ allen Curven gemein, deren Tangentialrichtungen in der genannten Beziehung stehen.

Aus einer Curve eine andere ableiten, deren Hauptnormale in entsprechenden Punkten gleiche Richtung hat, während die beiderseitigen Tangenten eine constante Neigung $\varDelta$ zu einander haben, heisse die Curve um den Winkel $\varDelta$ verdrehen. Der Satz lautet dann:

Die Torsionslinie einer Curve bleibt bei jeder Verdrehung ungeändert.

Für eine ebene Curve ist ϑ constant und lässt sich null setzen. Dann wird nach Verdrehung

$$\vartheta_1 = \tau \sin \varDelta; \quad \tau_1 = \tau \cos \varDelta$$

also

$$\vartheta_1 = \tau_1 \operatorname{tg} \varDelta; \quad \vartheta_1' = \operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \varDelta; \quad \lambda_1 = \varDelta$$

Demnach geht aus einer ebenen Curve durch Verdrehung eine Curve von constanter Krümmungsbreite gleich dem Verdrehungswinkel und linearer specifischer Gleichung, also gerader Torsionslinie hervor. Auf diese Classe von Curven, die wir Curven linearer Torsion nennen, werden wir später zurückkommen.

§. 4. Charakterisirung der Curve aus dem Krümmungskreise.

Eine Curve, welche nur mit einer begrenzten Anzahl von Grössen variiren kann, osculirt eine beliebige Curve in einem Punkte, wenn über alle diese Grössen derart verfügt ist, dass sie sich in diesem, beiden gemeinsamen Punkte so nahe als möglich der beliebigen Curve anschliesst. Hierzu wird erfordert, dass die Differentialquotienten der Coordinaten von niedrigster bis zu höchst möglicher Ordnung, nach beiden Curven genommen in jenem Punkte gleiche Werte haben. Ist die höchste Ordnung für alle drei Coordinaten die $n$te, so haben die Curven eine Berührung $n$ter Ordnung.

Der Krümmungskreis ist ein osculirender Kreis, welcher eine Curve in zweiter Ordnung berürt. Dieser soll jetzt ohne Bezugnahme

auf seine frühere Definition bestimmt werden. Als ein Kreis überhaupt hat er die Gleichungen:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\varrho^2$$

Die erste drückt aus, dass er in einer Ebene liegt, die durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ geht und die Richtungscosinus l, m, n hat; die zweite, dass sein Abstand von diesem Punkte constant $=\varrho$ ist. Betrachten wir seinen laufenden Punkt (xyz) zugleich als den der Curve s, so ist die Bedingung einer Berürung zweiter Ordnung, dass beide Gleichungen nach zweimaliger Differentiation noch für Kreis und Curve gemeinschaftlich gelten. Man erhält dann:

$$lf+mg+nh=0$$
$$(x-x_0)f+(y-y_0)g+(z-z_0)h=0$$
$$lf'+mg'+nh'=0$$
$$(x-x_0)f'+(y-y_0)g'+(z-z_0)h'+s'=0$$

Da durch diese 6 Gleichungen und die Relation

$$l^2+m^2+n^2=1$$

die 7 disponiblen Grössen l, m, n, x_0, y_0, z_0, ϱ bestimmt werden, so osculirt der Kreis. Zur Auflösung setze man die Richtungscosinus des nach dem Berührungspunkt (xyz) gehenden Radius

$$\frac{x_0-x}{\varrho}=a; \quad \frac{y_0-y}{\varrho}=b; \quad \frac{z_0-z}{\varrho}=c \tag{21}$$

ann gehen die erste, 4te und 6te Gleichung über in

$$al+bm+cn=0$$
$$af+bg+ch=0$$
$$af'+bg'+ch'=\frac{s'}{\varrho} \tag{22}$$

Hiernach steht der Radius normal zur Tangente und liegt in der Kreisebene; dasselbe gilt nach der 5ten Gleichung auch von der Hauptnormale; folglich fallen beide in eine Gerade zusammen, und man hat:

$$a=\pm f'; \quad b=\pm g'; \quad c=\pm h'$$

Gl. (22) giebt dann $\frac{s'}{\varrho}=\pm 1$. Es ist passend anzunehmen, obwol Sache der Willkür, dass τ beständig mit s wächst. Dann sind s' und ϱ positiv, also das obere Zeichen gültig. Die Lösung ist jetzt fol-

gende. Die Kreisebene ist Schmiegungsebene, der Radius $\varrho = s'$, und die Coordinaten des Mittelpunkts nach (21)

$$x_0 = x + s'f'; \quad y_0 = y + s'g'; \quad z_0 = z + s'h' \tag{23}$$

übereinstimmend mit den Bestimmungen in §. 2.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe führt zur Entwickelung einiger unter den Bestimmungsstücken einer Curve, die in §. 2. sich auf anderm Wege vollständiger ergaben. Der Umstand, dass man lange Zeit die Bestimmungsstücke höherer Ordnung nur vermittelt durch den Krümmungskreis ableitete, eine Methode die eben nur für ebene Curven genügt, ist gewiss ein Haupthinderniss gewesen, welches dem Einblick in die Natur der Curven und der allgemeinen Auffassung der Aufgabe ihrer Theorie entgegenstand. Auch jetzt noch wird es einen unbehaglichen Eindruck machen, dass die Namen der Bestimmungsstücke in §. 2. ganz unmotivirt auftreten. Die Schuld liegt jedoch nicht an dem Verfahren, sondern an der eingebürgerten Benennung, die wir nicht ohne grossen Nachteil abändern können. Mögen die Namen der alten Methode entlehnt bleiben; ihre Grundbedeutung, nach der sie zu definiren sind, muss auf einem allseitig umfassenden Wege gewonnen werden, wie ihn die Bewegung der Normalebene darbietet.

In neuerer Zeit hat man mit Beibehaltung des Princips der Osculation die Einseitigkeit gehoben, welche dem Krümmungskreis eigen ist. Die sich so ergebende Construction soll hiernächst dargelegt werden.

§. 5. Osculirende Spirale.

Der Krümmungskreis lässt sich auffassen als diejenige berührende Curve, welche die momentane Krümmung der gegebenen Curve constant und ihr begleitendes Axensystem momentan besitzt, während die Torsion null ist. Wollen wir nun die Torsion in gleicher Weise wie die Krümmung berücksichtigen, so ist die Aufgabe: eine berührende Curve zu construiren, welcher die im Berührungspunkt stattfindende Krümmung und Torsion der gegebenen Curve constant zu eigen sind, und die im begleitenden Axensystem momentan übereinstimmt.

Die Bestimmungsgrössen der gesuchten Curve seien durch gleiche Buchstaben mit dem Index 0, die momentanen Werte bezüglich auf die gegebene Curve ohne Index bezeichnet. Für erstere sind als constant gegeben $\frac{\partial \tau}{\partial s}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$, also

$$s_0' = s', \quad \vartheta_0' = \vartheta', \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \sigma_0' = \sigma'$$

alle übrigen, variabeln Grössen müssen im Berührungspunkt in die gegebenen Werte ohne Index übergehen. Nun hat man nach (18):

$$f_0'' = l_0 \operatorname{tg} \lambda - f_0; \quad f'' = l \operatorname{tg} \lambda - f$$

Dies nochmals differentiirt giebt:

$$f_0''' = -f_0' \sigma'^2$$

integrirt:

$$f_0'' + f_0 \sigma'^2 = \text{const.} = f'' + f \sigma'^2 = f \operatorname{tg}^2 \lambda + l \operatorname{tg} \lambda$$

oder nach Division durch σ'^2:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma_0^2} + f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda$$

Hiervon ist das vollständige Integral:

$$f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda + A \cos \sigma_0 + B \sin \sigma_0 \tag{24}$$

woraus durch Differentiation:

$$f_0' \cos \lambda = -A \sin \sigma_0 + B \cos \sigma_0$$

und in Anwendung auf den Berührungspunkt:

$$\begin{aligned} (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda &= \quad A \cos \sigma + B \sin \sigma \\ f' \cos \lambda &= -A \sin \sigma + B \cos \sigma \end{aligned}$$

Eliminirt man A, B, so wird Gl. (24):

$$\begin{aligned} f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda \cos (\sigma_0 - \sigma) \\ + f' \cos \lambda \sin (\sigma_0 - \sigma) \end{aligned}$$

Multiplicirt man mit

$$\partial s_0 = s' \partial \tau_0 = s' \cos \lambda \partial \sigma_0$$

integrirt, und bestimmt die Constante der Integration nach dem Functionswerte im Berührungspunkt, so kommt:

$$\begin{aligned} x_0 - x = s' \cos \lambda \, \{ & (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda (\sigma_0 - \sigma) \\ & + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda \sin (\sigma_0 - \sigma) \\ & + f' \cos \lambda [1 - \cos (\sigma_0 - \sigma)] \} \end{aligned} \tag{25}$$

Diese für willkürliche x Axe geltende Gieichung bestimmt die gesuchte Curve im Parameter σ_0. Geht man zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$ über, verbunden mit dem ursprünglichen durch die Relation

$$z_0 = z + s' f' \cos^2\lambda + x_1 (f \sin\lambda + l \cos\lambda) + y_1 (f \cos\lambda - l \sin\lambda) + z_1 f'$$

gültig für willkürliche z Axe, so lauten die Gleichungen:

$$x_1 = s' \sin\lambda \cos\lambda (\sigma_0 - \sigma)$$
$$y_1 = s' \cos^2\lambda \sin(\sigma_0 - \sigma)$$
$$z_1 = -s' \cos^2\lambda \cos(\sigma_0 - \sigma)$$

Hiernach liegt die Curve auf einer geraden Cylinderfläche

$$y_1^2 + z_1^2 = (s' \cos^2\lambda)^2$$

deren Axe, die x_1 Axe, in ursprünglichen Coordinaten die Gleichungen hat:

$$\frac{\xi - x - s' f' \cos^2\lambda}{f \sin\lambda + l \cos\lambda} = \frac{\eta - y - s' g' \cos^2\lambda}{g \sin\lambda + m \cos\lambda} = \frac{\zeta - z - s' h' \cos^2\lambda}{h \sin\lambda + n \cos\lambda} \quad (26)$$

und deren Radius $= s' \cos^2\lambda$ ist. Während sie sich mit der Winkelgeschwindigkeit gleich der Variation von σ_0 um den Cylinder windet, rückt sie proportional $\sigma_0 - \sigma$ in der Richtung von dessen Axe fort. Das Verhältniss der Tangential- und Axialbewegung ist $1 : \mathrm{tg}\,\lambda$.

Die gefundene Curve heisst die **osculirende Spirale**. Nennen wir hiernach den Cylinder, auf dem sie liegt, dessen Axe und Basis, deren Radius und Ebene **Spiralencylinder, Spiralenaxe, Spiralenbasis, Spiralenradius, Spiralenbasisebene.**

Die Spiralenaxe ist hiernach der rectificirenden Ebene parallel, von der sie um $s' \cos^2\lambda$ absteht, und macht mit der Binormale nach der Tangente hin den Winkel λ.

§. 6. Schema der Berechnung der Bestimmungsstücke einer Curve aus ihren Coordinatengleichungen.

Sind die Coordinaten des laufenden Punkts der Curve als Functionen eines Parameters gegeben, so erhält man auf folgendem Wege successive alle übrigen Bestimmungsstücke, und zwar mit jedem Schritte eins.

1. Gegeben sind

$$x, \quad y, \quad z$$

Durch Differentiation erhält man die Werte von

$$\partial x, \quad \partial y, \quad \partial z$$

hieraus das Bogenelement:

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$$

und nach Division die Richtungscosinus der Tangente:

$$f = \frac{\partial x}{\partial s}; \quad g = \frac{\partial y}{\partial s}; \quad h = \frac{\partial z}{\partial s}$$

2. Die 3 Operationen wiederholen sich. Durch Differentiation der letzten Resultate erhält man:

$$\partial f, \ \partial g, \ \partial h$$

hieraus den Contingenzwinkel der Normalebene:

$$\partial \tau = \sqrt{\partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2}$$

und nach Division die Richtungscosinus der Hauptnormale:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \tau}; \quad g' = \frac{\partial g}{\partial \tau}; \quad h' = \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

3. Man bilde aus den Resultaten von 1. und 2. die Determinanten

$$l = \begin{vmatrix} g\,g' \\ h\,h' \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} h\,h' \\ f\,f' \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} f\,f' \\ g\,g' \end{vmatrix}$$

zur Darstellung der Richtungscosinus der Binormale, und dividire das Differential eines derselben durch die homologe Grösse aus der vorigen Reihe; dann erhält man den Contingenzwinkel der Schmiegungsebene:

$$\partial \vartheta = -\frac{\partial l}{f'} = -\frac{\partial m}{g'} = -\frac{\partial n}{h'}$$

Falls ein Divisor null ist, bleibt mindestens einer der Ausdrücke gültig.

4. Man berechne successive das Krümmungsverhältniss, die Krümmungsbreite und den Contingenzwinkel der rectificirenden Ebenen nach den Formeln:

$$\vartheta' = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}; \quad \lambda = \operatorname{arctg} \vartheta'; \quad \partial \sigma = \frac{\partial \tau}{\cos \lambda} = \frac{\partial \vartheta}{\sin \lambda}$$

5. Durch Integration findet man aus ∂s, $\partial \tau$, $\partial \vartheta$, $\partial \sigma$ den Bogen s, den Krümmungswinkel τ, den Torsionswinkel ϑ und den Torsionsbogen σ.

6. Zu notiren sind noch die Quotienten:

$$\text{Krümmung} = \frac{\partial \tau}{\partial s}; \quad \text{Krümmungsradius} = \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

$$\text{Torsion} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}; \quad \text{Torsionsradius} = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$$

$$\text{Totalkrümmung} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

Stellen sich f, g, h als Brüche mit gemeinsamem irrationalen Nenner

$$f=\frac{a}{r};\quad g=\frac{b}{r};\quad h=\frac{c}{r}$$

dar, so kann man deren Differentiation auf folgendem Wege ganz umgehen. Man hat:

$$a'=fr'+f'r;\ \text{etc.}$$
$$a''=fr''+2f'r'+f''r;\ \text{etc.}$$

daher:

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} r^2 = lr^2;\ \text{etc.} \tag{27}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} r^3 = \vartheta' r^3 \tag{28}$$

Die ersten 3 analogen Gleichungen (27) geben:

$$\begin{vmatrix} b & \partial b \\ c & \partial c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & \partial c \\ a & \partial a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & \partial a \\ b & \partial b \end{vmatrix}^2 = r^4 \partial\tau^2$$

Dividirt man sie durch den so gefundenen Wert von $r^2\partial\tau$, so erhält man l, m, n, und hieraus:

$$f' = \begin{vmatrix} m & g \\ n & h \end{vmatrix};\ \text{etc.}$$

Jetzt stellen sich wieder a', b', c' in der Form dar:

$$a'=\frac{\alpha}{\varrho};\quad b'=\frac{\beta}{\varrho};\quad c'=\frac{\gamma}{\varrho}$$

wo ϱ im allgemeinen irrational ist. Nach gleicher Methode verwandelt sich die Formel (28) in

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \partial\alpha \\ b & \beta & \partial\beta \\ c & \gamma & \partial\gamma \end{vmatrix} = \varrho^2 \partial\vartheta$$

Sin dx, y, z nicht explicite in einem Parameter darstellbar, sondern nur $k+2$ Gleichungen zwischen x, y, z und k andern Variabeln gegeben, so hat man nach erster Differentiation alle $k+3$ Differentiale durch eins darzustellen, und nach jeder neuen Differentiation diese Werte dafür einzusetzen. Die Resultate enthalten dann alle primitiven Variabeln als Elemente und sind mit den gegebenen Curvengleichungen zu verbir

§. 7. Dimensionen und innere Beziehungen der Curve. Einteilung der Bestimmungsstücke.

An der vorstehenden Rechnungsfolge lässt sich folgende für die ganze Curventheorie entscheidende Bemerkung machen, welche noch in keiner Schrift Beachtung gefunden hat:

Durch die Operationen 1. ist das Bogenelement vollständig eliminirt, und in keinem Resultate der Operationen 2. bis 5. mehr enthalten.

Hieraus ist der Schluss zu ziehen:

Hat man ein beliebiges System dieser Resultate den Relationen 2. bis 5. gemäss aufgestellt, so lässt sich dasselbe noch mit einer beliebigen Function s des Parameters verbinden, und daraus eine Curve herstellen.

In der Tat fällt dies sofort in die Augen bei Betrachtung der Gleichungen

$$\partial x = f \partial s; \quad \partial y = g \partial s; \quad \partial z = h \partial s$$

Geometrisch ausgedrückt lautet die Bemerkung und ist nicht weniger unmittelbar einleuchtend: Von jedem Punkte der Curve kann man in tangentialer Richtung eine willkürliche unendlich kleine Strecke bis zum consecutiven Punkt abschneiden, ohne dass dadurch die innern Beziehungen des begleitenden Axensystems einschliesslich der Grössen τ, ϑ, σ, λ, welche wir zusammenfassend die innern Beziehungen der Curve nennen wollen, beeinflusst werden. Da diese Strecken ∂s die detaillirten Dimensionen der Curve bezeichnen, so können wir den Satz kurz so ausdrücken:

Die innern Beziehungen einer Curve sind unabhängig von ihren detaillirten Dimensionen.

Nun wird eine Curve (nach Elimination des Parameters) bestimmt durch 2 Functionen. Nimmt man also s zu der einen Function, so bleibt nur eine Function zur Bestimmung der innern Beziehungen übrig. Alle in letztern enthaltenen Functionen sind demnach bestimmt, sobald eine Gleichung zwischen zwei derselben gegeben ist, vorbehaltlich willkürlicher Constanten, die durch Integration hinzukommen. Die Bedeutung der Elimination des Bogenelements drückt folgender Satz aus:

Die Curventheorie lässt sich zerlegen in eine Theorie der innern Beziehungen und eine Theorie der Dimensionen, deren erstere sich ohne Rücksicht auf letztere entwickelt und vollendet.

7. Gegeben f' in τ. Man findet durch Integration f, aus beiden l.

8. Gegeben f' in ϑ. Man findet durch Integration l, aus beiden f.

9. Gegeben f' in σ. Man findet successive:

$$l\sin\lambda - f\cos\lambda = \frac{\partial f'}{\partial\sigma}$$

$$l\cos\lambda + f\sin\lambda = \sqrt{1 - f'^2 - \left(\frac{\partial f'}{\partial\sigma}\right)^2}$$

$$\lambda = \int\frac{\partial(l\cos\lambda + f\sin\lambda)}{l\sin\lambda - f\cos\lambda}$$

und f, l aus den zwei vorigen Gleichungen.

10. Gegeben f in λ. Man hat

$$l = -\int \operatorname{tg}\lambda\,\partial f$$

aus beiden ergiebt sich f'.

11. Gegeben l in λ. Man hat

$$f = -\int \cot\lambda\,\partial l$$

aus beiden ergiebt sich f'.

12. Gegeben $f\sin\lambda + l\cos\lambda$, $l\sin\lambda - f\cos\lambda$ und f', welche Grössen die Quadratsumme $= 1$ haben, in einem Parameter. Man findet:

$$\lambda = -\int\frac{\partial(f\sin\lambda + l\cos\lambda)}{l\sin\lambda - f\cos\lambda}$$

somit f und l einzeln.

13. Gegeben $f\sin\lambda + l\cos\lambda$ in λ. Man findet:

$$f\cos\lambda - l\sin\lambda = \frac{\partial(f\sin\lambda + l\cos\lambda)}{\partial\lambda}$$

aus beiden f und l einzeln, dann f'.

14. Gegeben $l\sin\lambda - f\cos\lambda$ in λ. Man findet:

$$f\sin\lambda + l\cos\lambda = -\int(l\sin\lambda - f\cos\lambda)\,\partial\lambda$$

aus beiden f und l.

15. Gegeben $l\sin\lambda - f\cos\lambda$ in σ. Man findet:

$$f' = \int(l\sin\lambda - f\cos\lambda)\,\partial\sigma$$

$$f\sin\lambda + l\cos\lambda = \sqrt{1 - f'^2 - (l\sin\lambda - f\cos\lambda)^2}$$

das sind die Data der Aufgabe 12.

II. Reduction andrer Aufgaben auf Differentialgleichungen.

Gegeben sei l in τ. Sei

$$l = \sin\alpha;\quad \frac{\partial\alpha}{\partial\vartheta} = \cos 2\mu;\quad \cos\alpha = e^{-\beta}$$

dann wird

$$\begin{aligned}
&\partial l = -f'\partial\vartheta = \cos\alpha\,\partial\alpha = \cos\alpha\cos 2\mu\,\partial\vartheta\\
&f' = -\cos\alpha\cos 2\mu\\
&1-l^2 = \cos^2\alpha = f^2+f'^2,\quad \text{also}\\
&f = \cos\alpha\sin 2\mu
\end{aligned}$$

Dies differentiirt giebt:

$$\begin{aligned}
&-\cos\alpha\cos 2\mu = -\alpha'\sin\alpha\sin 2\mu + 2\mu'\cos\alpha\cos 2\mu,\quad \text{oder:}\\
&2\partial\mu + \partial\tau = \partial\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\mu,\quad \text{oder:} \qquad (29)\\
&2\partial\,\mathrm{tg}\,\mu + \partial\tau(1+\mathrm{tg}^2\mu) = 2\partial\beta\,\mathrm{tg}\,\mu
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\mathrm{tg}\,\mu = \mathrm{tg}\,\mu_0 + \frac{2v}{c+w}$$

wo μ_0 ein Specialwert von μ, und c Integrationsconstante ist, so wird die Gleichung unabhängig von c erfüllt, wenn

$$\frac{\partial v}{v} + \partial\tau\,\mathrm{tg}\,\mu_0 = \partial\beta;\quad \partial w = v\partial\tau$$

Hiernach ist

$$v = \frac{1}{\cos\alpha}e^{-\int\partial\tau\,\mathrm{tg}\,\mu_0};\quad w = \int\frac{\partial\tau}{\cos\alpha}e^{-\int\partial\tau\,\mathrm{tg}\,\mu_0}$$

mithin die allgemeine Lösung darstellbar durch eine beliebige besondere.

17. Gegeben f in ϑ. Sei

$$f = \sin\gamma;\quad \gamma' = \cos 2\nu;\quad \cos\gamma = e^{-\delta}$$

dann wird

$$\begin{aligned}
\partial f = f'\partial\tau &= \cos\gamma\,\partial\gamma = \cos\gamma\cos 2\nu\,\partial\tau\\
f' &= \cos\gamma\cos 2\nu;\quad l = \cos\gamma\sin 2\nu
\end{aligned}$$

woraus:

$$\frac{\partial l}{\partial\vartheta} = -f' = -\cos\gamma\cos 2\nu = -\frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta}\sin\gamma\sin 2\nu + 2\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\cos\gamma\cos 2\nu$$

also

$$2\partial\nu + \partial\vartheta = \partial\gamma \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg} 2\nu$$

eine Gleichung von der Form (29) in der vorigen Aufgabe. Man braucht daher nur im Resultat γ, δ, ϑ, ν für α, β, τ, μ zu setzen.

18. Gegeben f' in λ. Sei

$$f' = \sin\varepsilon;\quad f\cos\lambda - l\sin\lambda = \cos\varepsilon\cos 2\varkappa$$
$$f\sin\lambda + l\cos\lambda = -\cos\varepsilon\sin 2\varkappa$$

Differentiirt man die letzte Gleichung, so kommt:

$$\cos\varepsilon\cos 2\varkappa\,\partial\lambda = \sin\varepsilon\sin 2\varkappa\,\partial\varepsilon - 2\cos\varepsilon\cos 2\varkappa\,\partial\varkappa \quad \text{oder}$$
$$2\partial\varkappa + \partial\lambda = \partial\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg} 2\varkappa$$

wieder von der Form (29).

19. Gegeben sei ϑ in τ. Man zerlege die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

durch Einführung des imaginären Winkels μ in

$$\left.\begin{aligned} f\cos\mu + f'\sin\mu &= 1 \\ f\sin\mu - f'\cos\mu &= il \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Differentiirt man beide Gleichungen, so kommt:

$$f'(\partial\tau + \partial\mu)\cos\mu + \{l\partial\vartheta - f(\partial\tau + \partial\mu)\}\sin\mu = 0$$
$$f'(\partial\tau + \partial\mu)\sin\mu - \{l\partial\vartheta - f(\partial\tau + \partial\mu)\}\cos\mu = -if'\partial\vartheta$$

woraus:

$$\partial\tau + \partial\mu = -i\partial\vartheta\sin\mu$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r}$$

so geht die Gleichung über in

$$r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4} r = 0$$

Diese Gleichung hat die Eigenschaft, dass sie durch Substitution

$$r' = q_1 e^{-i\vartheta}$$

in die conjugirte übergeht. Ist also q der conjugirte Wert zu q_1, so ist q zweite Speciallösung, und

$$Aq + Br \tag{31}$$

das vollständige Integral. Damit dasselbe auch den Gl. (30) genügt, muss sein

$$qq_1 + 4q'q_1' = 2$$

Alsdann hat man für eine beliebige x Axe:

$$f = 1 - qq_1;\quad f' = -q'q_1 - qq_1';\quad l = i(q'q_1 - qq_1')$$

Es bleibt über die complexen Werte von A, B der Art zu verfügen, dass diese Ausdrücke nach Substitution von (31) für q drei rechtwinkligen Axen entsprechen. Setzt man

$$q = (m + im_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta};\quad q' = \tfrac{1}{2}(n - in_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}$$

wo m, m_1, n, n_1 reell sind, und ihr gemeinsamer, bis dahin willkürlicher Factor durch die Gleichung

$$m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2 = 2$$

zu bestimmen ist, so findet man:

$$\begin{array}{lll} f = 1 - m^2 - m_1^2; & g = mn + m_1 n_1; & h = mn_1 - m_1 n \\ f' = m_1 n_1 - mn; & g' = 1 - m^2 - n_1^2; & h' = mm_1 + nn_1 \\ l = mn_1 + m_1 n; & \bar{m} = mm_1 - nn_1; & \bar{n} = 1 - m_1^2 - n_1^2 \end{array}$$

Die ausführliche Behandlung dieser Aufgabe habe ich 1863 in Crelle J. Bd. 63. p. 122. gegeben, deshalb hier nur den Weg der Rechnnng und die Resultate aufgeführt.

Sollen die Dimensionen einer Curve und durch sie deren Coordinatengleichungen gefunden werden, so müssen entweder zwei Relationen zwischen x, y, z, s gegeben sein, oder eine solche zu den gegebenen innern Beziehungen hinzukommen. Im letztern Falle differentiire man die Relation 3 mal, setze für die Differentiale der Coordinaten ihre Werte (1), und eliminire die primitiven x, y, z. Dann bleibt eine Differentialgleichung für s allein, durch deren Lösungen x, y, z bereits dargestellt sind. Enthält die Relation nur s, so sind x, y, z nach (1) zu finden. Im erstern Falle eliminire man s und ∂s; dann behält man nach 3 Differentiationen 4 Gleichungen zwischen x, y, z, und nach deren Elimination die innere Relation, wodurch die Aufgabe auf den zweiten Fall zurückgeführt ist. In vielen Fällen wird sich der Weg sehr kürzen, was alsdann meist leicht zu bemerken ist.

§. 9. Einteilung der Curven.

Es kann kein Zweifel bestehen, dass die oberste Einteilung der Curven sich nach der Relation zwischen den dimensionslosen Inva-

rianten richten muss; jedes andere Merkmal bringt eine Complication mit sich: die Covarianten verbinden die Lage mit der Beschaffenheit, die Zuziehung der Dimensionen verlangt doppelte Bestimmung. Da die Grössen τ, ϑ, σ, λ leicht aus je zweien unter ihnen hervorgehen, so genügt es, die Relation zwischen τ und ϑ, d. i. die specifische Gleichung, als Merkmal der Einteilung aufzustellen.

Hiernach bilden die erste oder einfachste Classe die Curven linearer Torsion, für welche

$$\frac{\vartheta}{\tau} = \text{const.}$$

Diese Constante ist dann $= \operatorname{tg}\lambda$, so dass wir die specifische Gleichung schreiben können:

$$\vartheta \cos\lambda = \tau \sin\lambda \quad ((\lambda = \text{const.}) \tag{32}$$

und, indem wir das beiden proportionale σ hinzunehmen:

$$\sigma = \frac{\vartheta}{\sin\lambda} = \frac{\tau}{\cos\lambda}$$

Hieraus ist es leicht, die Stellung des begleitenden Axensystems zu finden; denn man hat:

$$\frac{\partial f'}{\partial \sigma} = l \sin\lambda - f \cos\lambda; \quad \frac{\partial^2 f'}{\partial \sigma^2} = -f' \quad .$$

Die letzte Gleichung hat die drei Speciallösungen

$$f' = 0; \quad g' = -\sin\sigma; \quad h' = \cos\sigma$$

deren Quadratsumme $= 1$ ist. Dies differentiirt giebt nach (18):

$$l \sin\lambda - f \cos\lambda = 0; \quad m \sin\lambda - g \cos\lambda = -\cos\sigma$$
$$n \sin\lambda - h \cos\lambda = -\sin\sigma$$

woraus nach Determinantenbildung:

$$f \sin\lambda + l \cos\lambda = \begin{vmatrix} g' & m \sin\lambda - g \cos\lambda \\ h' & n \sin\lambda - h \cos\lambda \end{vmatrix} = 1$$

$$g \sin\lambda + m \cos\lambda = \begin{vmatrix} h' & n \sin\lambda - h \cos\lambda \\ f' & l \sin\lambda - f \cos\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$h \sin\lambda + n \cos\lambda = \begin{vmatrix} f' & l \sin\lambda - f \cos\lambda \\ g' & m \sin\lambda - g \cos\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diese 6 Gleichungen bestimmen parweise die gesuchten Grössen, deren Werte hiernach sind:

$$\left.\begin{array}{lll} f\ = \sin\lambda; & g\ = \cos\lambda\cos\sigma; & h\ = \cos\lambda\sin\sigma \\ f' = 0; & g' = -\sin\sigma; & h' = \cos\sigma \\ l\ = \cos\lambda; & m = -\sin\lambda\cos\sigma; & n = -\sin\lambda\sin\sigma \end{array}\right\} \quad (33)$$

Um die Curve, welche hiermit in einer besondern Stellung zum Coordinatenaxensystem dargestellt ist, in eine beliebige Stellung zu übertragen, braucht man nur die Axenstellung beliebig zu verändern; dann gehen zugleich die Speciallösungen der Differentialgleichung in das vollständige Integral über.

In der vorliegenden besondern Stellung erkennt man die bemerkenswerte Eigenschaft der Curven linearen Torsion, dass ihre Hauptnormale beständig auf einer festen Geraden (hier der x Axe) senkrecht steht, mit der die Tangente und Binormale constante Winkel bilden.

Diese Eigenschaft besitzt die Classe ausschliesslich. Denn, gilt eine der 3 Gleichungen

$$f' = 0; \quad f = \text{const.}; \quad l = \text{const.}$$

so folgen nach (18) die beiden andern, und nach Aufg. 4. wird dann φ proportional τ, und analog proportional ϑ. Demnach beweist jede der 3 Gleichungen die Linearität der specifischen Gleichung.

Dass jede Curve linearer Torsion durch Verdrehung um λ in eine ebene Curve übergeht, ist in §. 3. bereits bemerkt. Hiernach bilden alle ebenen Curven einen besondern Fall der in Rede stehenden Curvenclasse.

Die Coordinatengleichungen einer Curve linearer Torsion sind

$$x = s\sin\lambda; \quad y = \cos\lambda\int\cos\sigma\,\partial s; \quad z = \cos\lambda\int\sin\sigma\,\partial s$$

wo s beliebige Function von σ ist. Es ist leicht diese so zu wählen, dass nach Elimination von σ zwei algebraische Gleichungen zwischen x, y, z bleiben, z. B. indem man $s = \cos(k\sigma + c)$ setzt, wo k eine Rationalzahl und nicht $= 1$ ist. Nimmt man s proportional σ, so ist die Curve eine Schraubenlinie, wie die osculirende Spirale.

Aehnliche Eigenschaften hat die Curvenclasse cyklischer Torsion, deren Torsionslinie ein Kreis

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2\alpha \tag{34}$$

ist. Ein Bogen dieses Kreises ist dann

$$\sigma = \lambda\cot\alpha \tag{35}$$

und die Coordinaten des laufenden Punkts sind

$$\tau = \cot\alpha \sin\lambda; \quad \vartheta = -\cot\alpha\cos\lambda \tag{36}$$

Durch dreimalige Differentiation nach (18) mit Beachtung von (35) erhält man:

$$\frac{\partial f'}{\partial\sigma} = l\sin\lambda - f\cos\lambda$$

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial\sigma^2} = (l\cos\lambda + f\sin\lambda)\operatorname{tg}\alpha - f'$$

$$\frac{\partial^3 f'}{\partial\sigma^3} = -\frac{\partial f'}{\partial\sigma}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Letzteres integrirt giebt mit Anwendung des Vorhergehenden:

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial\sigma^2} + \frac{f'}{\cos^2\alpha} = c\operatorname{tg}\alpha = (l\cos\lambda + f\sin\lambda + f'\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha$$

oder, wenn

$$a = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \text{also} \quad \frac{\sigma}{\cos\alpha} = a\lambda \tag{37}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 f'}{a^2\partial\lambda^2} + f' = c\sin\alpha\cos\alpha \tag{38}$$

$$l\cos\lambda + f\sin\lambda + f'\operatorname{tg}\alpha = c, \quad \text{und analog}$$

$$\left.\begin{aligned} m\cos\lambda + g\sin\lambda + g'\operatorname{tg}\alpha &= c_1 \\ n\cos\lambda + h\sin\lambda + h'\operatorname{tg}\alpha &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= cl + c_1 m + c_2 n \\ \sin\lambda &= cf + c_1 g + c_2 h \\ \operatorname{tg}\alpha &= cf' + c_1 g' + c_2 h' \; \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{40}$$

Wählt man die Gerade, deren Richtungscosinus sich verhalten wie $c : c_1 : c_2$, zur x Axe, so werden c_1 und c_2 null, und c nimmt, damit die Gl. (38) (40) vereinbar seien, den Wert $\frac{1}{\cos\alpha}$ an. Dann hat man zunächst:

$$f = \cos\alpha\sin\lambda; \quad f' = \sin\alpha; \quad l = \cos\alpha\cos\lambda$$

und Gl. (38) lautet für die y und z Axe:

$$\frac{\partial^2 g'}{a^2\partial\lambda^2} + g' = 0; \quad \frac{\partial^2 h'}{a^2\partial\lambda^2} + h' = 0$$

Sie wird erfüllt durch

$$g' = -\cos\alpha\sin a\lambda; \quad h' = \cos\alpha\cos a\lambda$$

Dies in (39) eingeführt giebt:

$$m\cos\lambda + g\sin\lambda = \sin\alpha\sin a\lambda$$
$$n\cos\lambda + h\sin\lambda = -\sin\alpha\cos a\lambda$$

woraus nach Differentiation:

$$-m\sin\lambda + g\cos\lambda = \cos a\lambda$$
$$-n\sin\lambda + h\cos\lambda = \sin a\lambda$$

Hiermit sind die 4 noch übrigen Grössen bestimmt, und man hat:

$$\left.\begin{array}{lll} f = \cos\alpha\sin\lambda; & g = \cos\lambda\cos a\lambda + \sin\alpha\sin\lambda\sin a\lambda & \\ & h = \cos\lambda\sin a\lambda - \sin\alpha\sin\lambda\cos a\lambda & \\ f' = \sin\alpha; & g' = -\cos\alpha\sin\lambda; \quad h' = \cos\alpha\cos a\lambda & \\ l = \cos\alpha\cos\lambda; & m = -\sin\lambda\cos a\lambda + \sin\alpha\cos\lambda\sin a\lambda & \\ & n = -\sin\lambda\sin a\lambda - \sin\alpha\cos\lambda\cos a\lambda & \end{array}\right\} \quad (41)$$

Das sichtliche Merkmal der Curven cyklischer Torsion ist, dass die Hauptnormale einen constanten schiefen Winkel mit einer festen Geraden (hier der x Axe) macht. Geht dieser Winkel in einen Rechten über, so wird der Radius der Torsionslinie (34) $= \infty$, diese also eine Gerade, die Curve vertauscht ihre Classe.

Auch dieses Merkmal ist zur Definition hinreichend; denn aus $f' = \sin\alpha$ folgt durch Integration:

$$f = \tau\sin\alpha; \quad l = \vartheta\sin\alpha$$

und dic Quadratsumme giebt:

$$1 = \sin^2\alpha(1 + \tau^2 + \vartheta^2)$$

Die Coordinatengleichungen

$$x = \cos\alpha\int\sin\lambda\,\partial s; \quad y = \int\cos\lambda\cos a\lambda\,\partial s + \sin\alpha\int\sin\lambda\sin a\lambda\,\partial s$$
$$z = \int\cos\lambda\sin a\lambda\,\partial s - \sin\alpha\int\sin\lambda\cos a\lambda\,\partial s$$

wo s beliebige Function von λ, lassen sich für rationales a leicht als algebraische zwischen x, y, z bestimmen.

Sehr einfache Bestimmungen der begleitenden Axen ergeben sich noch für die Curvenclasse, deren specifische Gleichung ist

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} = e^{\tau}$$

worüber Crelle J. Bd. 63. p. 181.

§ 10. Bewegung der Binormale und Hauptnormale.

Was über die Bewegung der begleitenden Axen und Hauptebenen zu sagen ist, wird zum grössten Teil in §. 11. aus allgemeinern Betrachtungen fliessen. Nur einige Fragen, die dadurch nicht ihre Beantwortung finden, mögen im voraus untersucht werden.

Die Rotationswinkel, ϑ für Binormale und σ für Hauptnormale, sind bekannt. Die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxen sind dieselben wie die der normalen Hauptebenen, also nach Gl. (56) d. cit. Schr. für Binormale

$$\begin{vmatrix} m & \frac{\partial m}{\partial \vartheta} \\ n & \frac{\partial n}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m & g' \\ n & h' \end{vmatrix} = f; \quad \text{etc.}$$

für Hauptnormale

$$\begin{vmatrix} g' & \frac{\partial g'}{\partial \sigma} \\ h' & \frac{\partial h'}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g' & m\sin\lambda - g\cos\lambda \\ h' & n\sin\lambda - h\cos\lambda \end{vmatrix} = f\sin\lambda + l\cos\lambda; \quad \text{etc.}$$

Es handelt sich nun noch um den Drehpunktsabstand r und die Ausweichungsgeschwindigkeit $\frac{\partial q}{\partial r}$. Diese sind nach Gl. (74) und (75) d. cit. Schr. für Binormale

$$r = -\frac{\partial l\,\partial x + \partial m\,\partial y + \partial n\,\partial z}{\partial \vartheta^2} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial \vartheta} = \begin{vmatrix} l & \frac{\partial l}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ m & \frac{\partial m}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ n & \frac{\partial n}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$$

für Hauptnormale

$$r = -\frac{\partial f'\,\partial x + \partial g'\,\partial y + \partial h'\,\partial z}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\cos\lambda = s'\cos^2\lambda$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \begin{vmatrix} f' & \frac{\partial f'}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \sigma} \\ g' & \frac{\partial g'}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \\ h' & \frac{\partial h'}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\sin\lambda$$

Demnach rotirt die Binormale um die Tangente und gleitet längs derselben mit der Geschwindigkeit des laufenden Punkts. Die Hauptnormale rotirt um die Axe der osculirenden Spirale und gleitet längs derselben mit einer Geschwindigkeit, die sich zu der des laufenden Punkts verhält wie $\sin\lambda$ zu 1. Man kann dafür sagen: der kürzeste Abstand zwischen zwei consecutiven Binormalen und Hauptnormalen ist bzhw. $= \partial s$, $\partial s \sin\lambda$, und wird gemessen bzhw. längs der Tangente und Spiralenaxe.

Untersuchen wir noch die momentane Rotation des begleitenden Axensystems. Die Coordinaten eines Punkts der Rotationsaxe in Bezug auf die begleitenden Axen seien $\alpha+ar$, $\gamma+cr$, $\beta+br$, also in Bezug auf die willkürliche x Axe

$$\xi = x+(\alpha+ar)f+(\beta+br)l+(\gamma+cr)f'$$

wo a, b, c momentan constant, α, β, γ nur in der Richtung (a, b, c) verschiebbar sind. Damit sich nun die Rotationsaxe nur längs ihrer selbst verschiebt, ist die Bedingung

$$\partial(x+\alpha f+\beta l+\gamma f') = 0; \qquad \partial(af+bl+cf') = 0$$

das ist

$$f(s'-\gamma+ar')+l(\gamma\vartheta'+br')+f'(\alpha-\beta\vartheta'+cr') = 0$$
$$-fc+lc\vartheta'+f'(a-b\vartheta') = 0$$

gültig für willkürliche f, l, f', also

$$c = 0; \qquad a = b\vartheta'$$
$$\alpha = \beta\vartheta'; \qquad \gamma = s'+ar'; \qquad \gamma\vartheta'+br' = 0$$

woraus:

$$a = \sin\lambda; \qquad b = \cos\lambda; \qquad c = 0$$
$$\alpha = \varepsilon\sin\lambda; \qquad \beta = \varepsilon\cos\lambda; \qquad \gamma = s'\cos^2\lambda; \qquad r' = -s'\sin\lambda$$

Das willkürliche ε sei $=0$; dann wird die Gleichung der momentanen Rotationsaxe:

$$\xi = x+f's'\cos^2\lambda+r(f\sin\lambda+l\cos\lambda)$$

Das begleitende Axensystem rotirt demnach um die Axe der osculirenden Spirale. Diese geht durch die Hauptnormale und steht senkrecht auf ihr. Legt man durch beide eine Ebene, so ist deren Richtungscosinus

$$l\sin\lambda - f\cos\lambda$$

Da sie mit dem System gemeinsam rotirt, so ist das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit die Quadratsumme der analogen Grössen

$$\frac{\partial}{\partial t}(l\sin\lambda - f\cos\lambda) = \lambda'(l\cos\lambda + f\sin\lambda) - \sigma' f'$$

das ist

$$= \lambda'^2 + \sigma'^2$$

§. 11. Begleitende Curven.

Sind die Coordinaten eines Punkts p, r, q in Bezug auf die begleitenden Axen unabhängig von der Lage der Curve im Raume, so heisst der geometrische Ort des Punktes eine **abgeleitete Curve** und jedes in Coordinaten p, r, q dargestellte Raumgebilde ein **begleitendes**. Die Coordinate desselben Punkts in Bezug auf die willkürliche feste x Axe ist

$$x_1 = x + pf + ql + rf' \tag{42}$$

Unter den Begriff der abgeleiteten Curven fallen eine grössere Anzahl bereits untersuchter und bekannter Abhängigkeitsarten von Curven, an denen sich jedoch leicht die Bemerkung machen lässt, dass sich ihre Theorie einfacher gestaltet, wenn man sie aus allgemeinen Gesichtspunkten herleitet, anstatt jede besonders zu behandeln. Andererseits würden wir, da p, q, r beliebige Functionen zweier Variabeln sind, ein zu grosses Gebiet vor uns haben, um nicht einiger Lenkung durch den Erfolg zu bedürfen. Nun hat man gewöhnlich nach den Umhüllenden gewisser begleitender Geraden oder nach denen der [illegible] begleitender Ebenen gefragt und erstere durch [illegible] wenn sie nicht selbst Coincidenzpunkte hatten. [illegible] ohne Beachtung des Princips, teilweise der Weg [illegible] als einzig praktisch stets inne zu halten haben, [illegible] abhängigen Bestimmungen, hier die Lage [illegible] bewegten Geraden zuerst beiseite zu lassen [illegible] Frage zu machen.

[illegible] lassen sich wol am einfachsten unter [illegible] Welche abgeleiteten Curven haben [illegible] Stellung gegen das beglei- [illegible]

[illegible] Aufgabe hervor, die [illegible] also die Frage: Welche [illegible] Curve?

[illegible] willkürliche Constanten [illegible] gegenseitige Abhängigkeit [illegible] explicite darzustellen, [illegible] eine

Die Frage, von der wir ausgingen, liesse sich leicht allgemeiner stellen: statt der Tangente der Abgeleiteten könnte man eine beliebige Gerade von fester Stellung gegen ihr begleitendes Axensystem setzen. Die Aufgabe wäre alsdann: von 2 Curven, gegen deren begleitende Axensysteme eine Gerade eine feste Stellung hat, die eine explicite in der andern darzustellen. Die Inversion würde dann allein in der Vertauschung der die Stellung bestimmenden Constanten bestehen. Es ist jedoch klar, dass die Resultate dieser allgemeinern Aufgabe nur Zusammensetzungen aus denen der proponirten sein würden. Denn zwischen beide Curven lässt sich als Mittelglied eine dritte Curve einschieben, deren Tangente zu beiden begleitenden Axensystemen eine feste Stellung hat, indem man eben jene gemeinsame Gerade zur Tangente wählt. Ziehen wir deshalb statt jener Verallgemeinerung auch Zusammensetzungen in Untersuchung.

Handelt es sich nun um Bestimmung der Dimensionen, so lässt die erste Aufgabe eine Function unbestimmt. Im Anschluss an vorgängiges Verfahren bestimmen wir diese, indem wir die Tangente an einer constant begleitenden Geraden gleiten lassen. Die zweite Aufgabe führt dann keine Function, aber neue Integrationsconstanten ein, wodurch der Umfang der dritten Aufgabe sich vermehrt.

Abgeleitete Curven von fester Stellung der Tangente.

I. Innere Beziehungen.

Sind A, C, B die constanten Tangentialrichtungscosinus der Abgeleiteten s_1 gegen die begleitenden Axen der Urcurve s, so findet man nach dem Rechnungsschema §. 6. und mit Gebrauch der Abkürzung

$$D=\sqrt{1-(A\sin\lambda+B\cos\lambda)^2}$$

folgende Werte:

$$\begin{aligned}
f_1 &= Af+Bl+Cf' && (43)\\
Df_1' &= C(l\sin\lambda-f\cos\lambda)+(A\cos\lambda-B\sin\lambda)f' &&\\
Dl_1 &= f\sin\lambda+l\cos\lambda-(A\sin\lambda+B\cos\lambda)f_1 &&\\
\partial\tau_1 &= D\partial\sigma &&\\
\partial\vartheta_1 &= (A\sin\lambda+B\cos\lambda)\partial\sigma+\frac{C\partial\lambda}{D^2} && (44)
\end{aligned}$$

Letztere Gleichung integrirt giebt:

$$\vartheta_1=A\vartheta+B\tau-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{C}\,\frac{A-B\operatorname{tg}\lambda}{A\operatorname{tg}\lambda+B}\right)$$

so wird

$$\partial k = r(\partial\vartheta \cot \Delta + \partial\tau)$$

$$\partial q + q(\partial\vartheta \sin \Delta - \partial\tau \cos \Delta) \cot E = \{\partial r + (k-s)\partial\tau\} \sin \Delta \cot E - r\partial\vartheta$$

Nimmt man r willkürlich, so bestimmt die erstere Gleichung k, dann die letztere q, dann Gl. (46) p. Bei der Inversion würde man einen Coefficienten willkürlich in Elementen der Abgeleiteten nehmen müssen, also nicht die besondere Ableitung, sondern die alle r umfassende Classe von Ableitungen im ganzen invertiren.

Lassen wir die Tangente der Abgeleiteten an der constant begleitenden Geraden

$$[illegible] = \text{etc.} = u \qquad (47)$$

gleiten, und bestimmen s entsprechend dem Durchschnitt derselben mit der Tangente

$$[illegible] = \text{etc.} = v \qquad (48)$$

dann sind die Bedingungen:

$$[illegible]$$

Nach Elimination von u, v bleibt eine Gleichung, welche das System (45) zur Bestimmung von p, q, r ergänzt. Sei

$$a = \cos\lambda \cos\nu; \quad b = \sin\lambda \cos\nu, \quad c = \sin\nu$$

dann wird

$$[illegible] \qquad (49)$$

Nach Einführung in (48) erhält man

$$[illegible] \qquad (50)$$

Nimmt man [illegible] so bleibt eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung [illegible] die Lösung immer allgemein durchführbar. Wir beschränken uns [illegible] auf die Fälle, wo [illegible] keine Exponentialfunctionen enthält.

Dimensionen der beliebig verdrehten Curve.

Sei $E=0$, also Δ der Verdrehungswinkel; dann sind die 3 Fälle zu betrachten $\varepsilon=0$, $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$, $\delta=\Delta$.

a) $\varepsilon=0$.

Hier wird

$$(\partial s_1+\partial v)\cos\Delta=\partial s+\partial u\cos\delta-\gamma\partial\tau$$
$$(\partial s_1+\partial v)\sin\Delta=\partial u\sin\delta+\gamma\partial\vartheta$$
$$0=(\alpha+r\cos\delta-v\cos\Delta)\partial\tau-(\beta+u\sin\delta-v\sin\Delta)\partial\vartheta$$

woraus als Parameterwerte für den Durchschnitt der Tangente:

$$u=\frac{\gamma\vartheta_1-s\sin\Delta}{\sin(\Delta-\delta)}$$

$$v=\frac{u\cos(\lambda+\delta)+\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda}{\cos(\Delta-\delta)}$$

und nach Einführung:

$$s_1=\frac{(s-\alpha-\gamma\tau)\cos\lambda+(\beta-\gamma\vartheta)\sin\lambda}{\cos(\lambda+\Delta)}$$

$$x_1=x+\frac{(s-\alpha-\gamma\tau)\sin\Delta+(\beta-\gamma\vartheta)'\cos\Delta}{\cos(\lambda+\Delta)}(f\sin\lambda+l\cos\lambda)+\gamma f'$$

Da die Curve s_1 unabhängig von δ ist, so muss ihre Tangente nicht bloss durch die Gerade (47), sondern auch durch deren Ausgangspunkt $(\alpha\beta\gamma)$ gehen.

Die hieraus leicht zu entwickelnde Inverse ist eine Abgeleitete derselben Form, wo nur $-\beta$, $-\alpha$, $-\gamma$, $-\Delta$ an die Stelle von α, β, γ, Δ treten.

b) $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$.

Die Gleichungen werden:

$$(\partial s_1+\partial v)\cos\Delta=\partial s-(\gamma+u)\partial\tau$$
$$(\partial s_1+\partial v)\sin\Delta=(\gamma+u)\partial\vartheta$$
$$0=\partial u+(\alpha-v\cos\Delta)\partial\tau-(\beta-v\sin\Delta)\partial\vartheta$$

woraus:

$$u=\frac{\partial s}{\partial\vartheta_1}\sin\Delta-\gamma$$

$$v=\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1+\frac{\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda}{\cos\lambda_1}$$

$$s_1=\int\frac{\sin\lambda\,\partial s}{\sin\lambda_1}-\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1-\frac{\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda}{\cos\lambda_1}$$

$$x_1=x-\left(\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1+\frac{\alpha\sin\Delta-\beta\cos\Delta}{\cos\lambda_1}\right)(f\sin\lambda+l\cos\lambda)$$
$$+\frac{\partial s}{\partial\vartheta_1}\sin\Delta\,.\,f'$$

c) $\delta=\Delta$.

Die Gleichungen werden:

$$(\partial s_1+\partial v-\partial u\cos\varepsilon)\cos\Delta=\partial s-(\gamma+u\sin\varepsilon)\partial\tau$$
$$(\partial s_1+\partial v-\partial u\cos\varepsilon)\sin\Delta=(\gamma+u\sin\varepsilon)\partial\tau$$
$$0=\partial u\sin\varepsilon+\{\alpha+(u\cos\varepsilon-v)\cos\Delta\}\,\partial\tau-\{\beta+(u\cos\varepsilon-v)\sin\Delta\}\,\partial\vartheta$$

woraus:

$$u=\frac{\partial s}{\partial\vartheta_1}\frac{\sin\Delta}{\sin\varepsilon}-\frac{\gamma}{\sin\varepsilon}$$

$$v=\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1+\frac{\partial s}{\partial\vartheta_1}\sin\Delta\cot\varepsilon+\frac{\alpha\cos\lambda-\beta\sin\lambda}{\cos\lambda_1}-\gamma\cot\varepsilon$$

$$s_1=-\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1+\frac{\beta\sin\lambda-\alpha\cos\lambda}{\cos\lambda_1}$$

$$x_1=x-\frac{\partial^2 s}{\partial\vartheta_1^2}\sin\Delta\operatorname{tg}\lambda_1(f\cos\Delta+l\sin\Delta)$$
$$+\frac{\beta\cos\Delta-\alpha\sin\Delta}{\cos\lambda_1}(f\sin\lambda+l\cos\lambda)+\frac{\partial s}{\partial\vartheta_1}\sin\Delta\,.\,f'$$

Die Inversionen der 2 letzten Fälle übergehen wir als zu complicirt.

Dimensionen der 4 einfachsten Ableitungen.

1. *Unveränderte Tangentialrichtung. Einhüllende von Parallelen der Tangente.*

$$f_1=f;\quad l_1=l;\quad f_1'=f';\quad \vartheta_1=\vartheta;\quad \tau_1=\tau$$

Hier ist $\Delta=0$; $E=0$. Sei zuerst

$1_a)\quad \varepsilon=0$

Die Gl. (50) werden:

$$\partial s_1+\partial v=\partial s+\partial u\cos\delta-\gamma\,\partial\tau$$

$$0 = \partial u \sin\delta + \gamma \partial\vartheta$$
$$0 = (\alpha + u\cos\delta - v)\,\partial\tau - (\beta + u\sin\delta)\partial\vartheta$$

woraus:

$$u = -\frac{\gamma\vartheta}{\sin\delta}; \quad v = \alpha + \gamma\vartheta(\operatorname{tg}\lambda - \cot\delta) - \beta\operatorname{tg}\lambda$$
$$s_1 = s - \alpha - \gamma\tau + (\beta - \gamma\vartheta)\operatorname{tg}\lambda$$
$$x_1 = x + (\beta - \gamma\vartheta)(f\operatorname{tg}\lambda + l) + \gamma f'$$

Die Fälle $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ und $\delta = 0$ geben nur specielle Resultate von (1_a); dagegen wollen wir noch in Betracht ziehen:

1_b) $p = \text{const.}$

Die Gl. (45) werden:

$$\partial s_1 = \partial s - r\partial\tau; \quad \partial q + r\partial\vartheta = 0; \quad \partial r + p\partial\tau - q\partial\vartheta = 0$$

Dies integrirt giebt:

$$q = p\{\sin\vartheta\int\partial\tau\cos\vartheta - \cos\vartheta\int\partial\tau\sin\vartheta\}$$
$$r = -p\{\cos\vartheta\int\partial\tau\cos\vartheta + \sin\vartheta\int\partial\tau\sin\vartheta\}$$
$$s_1 = s + p\int\partial\tau\{\cos\vartheta\int\partial\tau\cos\vartheta + \sin\vartheta\int\partial\tau\sin\vartheta\}$$
$$x_1 = x + p\{f + (l\sin\vartheta - f'\cos\vartheta)\int\partial\tau\cos\vartheta - (l\cos\vartheta + f'\sin\vartheta)\int\partial\tau\sin\vartheta\}$$

Für $p = 0$ gehen die Integrale in Constanten über, und man hat:

$$s_1 = s + c\int\partial\tau\cos(\vartheta + \Gamma)$$
$$x_1 = x + c\{l\sin(\vartheta + \Gamma) - f'\cos(\vartheta + \Gamma)\}$$

Der Punkt ($x_1 y_1 z_1$) liegt auf der Normalebene der Urcurve; sein Abstand von (xyz) ist daher Normalabstand beider Curven, und dieser ist constant $= c$. Die Abgeleitete s_1 ist demnach eine Parallele der Curve s.

2. *Viertelverdrehung. Einhüllende von Parallelen der Binormale.*

$$f_1 = l; \quad l_1 = -f; \quad f_1' = f'$$
$$\vartheta_1 = \tau; \quad \tau_1 = -\vartheta; \quad \sigma_1 = \sigma; \quad \lambda_1 = \lambda + \frac{\pi}{2}$$

Hier ist $\Delta = \frac{\pi}{2}$; $E = 0$. Sei zuerst

$$2_a)\quad \varepsilon = 0$$

dann werden die Gl. (50):

$$0 = \partial s + \partial u \cos\delta - \gamma \partial \tau$$
$$\partial s_1 + \partial v = \partial u \sin\delta + \gamma \partial \vartheta$$
$$0 = (\alpha + u\cos\delta)\partial\tau - (\beta + u\sin\delta - v)\partial\vartheta$$

woraus:

$$u = \frac{\gamma\tau - s}{\cos\delta}; \quad v = \beta - \alpha\cot\lambda + (s - \gamma\tau)(\cot\lambda - \operatorname{tg}\delta)$$
$$s_1 = \gamma\vartheta - \beta + (\alpha + \gamma\tau - s)\cot\lambda$$
$$x_1 = x + (\alpha + \gamma\tau - s)(f + l\cot\lambda) + \gamma f'$$

Die Inverse ist von derselben Form; es treten nur $-\beta$, $-\alpha$, $-\gamma$ an die Stelle von α, β, γ. Da s_1 und τ_1 willkürlichen Anfang haben, so bilden die Inversen eine Schar von Curven, deren gegenseitige Abhängigkeit sich leicht als die der Abgeleiteten (1_a) erweist.

$$2_b)\quad \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gl. (50) werden:

$$0 = \partial s - (\gamma + u)\partial\tau$$
$$\partial s_1 + \partial v = (\gamma + u)\partial\vartheta$$
$$0 = \partial u + \alpha\partial\tau - (\beta - v)\partial\vartheta$$

woraus:

$$u = s' - \gamma; \quad v = \beta - (\alpha + s'')\cot\lambda$$
$$s_1 = \alpha\cot\lambda + \frac{\partial s'}{\partial\vartheta} + \int s'\partial\vartheta$$
$$x_1 = x + \alpha f + (\alpha + s'')l\cot\lambda + s'f'$$

Für $\alpha = 0$ fällt $(x_1 y_1 z_1)$ in die Krümmungsaxe; dann ist also die Curve s_1 deren Einhüllende.

Zur Inversion setze man

$$S = \int s'\partial\vartheta$$

dann wird

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\tau_1^2} + S = s_1 - \alpha\operatorname{tg}\lambda_1$$

und nach Integration

$$S = \sin\tau_1\int(s_1 - \alpha\operatorname{tg}\lambda_1)\partial\sin\tau_1 + \cos\tau_1\int(s_1 - \alpha\operatorname{tg}\lambda_1)\partial\cos\tau_1$$

woraus:

$$\frac{\partial s}{\partial \vartheta_1} = \cos\tau_1 \int (s_1 - \alpha \operatorname{tg}\lambda_1)\partial \sin\tau_1 - \sin\tau_1 \int (s_1 - \alpha \operatorname{tg}\lambda_1)\partial\cos\tau_1$$

$$\begin{aligned} x = x_1 &+ \alpha(l_1 + f_1 \operatorname{tg}\lambda_1) \\ &-(f_1\sin\tau_1 + f_1'\cos\tau_1)\int\sin\tau_1\,\partial(s - \alpha\operatorname{tg}\lambda_1) \\ &+(-f_1\cos\tau_1 + f_1'\sin\tau_1)\int\cos\tau_1\,\partial(s - \alpha\operatorname{tg}\lambda_1)\end{aligned}$$

Die gegenseitigen Relationen zweier Inversen, deren Integrationsconstanten bzhw. um $c\cos\Gamma$ und $c\sin\Gamma$ differiren, sind

$$\begin{aligned} s &= s_0 + c\int\cos(\vartheta + \Gamma)\partial\tau \\ x &= x_0 + cl\sin(\vartheta + \Gamma) - cf'\cos(\vartheta + \Gamma)\end{aligned}$$

Sie sind also alle unter einander parallel. — Der Fall $\delta = \frac{\pi}{2}$ hat nur dasselbe Resultat wie $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Betrachten wir noch den Fall

2c) $q = \text{const.}$

Die Gl. (45) werden:

$$0 = \partial s + \partial p - r\partial\tau; \quad \partial s_1 = r\partial\vartheta; \quad 0 = \partial r + p\partial\tau - q\partial\vartheta \tag{51}$$

und geben nach Integration:

$$\begin{aligned} p &= \sin\tau\int(s'' - q\vartheta')\partial\sin\tau + \cos\tau\int(s'' - q\vartheta')\partial\cos\tau \\ r &= s' + \cos\tau\int(s'' - q\vartheta')\partial\sin\tau - \sin\tau\int(s'' - q\vartheta')\partial\cos\tau\end{aligned}$$

Letztere Grösse ist zugleich $\frac{\partial s_1}{\partial\vartheta}$; ferner

$$\begin{aligned} x_1 = x + ql + s'f' &+ (f\sin\tau + f'\cos\tau)\int(s'' - q\vartheta')\partial\sin\tau \\ &+ (f\cos\tau - f'\sin\tau)\int(s'' - q\vartheta')\partial\cos\tau\end{aligned}$$

Die Inversion ergiebt sich leicht aus (51); denn man hat:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial s_1}{\partial\vartheta} = -s_1' \\ p &= -\frac{\partial r}{\partial\tau} + q\vartheta' = \frac{\partial s_1'}{\partial\vartheta_1} - q\cot\lambda_1 \\ s &= \int r\partial\tau - p = -\int s_1'\partial\vartheta_1 - \frac{\partial s_1'}{\partial\vartheta_1} + q\cot\lambda_1 \\ x &= x_1 + pl_1 - qf_1 - rf_1' \\ &= x_1 + s_1'f_1' - q(f_1 + l_1\cot\lambda_1) + \frac{\partial s_1'}{\partial\vartheta_1}l_1\end{aligned}$$

das ist für $q = 0$ Einhüllende der Krümmungsaxe.

3. *Abgeleitete der zweiten Art. Einhüllende von Parallelen mit der Hauptnormale.*

$$f_1 = f'; \quad l_1 = l\cos\lambda + f\sin\lambda; \quad f_1' = l\sin\lambda - f\cos\lambda$$

und umgekehrt:

$$f = l_1 \sin\vartheta_1 - f_1'\cos\vartheta_1; \quad l = l_1\cos\vartheta_1 + f_1'\sin\vartheta_1; \quad f' = f_1$$
$$\tau_1 = \sigma; \quad \vartheta_1 = \lambda$$

Hier ist $E = \frac{\pi}{2}$. Sei zuerst

$$3_a) \quad \varepsilon = 0; \quad \delta = 0.$$

Die Gl. (50) werden:

$$0 = \partial s + \partial u - (\gamma - v)\partial\tau$$
$$0 = (\gamma - v)\partial\vartheta$$
$$\partial s_1 + \partial v = (\alpha + u)\partial\tau - \beta\partial\vartheta$$

woraus:

$$v = \gamma; \quad u = -s$$
$$s_1 = \alpha\tau - \beta\vartheta - \int s\,\partial\tau$$
$$x_1 = x + (\alpha - s)f + \beta l$$

Für $\beta = 0$ ist s_1 Evolvente von s. Sofern s einen willkürlichen Anfang hat, repräsentirt s_1 eine Schar von Curven. Die Relation zwischen ihnen ist

$$x_1 = x_0 + cf = x_0 + c(l_0\sin\vartheta_0 - f_0'\cos\vartheta_0)$$

und zeigt, dass sie einander parallel sind.

Für die Inverse ergiebt sich unmittelbar:

$$s = \frac{\alpha\partial\tau - \beta\partial\vartheta - \partial s_1}{\partial\tau} = \alpha - \beta\,\mathrm{tg}\,\vartheta_1 - \frac{s_1'}{\cos\vartheta_1}$$

$$x = x_1 - \frac{s_1' + \beta\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_1}(l_1\sin\vartheta_1 - f_1'\cos\vartheta_1) - \beta(l_1\cos\vartheta_1 + f_1'\sin\vartheta_1)$$

$$= x_1 - s_1'(l_1\,\mathrm{tg}\,\vartheta_1 - f_1') - \frac{\beta l_1}{\cos\vartheta_1}$$

für $\beta = 0$ Evolute von s_1.

$$3_b) \quad \varepsilon = 0; \quad \delta = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gl. (50) werden:

$$0 = \partial s - (\gamma - v)\partial\tau$$
$$0 = \partial u + (\gamma - v)\partial\vartheta$$
$$\partial s_1 + \partial v = \alpha\partial\tau - (\beta + u)\partial\vartheta$$

woraus:

$$v = \gamma - s'; \quad u = -\int s'\partial\vartheta$$
$$s_1 = \alpha\tau - \beta\vartheta - \gamma + s' + \int\partial\vartheta\int s'\partial\vartheta$$
$$x_1 = x + \alpha f + (\beta - \int s'\partial\vartheta)l + s'f'$$

Die Inversion ergiebt:

$$s' = \cos\vartheta\int\cos\vartheta\,\partial(s_1 - \alpha\tau) + \sin\vartheta\int\sin\vartheta\,\partial(s_1 - \alpha\tau)$$
$$x = x_1 - \alpha f - \beta l + (l\sin\vartheta - f'\cos\vartheta)\int\cos\vartheta\,\partial(s_1 - \alpha\tau)$$
$$- (l\cos\vartheta + f'\sin\vartheta)\int\sin\vartheta\,\partial(s_1 - \alpha\tau)$$

wo

$$\vartheta = \int\partial\tau_1\sin\vartheta_1; \quad \tau = \int\partial\tau_1\cos\vartheta_1$$

und für f, l, f' ihre Werte zu setzen sind.

3$_c$) $r = \text{const.}$

Die Gl. (45) werden:

$$0 = \partial s + \partial p - r\partial\tau; \quad 0 = \partial q + r\partial\vartheta; \quad \partial s_1 = p\partial\tau - q\partial\vartheta$$

woraus:

$$p = r\tau - s; \quad q = -r\vartheta$$
$$s_1 = r\frac{\tau^2 + \vartheta^2}{2} - \int s\partial\tau$$
$$x_1 = x + (r\tau - s)f - r\vartheta l + rf'$$

für $r = 0$ Evolvente von s.

Diė Inversion giebt:

$$s = r(\tau + \vartheta\vartheta') - \frac{\partial s_1}{\partial\tau}$$
$$x = x_1 + \left(r\vartheta\vartheta' - \frac{\partial s_1}{\partial\tau}\right)f + r\vartheta l - rf'$$

wo noch die bekannten Werte einzusetzen sind.

4. *Abgeleitete der zweiten Art mit nachfolgender Viertelverdrehung. Einhüllende von Parallelen mit der Spiralenaxe.*

$$f_1 = f\sin\lambda + l\cos\lambda; \quad l_1 = -f'; \quad f_1' = l\sin\lambda - f\cos\lambda$$
$$\vartheta_1 = \sigma; \quad \tau_1 = -\lambda$$

Hier gehen die Werte (49) über in

$$p = \alpha + u\cos\delta\cos\varepsilon - v\sin\lambda$$
$$q = \beta + u\sin\delta\cos\varepsilon - v\cos\lambda$$
$$r = \gamma + u\sin\varepsilon$$

nach deren Einführung die Gl. (45) geben:

$$\partial(s_1+v)\sin\lambda = \partial s + \partial u\cos\delta\cos\varepsilon - v\partial\lambda\cos\lambda - (\gamma + u\sin\varepsilon)\partial\tau$$
$$\partial(s_1+v)\cos\lambda = \partial u\sin\delta\cos\varepsilon + v\partial\lambda\sin\lambda + (\gamma + u\sin\varepsilon)\partial\vartheta$$
$$0 = \partial u\sin\varepsilon + (\alpha + u\cos\delta\cos\varepsilon)\partial\tau$$
$$-(\beta + u\sin\delta\cos\varepsilon)\partial\vartheta$$

und nach Verbindung der beiden ersten:

$$\partial s_1 + \partial v = \partial s\sin\lambda + \partial u\sin(\lambda+\delta)\cos\varepsilon$$
$$0 = \partial s\cos\lambda + \partial u\cos(\lambda+\delta)\cos\varepsilon - v\partial\lambda - (\gamma + u\sin\varepsilon)\partial\sigma$$

Sei zuerst

$$4_a)\quad \varepsilon = 0.$$

Dann werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\partial s_1 = \partial s\sin\lambda + \partial u\sin(\lambda+\delta) - \partial v$$
$$0 = \partial s\cos\lambda + \partial u\cos(\lambda+\delta) - v\partial\lambda - \gamma\partial\sigma$$
$$0 = (\alpha\cos\lambda - \beta\sin\lambda)\partial\sigma + u\cos(\lambda+\delta)\partial\sigma$$

woraus:

$$u = (\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta)\operatorname{tg}(\lambda+\delta) - \beta\sin\delta - \alpha\cos\delta$$

$$v = \frac{\partial s\cos\lambda - \gamma\partial\sigma}{\partial\lambda} + \frac{\beta\cos\delta - \alpha\sin\delta}{\cos(\lambda+\delta)}$$

$$s_1 = \int \partial s\sin\lambda - \frac{\partial s}{\partial\lambda}\cos\lambda + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}$$

$$x_1 = x + \frac{\gamma\partial\sigma - \partial s\cos\lambda}{\partial\lambda}(f\sin\lambda + l\cos\lambda) + \gamma f'$$

Die Schmiegungsebene dieser Abgeleiteten hat die Gleichung:

$$f'(\xi - x) + g'(\eta - y) + h'(\zeta - z) = \gamma$$

ist also der rectificirenden Ebene der Urcurve im constanten Abstande $= \gamma$ parallel. Die Curve s_1 stellt demnach die Einhüllende der Coincidenzlinie einer der rectificirenden Ebene von s in constantem Abstande parallelen Ebene dar, für $\gamma = 0$ der rectificirenden Ebene selbst.

Die Inversion ergiebt:

$$s = \int (\gamma \vartheta_1 + s_1 \partial \tau_1) \cos \tau_1 + \operatorname{tg} \tau_1 \int (\gamma \partial \vartheta_1 + s_1 \partial \tau_1) \sin \tau_1$$

$$x = x_1 - s_1 f_1 - \frac{f_1}{\cos \tau_1} \int (\gamma \partial \vartheta_1 + s_1 \partial \tau_1) \sin \tau_1 + \gamma l_1$$

Die Relation der Inversen unter sich ist

$$x = x_0 + b\, \frac{f \sin \lambda + l \cos \lambda}{\cos \lambda}$$

jede ist die Abgeleitete (1_a) der andern für $\beta = b$, $\gamma = 0$.

$$4_b) \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

Die Gleichungen werden:

$$\begin{aligned} \partial s_1 &= \partial s \sin \lambda - \partial v \\ 0 &= \partial s \cos \lambda - v \partial \lambda - (\gamma + u) \partial \sigma \\ 0 &= \partial u + (\alpha \cos \lambda - \beta \sin \lambda) \partial \sigma \end{aligned}$$

woraus:

$$u = \alpha \tau - \beta \vartheta$$

$$v = \frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda - (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}$$

$$s_1 = \int \partial s \sin \lambda - \frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda + (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}$$

$$x_1 = x + \alpha f + \beta l + \left\{ -\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda + (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right\} (f \sin \lambda + l \cos \lambda) + (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) f'$$

für $\alpha = \beta = 0$ identisch mit (4_a).

Die Inversion ergiebt:

$$s = \int \{ (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) \partial \sigma - s_1 \partial \lambda \} \cos \lambda + \operatorname{tg} \lambda \int \{ (\gamma + \alpha \tau - \beta \vartheta) \partial \sigma - s_1 \partial \lambda \} \sin \lambda$$

wo für τ, ϑ, σ, λ ihre Werte zu setzen sind, und nach Einführung in die Coordinatengleichung lässt sich deren Inversion leicht bewerstelligen; doch ist das Resultat nicht einfach.

Es ist bei den vorstehenden Curven s_1 nicht besonders erwähnt worden, welcher Geraden Einhüllende die s_1, und welcher Ebenen Coincidenzlinien diese Geraden sind, weil sich beides unmittelbar ablesen lässt. Die eingehüllten Geraden sind die Tangenten, deren Aus-

gangspunktscoordinate x_1, und deren Richtungscosinus f_1 ist; die Ebenen sind die Schmiegungsebenen, welche durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehen, und die Richtungscosinus l_1, m_1, n_1. Die Werte dieser Grössen sind angegeben.

Es bleibt mir zum Schluss noch übrig die dargelegte Curventheorie mit den litterarischen Erzeugnissen der Gegenwart in Verhältniss zu stellen. Nachdem die allgemeine analytische Theorie der Curven länger als ein halbes Jahrhundert auf dem Standpunkt, auf den Monge sie gestellt hatte, geblieben und als solche fast der Vergessenheit anheim gefallen war, haben erst in neuster Zeit eine Anzahl französischer Mathematiker, unter denen ich Serret, Combescure, Laurent, Ribaucour nenne, ihr wieder Aufmerksamkeit zugewandt, und an ihrer Fortbildung gearbeitet. Hierbei erscheint Serret als die leitende Autorität; seiner Anregung ist ohne Zweifel der erneute Eifer in weiterm Kreise zu verdanken; namentlich aber ist es das von ihm aufgestellte System von Differentialformeln für die Richtungscosinus der begleitenden Axen, welches die übrigen Schriftsteller als Grundlage und Ausgang ihrer Untersuchung wählen, so dass sie auch bei augenfälligen Inconvenienzen nicht von der eingeführten Form abgehen. Diese Formeln bedürfen nun in zweierlei Hinsicht der Verbesserung, und es ist sehr zu wünschen, dass sie nicht ohne dieselbe in immer weitere Aufnahme kommen. Erstlich hat Serret obgleich er die dimensionslosen Variabeln τ, ϑ, σ als Indicatricen kennt, doch das Bogenelement in den Coefficienten implicirt stehen lassen. In Laurent's Rechnungen ist infolge dessen ∂s anfangs ein überflüssig geschriebener, sich hebender Factor, weiterhin aber ein wirkliches Hinderniss der Lösung. Zweitens hat Serret das Vorzeichen der Torsion, abweichend von Monge, so gewählt, dass Krümmung und Torsion vertauschbar werden, das negative Vorzeichen hingegen in die dritte Formel übergeht. Dies Verfahren verstösst gegen die wolbegründete Praxis in Betreff der Systeme von 3 mal 3 Elementen. Der Vorzeichenwechsel muss bei Vertauschung von 2 Reihen stattfinden, damit die Determinanten nicht aus $+1$ in -1 übergehen. Vertauscht man die Tangente mit der Binormale, so muss eine von beiden, nicht die Hauptnormale, entgegengesetzte Richtung annehmen. Der stetige Uebergang von einer Lage in die andre, wie er in §. 3. in Anwendung kam, hat die Beibehaltung des Vorzeichens der Torsion nach Monge vollkommen gerechtfertigt.

VIII.

Beiträge zur Theorie periodischer Decimalbrüche.

Von

Herrn *Karl Broda*,

Lehrer für Mathematik und Physik in Brünn.

Ein rein periodischer Decimalbruch von gerader Stellenzahl kann, wenn x die erste und y die zweite Hälfte der Periode, und wenn r ihre Stellenzahl bedeutet, immer dargestellt werden durch die Reihe

$$\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}+\frac{x}{10^{3r}}+\frac{y}{10^{4r}}+\frac{x}{10^{5r}}+\ldots+$$

Soll die identische Gleichung

$$\frac{9x+a}{9[10^r+1]}=\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}+\frac{x}{10^{3r}}+\frac{y}{10^{4r}}+\ldots \qquad 1)$$

wobei a eine constante Grösse vorstellt, bestehen, so muss sein

$$\frac{9x+a}{9[10^r+1]}=\frac{x}{10^r}\left[1+\frac{1}{10^{2r}}+\frac{1}{10^{4r}}+\ldots\right]+\frac{y}{10^{2r}}\left[1+\frac{1}{10^{2r}}+\ldots\right]$$

$$=\left[1+\frac{1}{10^{2r}}+\frac{1}{10^{4r}}+\ldots\right]\left[\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}\right]$$

Setzt man für die Reihe

$$1+\frac{1}{10^{2r}}+\frac{1}{10^{4r}}+\ldots$$

das Summen-Glied

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10^{2r}}}$$

so wird

$$\frac{9x+a}{9[10^r+1]}=\frac{10^r x+y}{10^{2r}-1},$$

nach einfacher Reduction ist

$$[9x+a][10^r-1]=9[10^r x+y],$$

berechnet man $x+y$ aus der letzten Gleichung, so ergibt sich sofort

$$a\frac{10^r-1}{9}=x+y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Da nun $\frac{10^r-1}{9}$ für jeden ganz-zahligen positiven Wert von r eine ganze Zahl vorstellt, die mit eben so viel Einsern geschrieben werden muss, als r Einheiten besitzt, so kann Gleichung 2) auch ausgedrückt werden durch die Relation

$$x+y=a\times 1111\ldots;$$

es muss also die Summe der beiden halben Perioden eine $r$ziffrige Zahl geben, deren einzelne Ziffern durch die Zahl a ausgedrückt erscheinen.

Wäre z. B. $a=8$, $r=3$, so müsste $x+y=888$ sein.

Die Gleichungen 1) und 2) können in doppelter Beziehung Verwertung finden.

I. Soll ein rein periodischer Decimalbruch, dessen Stellenzahl eine gerade ist, und dessen einzelne Ziffern sich zu a ergänzen, in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so findet man den Zähler, indem man das neunfache der halben Periode um a vermehrt; es ist $Z=9x+a$, der Nenner $N=9[10^r+1]$.

Z. B. 0·123 654. Da hier $a=7$, $x=123$ und $r=3$ ist, so erhält man

$$\text{für } z=9\cdot 123+7=1114, \quad \text{für } N=9[10^3+1]=9009,$$

daher ist

$$0\cdot 123\ 654=\frac{1114}{9009}.$$

$0 \cdot 78\ 65$. Da $a = 13$, $x = 78$ und $r = 2$ ist, so muss

$$z = 9 \cdot 78 + 13 = 715 \quad \text{und} \quad N = 909$$

sein, deshalb ist

$$0 \cdot 78\ 65 = \frac{715}{909}.$$

Für

$0 \cdot 1234\ 4321$ findet man, da $a = 5$, $r = 4$ und $x = 1234$ ist, $\frac{11111}{90009}$

$0 \cdot 120\ 102$ „ „ „ $a = 2$, $r = 3$ und $x = 120$ ist, $\frac{1082}{9009}$

$0 \cdot 000801\ 999198$ „ „ $a = 9$, $r = 6$ und $x = 801$ ist, $\frac{7218}{9000009}$

u. s. w.

II. Soll ein Bruch von der Form $\frac{Z}{9[10^r+1]}$, wo Z und r nur ganze positive Zahlen vorstellen, in einen Decimalbruch verwandelt werden, so wird Z zerlegt in $Z = 9x + a$ wobei x eine Zahl bedeutet, deren einzelne Ziffern gleich oder kleiner sein müssen als die Zahl a; es ist dann $\frac{Z}{9[10^r+1]} = 0 \cdot x$, wobei x als Hälfte der Periode r Ziffern haben muss; die zweite Hälfte der Periode findet man, indem man die Ergänzung zu a bildet.

Es seien z. B. die Brüche $\frac{53}{99}$, $\frac{1115}{9009}$, $\frac{111212}{900009}$ in Decimalbrüche zu verwandeln, so erhält man,

da $53 = 9 \cdot 5 + 8$, also $x = 5$, $a = 8$ und da $r = 1$ ist, für

$$\frac{53}{99} = 0 \cdot 53,$$

da $1115 = 9 \cdot 123 + 8$, also $x = 123$, $a = 8$ und da $r = 3$ ist, für

$$\frac{1115}{9009} = 0 \cdot 123\ 765,$$

da $111212 = 9 \cdot 12356 + 8$, also $x = 12356$, $a = 8$ und da $r = 5$ ist, für

$$\frac{111212}{900009} = 0 \cdot 12356\ 76532.$$

Für die Brüche $\frac{1114}{90009}$, $\frac{21074}{90009}$ ist $r = 4$ und da für

$1114 = 9 \cdot 123 + 7$ und für $21074 = 9 \cdot 2341 + 5$ ist, so ist

für $\frac{1114}{90009}$ die halbe Periode 123 und $a = 7$,

für $\frac{21074}{90009}$ „ „ „ 2341 „ $a = 5$,

daher muss

$$\frac{1114}{90009} = 0\cdot0123\ 7654 \quad \text{und} \quad \frac{21074}{90009} = 0\cdot2341\ 3214 \text{ sein.}$$

Oft erhält man bei der Division des Zählers durch neun einen Rest a, welcher kleiner erscheint als eine oder mehrere Ziffern des Quotienten x; tritt diese Bedingung ein, so wird die Richtigkeit der Entwicklung nicht gestört, nur ist die Rechnung unbequem.

Es sei gegeben $\frac{526}{909}$, so ist $526 = 9\cdot58 + 4$, daher $x = 58$ und $a = 4$, hier ist nun sowohl 5 als auch $8 > 4$; man könnte nun, da die Ergänzungszahl $+4$ sein muss, und da $r = 2$ ist, schreiben $\frac{526}{909} = 0\cdot58\,[-1]\,[-4]$. Es ist aber

$$0\cdot58\,[-1]\,[-4] = 0\cdot58 - 0\cdot0014 = 0\cdot5786$$

daher ist

$$\frac{526}{909} = 0\cdot5786$$

Man bemerkt sofort, dass im Decimalbruche $0\cdot57\ 86$ eine Ergänzung zu 13 stattfindet, und dass bei der Division von 526 durch 9 der Rest 13 erscheint, wenn man den Quotienten um die Einheit kleiner annimmt, es ist nähmlich

$$526 = 9\cdot57 + 13, \quad \text{also } x = 57 \text{ und } a = 13.$$

Werden die hier für x und a gefundenen Werte benutzt, so erhält man sofort dasselbe Resultat.

Wird z. Beisp. für $\frac{226}{9009}$ der Decimalbruch gesucht, so ist $226 = 9\cdot24 + 10$ anzunehmen, da für die Annahme $226 = 9\cdot25 + 1$, 5 sowohl als auch $2 > 1$, daher ist

$$a = 10, \quad x = 24, \quad r = 3,$$

man erhält also

$$\frac{226}{9009} = 0\cdot024\,{\scriptstyle(10)}\,86 = \frac{24}{1000} + \frac{10}{10000} + \frac{86}{1000000} = \frac{24}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{86}{1000000}$$

$$= 0\cdot025 + 0\cdot000086 = 0\cdot025086$$

Es ist also nur nötig 4 um eine Einheit zu erhöhen, und für (10) Null zu schreiben, wodurch man für $\frac{226}{9009}$ den Wert $0{\cdot}025086$ erhält.

In derselben Weise soll für $\frac{16134}{90009}$ der Decimalbruch angegeben werden; da nun $r=4$ und $16134=9\cdot1791+15$ ist, so wird $x=1791$, $a=15$ sein, daher ist

$$\frac{16134}{90009}=0{\cdot}1791\,(14)\,86\,(14)=0{\cdot}17924874$$

Die hier entwickelten Verwandlungs-Methoden sind bei einiger Uebung mit grosser Leichtigkeit durchführbar; erhält in dem Bruche $\frac{Z}{N}=\frac{9x+a}{9[10^r+1]}$ a einen solchen Wert, dass Zähler und Nenner einen gemeinsamen Factor enthalten, so resultirt eine bemerkenswerte Vereinfachung.

Wird $a=9$ oder $a=3$, so erhält der Nenner die Form 10^r+1, beziehungsweise $3[10^r+1]$, in diesen beiden Fällen ist man im Stande, Brüche so schnell dictandoweise in Decimalbrüche zu verwandeln, dass kaum jemand das Resultat so schnell nachschreiben kann.

Vermöge Gleichung 1) ist

$$\frac{Z}{N}=\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}+\ldots.$$

wo $\frac{Z}{N}$ den gemeinen Bruch vorstellt, nach **Sturm** [33. Band des Archivs, Seite 94.] kann man für $\frac{y}{10^{2r}}+\frac{x}{10^{3r}}+\ldots.$ setzen $\frac{R}{N.10^r}$, wobei R den bei der Division, nachdem r Stellen entwickelt sind, sich ergebenden Rest bedeutet. Gleichung 1) übergeht dann in:

$$\frac{Z}{N}=\frac{x}{10^r}+\frac{R}{N.10^r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Sucht man aus dieser Gleichung R, so ist

$$R=Z10^r-Nx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

Besteht Gleichung 2)

$$x+y=a\frac{10^r-1}{9},$$

so muss wie gezeigt wurde $Z=9x+a$ und $N=9[10^r+1]$ sein. Setzt man diese Werte für Z und N in Gleichung 4), so erhält man

$$R = 10^r[9x+a]-9x[10^r+1] = 9\cdot 10^r\cdot x + a10^r - 9\cdot 10^r\cdot x - 9x$$
$$= a10^r - 9x = a10^r - 9x + a - a = a[10^r+1]-[9x+a]$$

schreibt man für $10^r+1 \ldots \frac{N}{9}$ und für $9x+a \ldots Z$, so ist

$$R = \frac{a}{9}N - Z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

also

$$R+Z = \frac{a}{9}N = \frac{a}{9}9(10^r+1) = a[10^r+1] \quad \ldots\ldots 6)$$

Für $a=1$ ist $R+Z = \frac{N}{9} = 9\,\frac{10^r+1}{9} = 10^r+1$, es ist $\frac{91}{909} = 0\cdot 1001$. Dividirt man, so ergeben sich der Reihe nach die Reste 91 1 10 100, die sich, da $r=2$ ist, zu 101 ergänzen.

Für $a=3$ ist $R+Z = 3[10^r+1]$, für $a=n$ ist $R+Z = n[10^r+1]$.

Rest und Zähler ergänzen sich daher immer zu einem Vielfachen von 10^r+1.

Es ist $0\cdot 456321 = \frac{9\cdot 456+7}{9009} = \frac{4111}{9009}$. Dividirt man 4111 durch 9009, so muss, da $n=7$ ist, immer $R+Z = 7(10^r+1) = 7007$ sein. Die Reste, die sich der Reihe nach ergeben, sind

4111, 5074, 5695, 2896, 1933, 1312.

Es ist nun wirklich

$$4111+2896 = 5074+1933 = 5695+1312 = 7007.$$

Verwandelt man $\frac{71635}{90009}$ in einen Decimalbruch, so sieht man sofort, dass $71635 = 9\cdot 7958+13$ ist, daher

$$\frac{71635}{90009} = 0\cdot 79586485,$$

es wird $R+Z$ übergehen in $13[10^r+1] = 13[10^r+1] = 130013$.

Dividirt man auf gewöhnlichem Wege, so findet man für den

Zähler	71635,	86287,	52789,	77845,	für die
Reste	58378,	43726,	77224,	52168,	für die Summe
$Z+R$	= 130013	= 130013	= 130013	= 130013	

Bemerkt man bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die Existenz der Relation 5, so kann auf directem Wege die Verwandlungs-Methode aufgestellt werden, denn bestehen die Gleichungen 5) und 3) und zwar

$$Z+R=\frac{a}{9}N$$

und

$$\frac{Z}{N}=\frac{x}{10^r}+\frac{R}{N10^r},$$

so wird durch Elimination von R erhalten

$$\frac{Z}{N}10^r=x+\frac{\frac{aN}{9}-Z}{N}=x+\frac{a}{9}-\frac{Z}{N},$$

es ist

$$\frac{Z}{N}[10^r+1]=\frac{9x+a}{9},$$

daher

$$\frac{Z}{N}=\frac{9x+a}{9[10^r+1]} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 7)$$

Die Relation 7) führt zu bemerkenswerten Resultaten, wenn für a der Reihe nach die Werte 3, 6, 9, 12,.... angenommen werden.

Für $a=3$ wird

$$\frac{Z}{N}=\frac{9x+3}{9[10^r+1]}=\frac{3x+1}{3[10^r+1]} \quad \dots\dots\dots \quad 8)$$

Z. B. $0\cdot2310\,1023$ gibt sofort den gemeinen Bruch $\frac{6931}{30003}$, da $a=3$ ist; der gemeine Bruch $\frac{125617}{300003}$ ist, da $\frac{125617-1}{3}=41872$ ist, sofort

$$=0\cdot41872\,(-1)\,(+2)\,(-5)\,(-4)\,(+1)=$$
$$=0\cdot4187202001-0\cdot000001054=0\cdot4187191461.$$

Man bemerkt, dass in praktischer Beziehung für $a=3$ nur die Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen nach dieser Art vorteilhaft ist.

Aus Gleichung 8) folgt die Regel:

Soll ein rein periodischer Decimalbruch, dessen Ziffern sich zu drei ergänzen, in einen gemeinen Bruch

verwandelt werden: so vermehre man die dreifache halbe Periode um die Einheit, und teile diesen erhaltenen Zähler durch $3[10^r+1]$, wobei r die halbe Stellenzahl der Periode vorstellt.

Ist $a = 6$, so wird $\frac{Z}{N} = \frac{9x+6}{9[10^r+1]} = \frac{3x+2}{3[10^r+1]}$ . . . 9)

„ $a = 9$, „ „ $\frac{Z}{N} = \frac{9x+9}{9[10^r+1]} = \frac{x+1}{10^r+1}$ . . . . 10)

„ $a = 12$, „ „ $\frac{Z}{N} = \frac{9x+12}{9[10^r+1]} = \frac{3x+4}{3[10^r+1]}$ . . . 11)

u. s. w.

Hier soll vor allem der durch Relation 10) ausgedrückte Fall besprochen werden, aus welcher sich folgende Regel ergiebt:

Ein rein periodischer Decimalbruch, dessen Ziffern sich zu neun ergänzen, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die halbe Periode als g. Zahl betrachtet, um die Einheit vermehrt und die erhaltene Summe teilt durch 10^r+1, wo r die Stellenzahl der halben Periode vorstellt.

Z. B. 0·15678 84321, da hier $a = 9$ ist, so muss

$$\frac{15679}{100001} = 0\cdot 1567884321$$

sein.

Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner 10^r+1 ist, wird in einen Decimalbruch verwandelt werden, indem man den Zähler um die Einheit vermindert, die erhaltene Zahl als erste Hälfte der Periode betrachtet, die Ziffern der zweiten Perioden-Hälfte ergeben sich, indem die Ergänzungen zu neun gebildet werden; im Ganzen hat die Periode $2r$ Stellen.

Z. B. $\frac{64178}{100001} = 0\cdot 6417735822$, da $100001 = 10^5+1$, so muss die Periode 10 Stellen besitzen.

$\frac{17}{100001} = 0.0001699983$ u. s. f.

Für den Fall, dass $a = 9$ und $N = 10^r+1$, übergeht Gl. 5) in

$$R = \frac{a}{9}N - Z = N - Z^{*}) \quad \ldots \ldots \ldots 12)$$

Verwandelt man z. B. den gemeinen Bruch $\frac{178934}{1000001}$ in den Decimalbruch 0·178933 821066, was ohneweiteres durch blosses Hinschreiben geschehen kann, und versucht man zur Controlle den gewöhnlichen Weg, so ergeben sich als

Zähler	178934,	789339,	893383,	933822,	338211,	382107 als
Reste	821067,	210662,	106618,	66179,	661790,	617894 a. S. v.

$R+Z=1000001=1000001=100001=100001=100001=1000001=N$

Betrachtung des Ergänzungs-Gesetzes in Beziehung auf ein beliebiges Zahlen-System.

Die bis jetzt durchgeführten Untersuchungen können mit Leichtigkeit auf jedes beliebige Zahlen-System ausgedehnt werden, hier soll vor allem, das durch Gleichung 2) ausgesprochene Ergänzungs-Gesetz, in Beziehung auf ein beliebiges Zahlen-System Erörterung finden.

Vermöge Gleichung 1) ist

$$\frac{Z}{N} = \frac{9x+a}{9(10^r+1)} = \frac{x}{10^r} + \frac{y}{10^{2r}} + \frac{x}{10^{3r}} + \ldots$$

Führt man ein beliebiges Zahlen-System, dessen Basis α sein soll, ein, so muss für $10 \ldots \alpha$, und für $9 \ldots \alpha - 1$ geschrieben werden, a und r, y und x behalten die früher angenommene Bedeutung. Es ist dann

---

*) Dieser specielle Fall wurde von Franke [in seiner Zahlenlehre] angeführt, nach den Andeutungen von Sturm [Archiv 33. Band Seite 94], und von H. Professor J. Rogner [Materialen Seite 78 Nr. 563 IV], wurde dieses Ergänzungs-Gesetz 12) von Auspitz [Programm der Brünner Oberrealschule], benutzt, um die Verwandlungs-Methode abzuleiten, es wird in dieser Entwicklung: $\frac{Z}{N} = \frac{A}{10^r} + \frac{R}{N 10^r}$ gesetzt, wo A die halbe Periode, r ihre Stellenzahl, R den Rest vorstellt; es wird in dieser Entwicklung für $R = N - Z$ geschrieben, wodurch sich ergiebt: $\frac{Z}{N} = \frac{A}{10^r} + \frac{N-Z}{N 10^r}$, nach einfacher Reduction folgt unmitttelbar $\frac{Z}{N} = \frac{A+1}{10^r+1}$, welcher Ausdruck mit den unter 10) gefundenen übereinstimmt.

$$\frac{Z}{N} = \frac{a+x(\alpha-1)}{(\alpha-1)[\alpha^r+1]} = \frac{x}{\alpha^r} + \frac{y}{\alpha^{2r}} + \frac{x}{\alpha^{3r}} + \dots + \quad . . . 13)$$

Nach einfacher Reduction erhält man

$$\frac{Z}{N} = \frac{a+x(\alpha-1)}{(\alpha-1)[\alpha^r+1]} = \frac{y+\alpha^r x}{\alpha^{2r}-1} \quad . . . . 14)$$

Wird mit α^r+1 multiplicirt, so ist

$$\frac{a+(\alpha-1)x}{\alpha-1} = \frac{y+\alpha^r x}{\alpha^r-1}$$

es ist weiter

$$(\alpha^r-1)[a+(\alpha-1)x] = (\alpha-1)[y+\alpha^r x]$$

daher

$$a\alpha^r - a + (\alpha-1)x.\alpha^r - (\alpha-1)x = (\alpha-1)y + (\alpha-1)x\alpha^3,$$

so muss also

$$a[\alpha^r-1] = (\alpha-1)[x+y],$$

woraus

$$x+y = a\frac{\alpha^r-1}{\alpha-1} \quad . . . . 15)$$

oder

$$x+y = a\,\{\alpha^{r-1}+\alpha^{r-2}+\alpha^{r-3}+\dots\alpha+1\} \quad . . . . . 16)$$

der Factor $\alpha^{r-1}+\alpha^{r-2}+\dots$, stellt die Summe der aufeinander folgenden Potenzen der Grundzahl α vor, ist daher immer eine mit Einsern zu schreibende Zahl.

Ist $\alpha = 12$ und $r = 3$, so ist nach Gleichung 16)

$$x+y = a\,\{12^2+12^1+12^0\} = a \times 111,$$

denn im 12 teiligen System wird für 144+12+1 immer geschrieben 100+10+1 = 111.

Es erscheint dadurch der durch Gleichung 2 ausgesprochene Satz für jedes beliebige Zahlen--System erwiesen.

Vermöge Gleichung 15) ist

$$x+y = a\frac{\alpha^r-1}{\alpha-1}.$$

Wird nun $a = \alpha - 1$, so wird

$$x+y = \alpha^r - 1 \quad . . . . 17)$$

Im Dekadischen System stellt α^r-1 eine mit r Neunern, im 12 teiligen System eine mit dem als einziffrige Zahl anzusehenden Zeichen (11) geschriebene Zahl vor.

Für $r=3$ und $\alpha=12$ ist $x+y=12^3-1=1727$, wird 1727 im Dodekaedrischen System geschrieben, so ist

$$x+y=(11)(11)(11)$$

Aus Gleichnng 14)

$$\frac{Z}{N}=\frac{a+x(\alpha-1)}{(\alpha-1)[\alpha^r+1]}$$

folgt, wenn man statt a ... $(\alpha-1)$ schreibt

$$\frac{Z}{N}=\frac{x+1}{\alpha^r+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots . 18)$$

Gleichung 18) erweist die Anwendbarkeit der mit Hülfe von Gleichung 10) aufgestellten Verwandlungs-Methode.

Rein periodische Brüche, die in einem beliebigen Zahlen-System geschrieben erscheinen, werden, wenn die Ergänzung beim α teiligen System, zu $(\alpha-1)$ stattfindet, in gemeine Brüche verwandelt, in dem die Hälfte der Periode um die Einheit vermehrt wird. Der auf diese Weise erhaltene Zähler wird geteilt durch α^r+1, wobei r die Stellenzahl der halben Periode vorstellt.

Es sei z. B. der gegebene Duodecimalbruch 0·85 36 in den gemeinen Bruch zu verwandeln. Da nun $a=11=12-1$, so ist $0{\cdot}8536=\frac{86}{101}$ wobei der nach dem 12 teiligen Systeme geschriebene Bruch $\frac{86}{101}$ dieselbe Bedeutung hat, wie der Dekadische Bruch $\frac{102}{145}$.

Soll ein gemeiner Bruch, der nach dem α teiligen Systeme geschrieben ist, und dessen Nenner die Form α^r+1 hat, in einen periodischen Bruch verwandelt werden, so vermindert man den Zähler um die Einheit. Die erhaltene Differenz ist die erste Hälfte der Periode, die zweite Hälfte besteht aus Ziffern die sich mit den entsprechenden Ziffern zu $\alpha-1$ ergänzen. Die Stellenzahl ist immer $2r$.

Es sei für den im 12 teiligen Systeme geschriebene Bruch $\frac{128}{1001}$

der Duodecimalbruch zu entwickeln, es ist $128-1=127$, daher $\frac{128}{1001}=127_{(10)}94$.

Man bemerkt sofort eine practische Verwertung für das Ziffer-Rechnen, wenn man die 13tel, 145tel, 1729tel .... im Allgemeinen Bruche, deren Nenner die Form 12^r+1 besitzen, die im Dekadischen Systeme geschrieben sind, in Decimalbrüche verwandeln soll, und berücksichtigt, dass diese Brüche 6, 29 .... Stellen besitzen, während bei den entsprechenden Duodecimalbrüchen nur 2, 4, 6 im Allgemeinen $2r$ Stellen vorkommen.

Schreibt man z. B. für die im Dekadischen Systeme geschriebenen gemeinen Brüche $\frac{5}{13}, \frac{32}{145}, \frac{176}{1729}$ die im 12 teiligen Systeme sich ergebenden Werte, so erhält man

für $\frac{5}{13}$ .... $\frac{5}{11}=0{\cdot}4\,7$ also nur 2 Stellen

für $\frac{32}{145}$ .... $\frac{28}{101}=0{\cdot}27\,94$ „ „ 4 „

für $\frac{176}{1729}$ .... $\frac{128}{1001}=0{\cdot}127_{(10)}04$ „ „ 6 „

Hier wurde die Untersuchung nur durchgeführt, wenn der Nenner die Form α^r+1 besitzt, ist $N=(\alpha-1)[\alpha^r+1]$ so ergeben sich Resultate, die nicht nur in theoretischer Beziehung bemerkenswert sind, sondern auch im praktischen Rechnen Vorteile bieten.

Beurteilung der Stellenzahl der Periode, die ein gemeiner Bruch, dessen Nenner ein aliquoter Teil von 10^r+1 ist, liefert.

Uebergeht man zum 10 teiligen Systeme, so dient zu dieser Beurteilung Gleichung 10) und 2) und zwar

$$\frac{Z}{N}\frac{x+1}{10^r+1}=\frac{x}{10^r}+\frac{y}{10^{2r}}+\ldots \quad \text{und} \quad x+y=a\frac{10^r-1}{9}$$

für $a=9$ ist

$$x+y=10^r-1=999\ldots \qquad 18)$$

In dieser Entwicklung [Gleichung 18] ist x von y abhängig, keineswegs aber x von r, es ist daher für jeden Wert von x, beziehungsweise von Z, die Stellenzahl der Periode $2r$.

Setzt man in 10^r+1 für r der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 ....

so ist sofort klar, dass die 11tel — 2, die 101tel — 4, die 1001tel — 6 u. s. f. Stellen besitzen.

Nimmt man für Z einen aliquoten Teil des Nenners an, bringt man den gemeinen Bruch auf die einfachste Form, so ergeben sich für die Periode $2r$ Stellen.

Zerlegt man z. B. 1001 in die einfachen und zusammengesetzten Factoren 7, 77, 13, 91, 143, 11, so ergiebt sich sofort, dass alle 7tel, 77tel, 13tel, 91tel und 143tel 6 Stellen haben müssen. Die Elftel gehen aus 10^1+1 hervor, haben daher nur 2 Stellen, man könnte übrigens auch z. B. für $\frac{1}{11}$ schreiben $0\cdot090\ 909$.

Ist daher die Aufgabe zu lösen $\frac{1}{7}, \frac{1}{77}, \frac{1}{13}, \frac{1}{91}, \frac{1}{143}$ in Decimalbrüche zu verwandeln, so ist es nur notwendig die 3 ersten Stellen durch Division zu finden, die folgenden Stellen ergeben sich durch Ergänzung zur neun. Es ist

$$\frac{1}{7} = 0\cdot142\ 857\,, \quad \frac{1}{77} = 0\cdot012\ 987\,, \quad \frac{1}{13} = 0\cdot076\ 923\,,$$
$$\frac{1}{91} = 0\cdot010\ 989\,, \quad \frac{1}{143} = 0\cdot006\ 993.$$

Ist der Zähler von der Einheit verschieden, so bleibt die Methode dieselbe.

Das unter 12) angegebene Gesetz modificirt sich dahin, dass die Ergänzungen des Zählers und Restes, zu den Divisoren 7, 77, 13, 91, 143 stattfindet.

Da weiter $10^4+1 = 73\,.\,137$ ist, so haben die Brüche $\frac{Z}{73}$ und $\frac{Z}{137}$ 8 Stellen; es ist $\frac{1}{73} = 0\cdot0136\ 9863$, $\frac{1}{137} = 0\cdot0072\ 9927$.

Da $10^8+1 = 17\,.\,5882353$ ist, so müssen alle Brüche, deren Nenner 17 oder 5882353 ist, 16 Stellen haben.

Ist ein gemeiner Bruch, dessen Nenner ein aliquoter Teil von 10^r+1 ist, dessen Stellenzahl bekannt ist, gegeben, so ist die Aufgabe sofort lösbar, für irgend eine positive Potenz dieses Nenners ein Vielfaches von der Form 10^r+1 zu finden.

Für $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ hat man $7\,.\,2r$ Stellen, da nun der Nenner 7 ist,

so muss $r = 3$ sein, daher müssen die Brüche $\frac{Z}{49}$ .... 42 Stellen erhalten, woraus unmittelbar folgt, dass $10^{21} + 1$ durch $49 = 7^2$ teilbar ist.

Aus einer ähnlichen Betrachtung findet man, dass $10^{11} + 1$ ein Vielfaches von $11^2 = 121$ ist.

Ist der Exponent grösser als 2, so führt dasselbe Verfahren zum Ziele.

IX.

Verschiedene Sätze über Dreiecktransversalen.

Von

Emil Hain.

I.

Verbindet man den Schwerpunkt S des Dreieckes ABC mit den Ecken, so entstehen die Dreiecke SBC, SCA, SAB, deren Umkreishalbmesser r_a, r_b, r_c seien. Ist ferner $\mathfrak{R}$ der Umkreisradius für das von den Schwerpunkttransversalen als Seiten gebildete Dreieck und r derselbe Radius für das Dreieck ABC, so besteht folgende Relation:

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{r_a r_b r_c}{r}$$

Um dieselbe zu beweisen, setzen wir

$$AS = a', \qquad BS = b', \qquad CS = c'.$$

Da die Dreiecke SBC, SCA, SAB gleichen Flächeninhalt haben, so ist, wenn F den Flächeninhalt des Dreieckes ABC bezeichnet,

$$r_a = \frac{a b' c'}{4 \cdot \frac{F}{3}} = \frac{3r}{bc} \cdot b' c' \tag{1}$$

$$r_a . a' = \frac{3a}{4F} . a' b' c' = \frac{2a}{3} \cdot \frac{s_a s_b s_c}{3F},$$

wo s_a, s_b, s_c die Seitenhalbirenden sind. Nach einer bekannten Beziehung aber ist

$$\frac{s_a . s_b . s_c}{4 . \frac{3}{4} F} = \mathfrak{R}, \quad \text{also}$$

$$r_a . a' = \frac{2}{3} a . \mathfrak{R} \tag{2}$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{r_a . a'}{\mathfrak{R} . a} = \frac{r_b . b'}{\mathfrak{R} . b} = \frac{r_c . c'}{\mathfrak{R} . c} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Aus Gleichung (1) und (2) folgt:

$$r_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \mathfrak{R}}{a'} = \frac{3r\, b' c'}{bc}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{9}{2} r \cdot \frac{a' b' c'}{abc}.$$

Nun ist nach (3)

$$\frac{r_a . r_b . r_c . a' b' c'}{\mathfrak{R}^3 . abc} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{a' b' c'}{abc} = \frac{8}{27} \cdot \frac{\mathfrak{R}^3}{r_a r_b r_c}$$

somit

$$\mathfrak{R} = \frac{9}{2} . r . \frac{8}{27} \cdot \frac{\mathfrak{R}^3}{r_a . r_b . r_c}$$

das ist

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{r_a r_b . r_c}{r}.$$

II.

Sind P_a, P_b, P_c die Fusspunkte der vom Schwerpunkt auf die Dreiecksseiten gefällten Normalen, so ist

$$\triangle P_a P_b P_c = \frac{4}{9} . F^3 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} \right)$$

wo F wieder den Flächeninhalt des Dreieckes ABC bezeichnet.

Betrachtet man nemlich das Dreieck $P_b S P_c$, so ist in demselben der Winkel bei S das Supplement zum Winkel BAC.

Es ist also, wenn man überdies

$$SP_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{F}{a}$$

berücksichtigt,

$$\overline{P_b P_c}^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{F}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{F}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{F^2}{bc}\right)\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$P_b P_c = \sqrt{\frac{4}{9}\frac{F^2}{b^2c^2}(2b^2+2c^2-a^2)} = \frac{4Fs_a}{3bc}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel des Dreiecks AAC mit α, β, γ und hält die frühere Bedeutung von a', b', c' aufrecht, so hat man:

$$P_b P_c = a'\sin\alpha, \quad P_c P_a = b'\sin\beta, \quad P_a P_b = c'\sin\alpha$$

$$\triangle P_b S P_c = \frac{SP_b . SP_c \sin\alpha}{2} = \frac{2}{9}\frac{F^2\sin\beta}{ac} = \frac{F}{9}\sin\beta^2$$

$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4r^2}$$

$$\triangle P_a P_b P_c = \frac{a^2+b^2+b^2}{36r^2}.ABC = \frac{4}{9}F^3\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right).$$

Ebenso kann bewiesen werden, dass der Umkreisradius eines jeden Dreieckes $P_b P_c S$ gleich ist der Hälfte der zugehörigen Ecktransversale durch S. Bezeichnet man mit r_a' den Umkreisradius des Dreieckes $P_b P_c S$, so ist

$$P_b P_c . SP_b . SP_c = a'\sin\alpha . \frac{4}{9}\frac{F^2}{bc} = \frac{2}{9} . Fa'\sin\alpha$$

$$4\triangle P_b P_c S = \frac{4F}{9} . \sin\alpha^2$$

woraus sich ergiebt:

$$r_a' = \frac{a'}{2}.$$

III.

Das Höhenfusspunktdreieck desjenigen Dreieckes, dessen Ecken die Berührungspunkte des Inkreises sind, hat zum Flächeninhalt den Ausdruck:

$$\frac{16F^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}.$$

Sind A', B', C' die Berührungspunkte, ϱ der Radius des Inkreises, so hat das durch sie gebildete Dreieck die Winkel

$$R - \frac{\alpha}{2}, \quad R - \frac{\beta}{2}, \quad R - \frac{\gamma}{2}$$

und die Seiten

$$2\varrho\cos\frac{\alpha}{2},\quad 2\varrho\cos\frac{\beta}{2},\quad 2\varrho\cos\frac{\gamma}{2}$$

und zum Flächeninhalte den Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\varrho}{r}\cdot F$$

wo α, β, γ, r, F die frühere Bedeutung für das Urdreieck haben.

Zieht man in dem spitzwinkligen Dreieck $A'B'C'$ die Höhen, so bilden die Fusspunkte derselben offenbar ein Dreieck, das innerhalb der Fläche $A'B'C'$ liegt und dem Urdreieck nach den bekannten Eigenschaften des Höhenpunktdreieckes ähnlich ist.

Wir haben sonach für eine Seite des Höhenfusspunktdreieckes von $A'B'C'$ den Ausdruck

$$2\varrho\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)=\varrho\sin\alpha$$

und für den Flächeninhalt

$$\frac{\varrho^2\sin\alpha\sin\beta\,.\,\sin\gamma}{2}=\frac{\varrho^2}{4r^2}F=\left(\frac{\varrho}{2r}\right)^2.\,F.$$

Bezeichnen wir die Höhenfusspunkte des Dreieckes $A'B'C'$ mit A'', B'', C'', so haben wir der letzten Formel zufolge ausserdem:

$$\triangle\,ABC=\frac{(\triangle\,A'B'C')^2}{\triangle\,A''B''C''}.$$

Wien, d. 6. Oct. 1873.

X.

Miscellen.

1.

Equation du cercle en valeur des dérivées et du rayon.

1. **Théorème.** Tout cercle de rayon R peut être représenté par l'équation

$$f_x'^2+f_y'^2-2\cos\theta f_x'f_y' = 4R^2\sin^2\theta,$$

où $f(x,y)=0$ désigne l'équation algébrique du cercle, et θ l'angle des axes de coordonnées.

Soient a, b les coordonnées du centre C du cercle; x, y les coordonnées d'un point M de la circonférence. L'équation du cercle sera

$$f(x,y) = (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta-R^2=0;$$

nous en tirons

$$f_x' = 2(x-a)+2(y-b)\cos\theta,$$
$$f_y' = 2(y-b)+2(x-a)\cos\theta.$$

Cela posé, menons par le centre C les parallèles CA, CB aux axes de coordonnées, et par le point M les perpendiculaires MA, MB sur ces parallèles. Il est facile de voir que

$$AC = x-a+(y-b)\cos\theta = \tfrac{1}{2}f_x',$$
$$BC = y-b+(x-a)\cos\theta = \tfrac{1}{2}f_y'.$$

Comme le triangle ABC donne

$$AB^2 = AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\theta,$$

il vient

$$4AB^2 = f_x'^2+f_y'^2-2\cos\theta f_x'f_y'.$$

Or, dans le cercle circonscriptible au quadrilatère birectangle $ACBM$, la droite AB est la corde qui sous-tend l'arc dont la moitié est la mesure de l'angle inscrit θ; et puisque le diamètre de ce cercle est R, on a

$$\tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}R\sin\theta;$$

donc, en remplaçant, on trouve

$$f_x'^2 + f_y'^2 - 2\cos\theta f_x' f_y' = 4R^2\sin^2\theta;$$

pour l'équation générale de tous les cercles dont le rayon est R, θ étant l'angle des axes *).

2. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, cette équation se simplifie et devient

$$f_x'^2 + f_y'^2 = 4R^2.$$

3. On trouverait de même que, si $f(x,y,z) = 0$ désigne l'équation algébrique d'une sphère, R rayon de cette sphère; λ, μ, ν les angles des axes de coordonnées; la sphère peut être représentée par l'équation

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 - 2\cos\lambda f_y' f_z' - 2\cos\mu f_z' f_x' - 2\cos\nu f_x' f_y' = 4R^2\Delta^2,$$

où

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

4. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation de la sphère sera

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 = 4R^2.$$

Georges Dostor.

---

*) Wenn man aus den beiden obigen Gleichungen

$$f_x' = 2(x-a) + 2(y-b)\cos\theta$$
$$f_y' = 2(y-b) + 2(x-a)\cos\theta$$

die Grössen $x-a$, $y-b$ bestimmt, so erhält man:

$$x - a = \frac{f_x' - f_y'\cos\theta}{2\sin\theta^2}, \quad y - b = \frac{f_y' - f_x'\cos\theta}{2\sin\theta^2};$$

und führt man nun diese Ausdrücke in die Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta = R^2$$

ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen dieselbe Gleichung.

Grunert.

2.

Ueber die Auflösung des linearen Systems von Gleichungen:

$$(1) \ldots\ldots \sum_{r=1}^{r=m} x_r \sin\frac{rn\pi}{m+1} = k_n \, (n=1,\ 2,\ldots m)$$

Mit diesen Gleichungen beschäftigt sich zuerst Lagrange in seinen Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles (Miscellanea Societ. Taurinensis, T. I, 1759). Eine andere noch immer sehr weitläufige Auflösung gibt Crelle in seinem Journal Bd. 43, p. 37.

Einfacher gelangt man zu dem Lagrange'schen Resultat auf folgendem Weg:

Unter n eine positive sonst aber noch unbestimmt gelassene Zahl verstanden multipliciren wir diese Gleichungen der Ordnung nach mit $\sin n\alpha,\ \sin 2n\alpha,\ \sin 3n\alpha, \ldots \sin mn\alpha$, wo $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$, und addiren alle. Bezeichnet Δ_r den Coefficient von x_r, so ist:

$$(2) \quad \Sigma x_r \Delta_r = k_1 \sin n\alpha + k_2 \sin 2n\alpha + k_3 \sin 3n\alpha + \ldots + k_m \sin mn\alpha$$

$$(3) \quad 2\Delta_r = 2\sin r\alpha \sin n\alpha + 2\sin 2r\alpha \sin 2n\alpha + 2\sin 3r\alpha \sin 3n\alpha + \ldots + 2\sin mr\alpha \sin mn\alpha$$

und wenn man die goniometrische Transformation anwendet:

$$2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v),$$

so wird:

$$2\Delta_r = \{\cos(r-n)\alpha + \cos 2(r-n)\alpha + \cos 3(r-n)\alpha + \ldots + \cos m(r-n)\alpha\} - \{\cos(r+n)\alpha + \cos 2(r+n)\alpha + \cos 3(r+n)\alpha + \ldots + \cos m(r+n)\alpha\}$$

Diese beiden Reihen lassen sich leicht summiren, denn bekanntlich ist:

$$\cos z + \cos 2z + \cos 3z + \ldots + \cos mz = \frac{\sin\frac{1}{2}mz \, . \cos\frac{1}{2}(m+1)z}{\sin\frac{1}{2}z}$$

und man erhält:

$$2\Delta_r = \frac{\sin\frac{1}{2}m(r-n)\alpha \, . \cos\frac{1}{2}(m+1)(r-n)\alpha}{\sin\frac{1}{2}(r-n)\alpha} - \frac{\sin\frac{1}{2}m(r+n)\alpha \, . \cos\frac{1}{2}(m+1)(r+n)\alpha}{\sin\frac{1}{2}(r+n)\alpha}$$

oder durch abermalige Transformation mittelst der Gleichung:

$$2\cos u\sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v),$$

$$(4) \ldots \quad 4\Delta_r = \frac{\sin\frac{1}{2}(2m+1)(r-n)\alpha}{\sin\frac{1}{2}(r-n)\alpha} - \frac{\sin\frac{1}{2}(2m+1)(r+n)\alpha}{\sin\frac{1}{2}(r+n)\alpha}.$$

Es sei zuerst die willkürliche Grösse n verschieden von r oder $r-n$ nicht Null; dann sind mit Anwendung des Wertes von $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$ folgende zwei Umwandlungen gestattet:

$$\sin\tfrac{1}{2}(2m+1)(r-n)\alpha = \sin\{(m+1)(r-n)\alpha - \tfrac{1}{2}(r-n)\alpha\} =$$
$$\sin\{(r-n)\pi - \tfrac{1}{2}(r-n)\alpha\} = (-1)^{r-n+1}.\sin\tfrac{1}{2}(r-n)\alpha,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(2m+1)(r+n)\alpha = \sin\{(m+1)(r+n)\alpha - \tfrac{1}{2}(r+n)\alpha\} =$$
$$\sin\{(r+n)\pi - \tfrac{1}{2}(r+n)\alpha\} = (-1)^{r+n+1}.\sin\tfrac{1}{2}(r+n)\alpha,$$

hierdurch wird

$$4\Delta_r = (-1)^{r-n+1} - (-1)^{r+n+1} = 0.$$

Ist aber $n = r$, so erscheint der erste Bruch in (4) in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und der wahre Wert desselben ist $(2m+1)$, während für den zweiten Bruch die vorige Umwandlung seines Zählers andwendbar bleibt. In diesem Falle ist also

$$4\Delta_r = (2m+1) - (-1)^{2r+1} = 2m+2 \quad \text{oder} \quad \Delta_r = \frac{m+1}{2}.$$

Diese Ergebnisse angewendet auf die Gleichung (2) verwandeln dieselbe in folgende:

$$\frac{m+1}{2}x_r = k_1\sin r\alpha + k_2\sin 2r\alpha + k_3\sin 3r\alpha + \ldots + k_m\sin mr\alpha$$

oder

$$(5) \quad x_r = \frac{2}{m+1}\{k_1\sin r\alpha + k_2\sin 2r\alpha + k_3\sin 3r\alpha + \ldots + k_m\sin mr\alpha\},$$

womit für $r = 1, 2, 3, \ldots m$ und $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$ die vollständige Auflösung des im Eingange aufgestellten Systems von Gleichungen gegeben ist.

Franz Unferdinger,
Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markte in Wien.

8.

Ueber einen Satz von der Parabel.

Als gegeben werde betrachtet das Dreieck ABC. Von A aus wird die Gerade BC durch einen zu derselben perspectivischen Strahlenbüschel projicirt, so dass z. B. dem Punkte D der Strahl d_2 entspricht. Andrerseits werde die Gerade BC durch einen Parallelstrahlenbüschel projicirt, dessen Strahlen die Richtung von AB haben. Dem Punkte D entspricht dann der Strahl d. Dieser Parallelstrahlenbüschel bestimmt auf der Geraden AC eine zu den beiden vorigen Gebilden projectivische Punktreihe. Dem Strahle d z. B. entspricht der Punkt D_1. Endlich werde das gerade Gebilde AC von einem Parallelstrahlenbüschel projicirt, dessen Strahlen die Richtung von BC haben. Dem Punkte D_1 entspricht der Strahl d_1. Dieser letzte Parallelstrahlenbüschel ist somit projectivisch zu dem Strahlenbüschel A, und beide erzeugen einen Kegelschnitt, von welchem E ein Punkt ist. Ein Strahl von A wird parallel sein zu BC, also auch zu dem ihm entsprechenden Strahl, weswegen ein Punkt der erzeugten Curve im Unendlichen liegt in der Richtung BC. Daher ist die erzeugte Curve eine Parabel, von welcher BC die Richtung der Durchmesser ist. Insofern e und e_2 entsprechende Strahlen sein müssen, und e die Kanten der beiden Büschel verbindet, muss AB eine Tangente der erzeugten Parabel sein mit A als Berührungspunkt. Dass auch C der Parabel angehören muss, ist leicht ersichtlich.

Weil $DD_1 \parallel AB$, so verhält sich:

$$DC : DB = D_1C : D_1A,$$

und weil $D_1E \parallel BC$ ist, so verhält sich:

$$D_1C : D_1A = ED : EA,$$

also:

$$DC : DB = ED : EA.$$

Ist demnach der Punkt D angenommen, so gelangt man zu dem Punkte der Parabel E, indem man DA in E so teilt, dass

$$ED : EA = DC : DB$$

sich verhält.

Daher lässt sich aussprechen der Lehrsatz:

Wird in einem Dreieck ABC die Seite BC in einem Punkte D geteilt, D mit A verbunden, und DA in E in

demselben Verhältnisse geteilt wie BC in D, so ist der geometrische Ort aller auf diese Weise bestimmten Punkte E eine Parabel, welche durch einen der Endpunkte von BC geht, es sei C, und von der Geraden AB berührt wird, und deren Durchmesser zu BC parallel sind.

Analytisch lässt sich dieser Satz beweisen, wie folgt.

Die Gleichungen der drei gegebenen Punkte A, B, C seien:

$$A \equiv au + bv + 1 = 0,\ B \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0,\ C \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0,$$

dann ist die Gleichung des Punktes D:

$$B + \lambda C = 0,$$

wo $\lambda : 1 = DB : DC$ ist. Die Gleichung des Punktes E ist dann:

$$A + \frac{\lambda}{1+\lambda}(B + \lambda C) = 0,$$

oder:

$$A + \lambda(A + B) + \lambda^2 C = 0.$$

Halten wir eine der Geraden, deren Coordinaten u, v der Gleichung dieses Punktes genügen, fest, so liefert die Gleichung zwei Werte von λ zu u, v, welche λ_1 und λ_2 heissen sollen. Die Gerade u, v verbindet also die beiden Punkte λ_1 und λ_2 des geometrischen Orts. Soll die Gerade u, v Tangente sein des geometrischen Orts, so müssen die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung gleich sein, was geschieht unter der Bedingung:

$$(A + B)^2 - 4AC = 0$$

oder:

$$((a + a_1)u + (b + b_1)v + 2)^2 - 4(au + bv + 1)(a_1 u + b_1 v + 1) = 0.$$

Man erkennt hierin die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten, welcher eine Parabel sein muss, weil das nach u, v constante Glied gleich Null ist, wie leicht zu ersehen. Beachten wir, dass

$$(a + a_1)u + (b + b_1)v + 2 = 0$$

die Gleichung des Halbirungspunktes von AB ist, welchen wir F nennen wollen, während auch zugleich

$$(a + a_1)u + (b + b_1)v + 2 \equiv 2F$$

sein soll, so nimmt die Gleichung der Parabel die Form an:

$$F^2 - AC = 0,$$

welche aussagt, dass FA und FC Tangenten der Parabel mit den Berührungspunkten A und C sind. Weil aber die Gerade, welche F mit dem Halbirungspunkte G von AC verbindet, ein Durchmesser parallel zu BC ist, so folgt, dass BC die Richtung der Durchmesser angibt.

Dr. Silldorf,
Lehrer an der städt. Realschule in Magdeburg.

4.

Zwei Dreiecksätze.

Lehrsatz. Die Transversalen eines Dreiecks bilden mit den von ihnen halbirten Seiten Winkel, deren Cotangenten die Summe null geben.

Seien in (Fig. 1.) die Segmente CE, BE resp. mit β, γ bezeichnet, so ist

$$\cot \nu_1 = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{a}{2} - \gamma}{h} = \frac{\frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma}{h} = \frac{\beta-\gamma}{2h}$$

$$= \frac{(\beta-\gamma)a}{4\varDelta} = \frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)}{4\varDelta} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{4\varDelta}$$

$$= \frac{b^2-c^2}{4\varDelta}$$

Ebenso

$$\cot \nu_2 = \frac{c^2-a^2}{4\varDelta}; \qquad \cot \nu_3 = \frac{a^2-b^2}{4\varDelta}$$

$$\cot \nu_1 + \cot \nu_2 + \cot \nu_3 = 0$$

Einfacher Beweis der von Herrn Prof. Bretschneider gefundenen Erweiterung des vorstehenden Satzes:

Fällt man von einem beliebigen Punkt O (Fig. 2.) Lote OD, OE, OF auf die Seiten des Dreiecks, so soll

$$\cot ADC + \cot BEA + \cot CFB = 0$$

sein.

Zum Beweise ziehe man die 3 Höhen und verbinde O mit den Ecken des Dreiecks.

Man kann dann, gültig für alle Werte von k, auf der Parabelaxe vom Scheitel A an die Strecke $AB = \frac{5}{2}$, und von B aus zurück $BC = \sqrt{7} = \sqrt{4^2 - 3^2}$ abtragen und in B die Ordinate BD errichten. Dann bleibt im einzelnen Falle nur übrig, auf BD die Strecke $BM = -b$ abzuschneiden und um M einen Kreis durch C zu schlagen. Dieser schneidet die Parabel in 4 Punkten, deren Ordinaten, beziehungsweise zur Bestimmung von b, die angeführten Werte von $2z$ haben.

Ein Beispiel der kubischen Gleichung ist die folgende:

$$z^3 - \tfrac{3}{4} z = \tfrac{1}{4} \cos 3\varphi$$

deren Wurzeln sind

$$z = \cos\varphi, \qquad \cos\left(\varphi \pm \frac{2\pi}{3}\right)$$

Hier wird

$$\alpha = 1 + \tfrac{3}{16}\delta^2; \qquad \beta = \frac{\delta^3}{32}\cos 3\varphi$$

insbesondere für $\delta = 4$

$$\alpha = 4; \qquad \beta = 2\cos 3\varphi$$

Man kann demnach, zum Gebrauch für die Trisectionen aller Winkel, auf der Axe die Strecke $AB = 4$ abschneiden, um B mit dem Radius $= 2$ einen Kreis schlagen und die Ordinate BD als festen Schenkel des gegebenen Winkels 3φ ziehen (und rückwärts verlängern). Im einzelnen Falle macht man dann den Centriwinkel $DBN = 3\varphi$, fällt das Lot NM auf BD, und schlägt um M einen Kreis durch den Scheitel A. Dieser schneidet die Parabel auf der Seite, wo M liegt, in 1 Punkte, dessen Ordinate $= 4\cos\varphi \left(k\pi - \frac{\pi}{6} < \varphi < k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, und auf der andern Seite in 2 weniger deutlich markirten Punkten, deren Ordinaten die beiden andern Lösungen darstellen.

Das vorstehende Verfahren würde ich, falls keine Anzeichen vorlägen, ob es bekannt sei oder nicht, für überflüssig gehalten haben zu publiciren, weil es sich zu offen darzubieten schien um einer Mitteilung zu bedürfen. Da jedoch in neuerer Zeit die Aufgabe der Winkeltrisection sachlich und historisch so äusserst vielfach durchgesprochen, und gleichwol nicht nur dieser Methode, sowie überhaupt der Anwendung einer festen Parabel keine Erwähnung getan worden ist, sondern sogar Aeusserungen wiederholt ans Licht treten, welche die Möglichkeit geradezu in Abrede stellen, so wollte ich dem gegenüber die Existenz des Constructionsmittels einfach constatiren.

R. Hoppe.

XI.

Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung.

Von

Fr. G. Affolter.

Die Erzeugung[1]) der Fläche dritter Ordnung, die ich im Folgenden mitteile, scheint mir nicht ganz ohne Interesse zu sein, weil durch dieselbe sich leicht und übersichtlich die 27 Geraden der Fläche darstellen lassen.

Ausserdem werden wir in den Stand gesetzt die Theorie der 27 Geraden, so wie einiger von ihnen abhängiger Geradensysteme des Raumes unabhängig von der Fläche mit den elementarsten Hülfsmitteln zu begründen.

I.

Erzeugung der Fläche dritter Ordnung.

Es seien im Raume fünf Punkte so gegeben, dass keine drei derselben in einer Geraden und keine vier davon auf derselben Ebene liegen, und bezeichnen wir dieselben einer bestimmten, jedoch beliebig gewählten, Reihenfolge nach mit 1, 2, 3, 4, 5, und allgemein irgend eine davon mit n, so folgt aus der cyklischen Reihenfolge dieser Punkte sogleich, dass

---

1) Wie mir kürzlich Herr Professor Schläfli mitteilte, hatte schon Steiner durch diese Erzeugung die 27 Geraden der Fläche dritten Grades dargestellt.

$$n \pm m . 5^k \pm t, \quad n \mp (5-t) \quad \text{und} \quad n \pm t$$

je denselben Punkt darstellen, wo n, m, k, t ganze positive, sonst aber beliebig gewählte Zahlen sind. Die fünf Punkte bezeichnen wir daher allgemein mit

$$n-2, \quad n-1, \quad n, \quad n+1, \quad n+2$$

Es ist also der Punkt			
	$n-3$	identisch mit	$n+2$
	$n-4$	" "	$n+1$
	$n-5$	" "	n
	$n+3$	" "	$n-2$
	$n+4$	" "	$n-1$
	$n+5$	" "	n
	$n \pm 6$	" "	$n \pm 1$
	etc.		etc.

Verbinden wir die fünf Punkte n der Reihe nach zu zwei und zwei je durch eine Gerade, so erhalten wir dadurch ein einfaches räumliches Fünfeck oder Fünfseit. Bezeichnen wir diese seine fünf Seiten mit

$$S_{12}, \quad S_{23}, \quad S_{34}, \quad S_{45}, \quad S_{51}$$

oder, da es uns später besser dient, allgemein mit

$$S_{n,n+1}, \quad S_{n+1,n+2}, \quad S_{n+2,n-2}, \quad S_{n-2,n-1}, \quad S_{n-1,n}.$$

Die Ebenen, auf denen je drei aufeinander folgende Ecken des Fünfecks liegen, bezeichnen wir mit E_n und zwar

liegen auf der Ebene E_n	die drei Punke	$n-1$,	n,	$n+1$
" " " " E_{n+1}	" " "	n,	$n+1$,	$n+2$
etc.		etc.		

Jeder Ecke und jeder Ebene entspricht eine Gegenseite, und zwar liegt der Ecke n wie der Ebene E_n je die Seite $S_{n+2,n-2}$ gegenüber.

Lassen wir nun eine Ebene C sich um eine Gerade R, die keine der fünf Seiten S schneidet, drehen, so bestimmt sie in jeder Lage C_y mit den fünf Seiten S fünf Schnittpunkte s, die den Kegelschnitt K_y bestimmen. Die Gesammtheit der Kegelschnitte K_y erfüllen eine bestimmte Fläche dritter Ordnung.

Um dies zu beweisen, beachten wir zunächst, dass die Ecken n des Fünfecks einfache Punkte der Fläche F_3 sind. Legen wir durch die Punkte $n-1$ und $n+1$ die Gerade G, so liegt diese ganz in der Ebene E_n. *Nehmen* wir an, die [illegible] Kegelschnitt-K_y erzeugte Fläche sei von

der $p$ten Ordnung, so hat G ausser den beiden Ecken $n-1$ und $n+1$ noch $p-2$ Punkte mit ihr gemein. Es sei a_1 einer dieser Punkte, dann muss der Kegelschnitt der Ebene C, welche durch den Punkt a_1 hindurch geht, in die Schnittgerade G_n dieser Ebene mit der Ebene E_n und eine zweite Gerade $G_{n+2,n-2}$ degeneriren. Die Gerade G_n schneidet die Seiten $S_{n,n+1}$ und $S_{n-1,n}$ und kann daher die Seiten $S_{n+1,n+2}$ und $S_{n-1,n-2}$ nicht schneiden. C schneidet sogleich $G_{n+2,n-2}$ die zwei Geraden $S_{n+1,n+2}$ und $S_{n-1,n-2}$ und daher kann sie $S_{n+2,n-2}$ nicht schneiden. Diese letztere Seite wird daher von G_n geschnitten. Hieraus folgt, da G_n und $G_{n+2,n-2}$ die Gerade R schneiden, dass G_n als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Ebene E_n mit den Geraden $S_{n+2,n-2}$ und R angesehen werden kann, und dass es folglich nur eine Gerade G_n und also auch nur einen Punkt a_1 giebt.

Es ist also

$$p-2=1$$

d. h. die Fläche ist, wie behauptet wurde, von der dritten Ordnung.

Da jede Ebene die Fläche F_3 in einer Curve dritter Ordnung schneidet, so folgt, weil in jeder Ebene C_y ein Kegelschnitt K_y der Fläche liegt, dass auch die Gerade R auf F_3 liegt und zwar als einfache Gerade; d. h. durch jeden Punkt der Geraden R geht ein und nur ein Kegelschnitt K_y.

II.

Darstellung der 27 Geraden der Fläche F_3.

Von den Geraden, welche auf F_3 liegen, kennen wir

(1) $$R$$

ferner die fünf Seiten S des Fünfseits oder die Geraden

(2) $$S_{12},\quad S_{23},\quad S_{34},\quad S_{15},\quad S_{51}$$

R schneidet keine dieser S, jedoch diese unter sich und zwar jede die Vorangehende und Nachfolgende, was wir hier, wie auch später immer mit ($\cdot\cdot$) bezeichnen, so dass wir z. B. haben

(3) $$S_{n+2,n-2}\ (\cdot\cdot)\ S_{n+1,n+2},\quad S_{n-1,n-2}.$$

Aus der obigen Herleitung der Ordnungszahl der Fläche ersehen wir, dass die Geraden G_n und $G_{n+2,n-2}$ auch auf F_3 liegen. Geben wir n fünf aufeinander folgende Werte, so haben wir die 10 Geraden

(4) $G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad G_4, \quad G_5$

(5) $G_{34}, \quad G_{45}, \quad G_{51}, \quad G_{12}, \quad G_{23}$

wo denn alle R sowie je zwei über einander stehende sich schneiden. Diese 10 Geraden bilden also mit R je fünf Dreiecke.

Beachten wir, dass der Schnitt einer jeden Ebene mit der F_3 eine Curve dritten Grades ist, dass, wenn somit eine Ebene F_3 längs zweier Geraden schneidet, sie dieselbe noch in einer dritten Geraden schneiden muss, so erhalten wir, wie folgt, noch weitere Geraden der F_3. Wir legen durch G_n und $S_{n+2,n-2}$ die Ebene C_n, so schneidet diese F_3 noch in der dritten Geraden $\Gamma_{n+2,n-2}$. Geben wir n fünf aufeinander folgende Werte, so erhalten wir die fünf Geraden

(6) $\Gamma_{34}, \quad \Gamma_{45}, \quad \Gamma_{51}, \quad \Gamma_{12}, \quad \Gamma_{23}$

Je drei Geraden, welche auf F_3 liegen und ein Dreieck bilden, müssen zusammen von allen andern auf F_3 liegenden Geraden geschnitten werden, somit eine von solchen drei Geraden schneidet die Geraden der Fläche, welche die andern zwei nicht schneiden. Hieraus folgt, dass die Geraden, welche $\Gamma_{n+2,n-2}$ schneiden, gegeben sind durch

(7) $\Gamma_{n+2,n-2}\ (\cdot\cdot) \quad \begin{cases} G_{n-1}, \quad G_n, \quad G_{n+1}, \quad G_{n-1,n}, \quad G_{n,n+1}. \\ S_{n+2,n-2}, \end{cases}$

Ersetzt man n durch $n \pm 2$, so erkennt man sogleich aus dieser Zusammenstellung (7), dass $\Gamma_{n,n+1}$ und $\Gamma_{n,n-1}$ die Geraden G_n und $S_{n+2,n-2}$ nicht und folglich $\Gamma_{n+2,n-2}$ schneiden.

Die Ebene $C_{n+1,n}$, welche durch $\Gamma_{n+2,n-2}$ und $G_{n-1,n}$ gelegt werden kann, schneidet F_3 noch in der dritten Geraden $L_{x,n+1}$. Ebenso erhält man die Geraden welche $L_{n+2,n-2}$, wo in dem man n durch $n+2$ ersetzt, welche $L_{n+2,n-1}$ schneiden, wie oben für $\Gamma_{n+2,n-2}$ und man hat

(8) $L_{n+2,n-2}\ (\cdot\cdot) \quad \begin{cases} G_{n-2,n-1}, \quad L_{n-1,n}, \quad L_n, \quad L_{n,n+1}, \quad L_{n+1,n+2} \\ \Gamma_{n+1,n}, \quad S_{n-1,n-2}, \quad S_{n+1,n+2}, \Gamma_{n-1,n} \end{cases}$

Giebt man n fünf aufeinander folgende Werte, so hat man also die weitern fünf Geraden

(9) $L_{34}, \quad L_{45}, \quad L_{51}, \quad L_{12}, \quad L_{23}.$

Legen wir durch $L_{n+2,n-2}$ und G_n die Ebene $C_{n+2,n-2}$, so schneidet diese F_3 noch in der dritten Geraden ζ. In gleicher Weise findet man die Geraden, welche ζ schneiden, wie oben und sie sind gegeben durch

(10) $\zeta\ (\cdot\cdot) \quad \begin{cases} G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad G_4, \quad G_5 \\ L_{34}, \quad L_{45}, \quad L_{51}, \quad L_{12}, \quad L_{23} \end{cases}$

Hieraus erkennt man, welches Linienpaar

$$G_n \text{ und } L_{n+2,n-2}$$

man auch nehmen mag, man immer eine Ebene $C_{n+2,n-2}$ erhält, die in der Geraden ζ die F_3 schneidet. Auf F_3 liegt also noch die weitere Gerade

$$\zeta \tag{11}$$

Nachfolgende Zusammenstellung giebt zur klareren Uebersicht jede der bis anhin gefundenen Geraden, nebst der Beifügung der jedesmaligen Geraden, welche die ersten schneiden. Wir haben:

$$R \cdots \begin{cases} G_1, & G_2, & G_3, & G_4, & G_5 \\ G_{34}, & G_{45}, & G_{51}, & G_{12}, & G_{23} \end{cases} \tag{12}$$

$$S_{n+2,n-2} \cdots \begin{cases} G_{n-2,n-1}, & G_{n-2}, & G_n, & G_{n+2}, & G_{n+1,n+2} \\ L_{n+1,n+2}, & S_{n-2,n-1}, & \Gamma_{n+2,n-2}, & S_{n+1,n+2}, & L_{n-2,n-1} \end{cases} \tag{13}$$

$$G_{n+2,n-2} \cdots \begin{cases} L_{n-2,n-1}, & L_{n-1,n}, & G_n, & L_{n,n+1}, & L_{n+1,n+2} \\ \Gamma_{n,n+1}, & S_{n-2,n-1}, & R, & S_{n+1,n-2}, & \Gamma_{n-1,n} \end{cases} \tag{14}$$

$$G_n \cdots \begin{cases} R, & \Gamma_{n+2,n-2}, & S_{n-1,n}, & \Gamma_{n-2,n-1}, & L_{n+2,n-2} \\ G_{n+2,n-2}, & S_{n+2,n-1}, & S_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & \zeta \end{cases} \tag{15}$$

$$L_{n+2,n-2} \cdots \begin{cases} G_{n-2,n-1}, & G_{n-1,n}, & G_n, & G_{n,n+1}, & G_{n+1,n+2} \\ \Gamma_{n,n+1}, & S_{n-2,n-1}, & \zeta & S_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n-1,n} \end{cases} \tag{16}$$

$$\Gamma_{n+2,n-2} \begin{cases} G_{n-1,n}, & G_{n-1}, & G_n, & G_{n+1}, & G_{n,n+1} \\ L_{n,n+1}, & \Gamma_{n,n+1}, & S_{n+2,n-2}, & \Gamma_{n-1,n}, & L_{n-1,n} \end{cases} \tag{17}$$

$$\zeta \cdots \begin{cases} G_1, & G_2, & G_3, & G_4, & G_5 \\ L_{34}, & L_{45}, & L_{51}, & L_{12}, & L_{23} \end{cases} \tag{18}$$

Giebt man n fünf aufeinander folgende Werte, so bleiben R und ungeändert, jedoch aus jeder der fünf andern Geraden gehen je fün neue Geraden hervor, und wir haben zunächst auf F_3 27 Geraden. Ausserdem erkennt man, dass jede Gerade von 10 der übrigen geschnitten wird, welche sich fünfmal zu je zweien (die über einander stehenden) selbst wieder schneiden. Wir haben also keine zwei Geraden, die in derselben Ebene liegen, worin nicht noch eine dritte Gerade sich vorfindet. Unser Verfahren führt also zu keiner neuen Geraden mehr. Beachtet man, dass in keiner Ebene vier Geraden der F_3 liegen können, so folgt nun leicht, dass auf der F_3 keine weitern Geraden sich vorfinden können.

III.

Ueber die Gruppirung der 27 Geraden auf der Fläche F_3.

Bezeichnen wir wie oben mit $(\cdot\cdot)$ schneiden, so folgt aus (17) unserer obigen Zusammenstellung, dass

(19)

$$\Gamma_{n-1,n}\,(\cdot\cdot)\,\Gamma_{n+2,n-2}\,(\cdot\cdot)\,\Gamma_{n,n+1}\,(\cdot\cdot)\,\Gamma_{n-2,n-1}\,(\cdot\cdot)\,\Gamma_{n+1,n+2}\,(\cdot\cdot)\,\Gamma_{n-1,n}$$

d. h. die fünf Geraden Γ bilden selbst wieder ein geschlossnes, einfaches räumliches Fünfseit.

Da sich allgemein $\Gamma_{n+2,n-2}$ und $S_{n+2,n-2}$ schneiden, so können wir aus den Geraden $(5\,S)$ und $(5\,\Gamma)$ die nachfolgend gegebenen 12 räumlichen Fünfecke bilden, welche zu je zwei und zwei in derselben Beziehung stehen wie die zwei Fünfseite (S) und (Γ), d. h. je eine Seite der einen schneidet je eine Seite der andern. Die 12 Fünfseite sind:

$$(20)\qquad \begin{cases} S_{n-2,n-1}, & S_{n-1,n}, & S_{n,n+1}, & S_{n+1,n+2}, & S_{n+2,n-2} \\ \Gamma_{n-2,n-1}, & \Gamma_{n,n-1}, & \Gamma_{n+2,n-1}, & \Gamma_{n-1,n}, & \Gamma_{n+1,n+2} \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} S_{n+4,n-2}, & \Gamma_{n+2,n-2}, & \Gamma_{n,n+1}, & S_{n,n+1}, & S_{n+1,n+2} \\ \Gamma_{n-2,n-1}, & S_{n-2,n-1}, & S_{n-1,n}, & \Gamma_{n-1,n}, & \Gamma_{n+1,n+2} \end{cases}$$

Geben wir n fünf aufeinander folgende Werte, so geht jedes Fünfseit des ersten Paares je in sich selbst über, während jedoch aus dem andern Paar fünf von einander verschiedene Fünfseitpaare hervorgehen.

Die Geraden $G_{n+2,n-2}$ und $L_{n+2,n-2}$ haben in Bezug auf alle diese Fünfseite dieselben Beziehungen, d. h. jede von ihnen schneidet von jedem Fünfseit je zwei durch eine dritte von einander getrennte Seiten. Die Gerade G_n schneidet, wie durch unsre obige Zusammenstellung sogleich hervorgeht, von jedem Fünfseit drei Seiten, von denen sich zwei treffen und die dritte, die zum Schnittpunkt der zwei ersteren Gegenseite ist.

Aus unserer obigen Zusammenstellung geht sogleich hervor, dass jede der 27 Geraden von 10 andern geschnitten ist und von 16 nicht. Die 10 Geraden, welche irgend eine der übrigen schneiden, lassen sich auf 16 verschiedene Arten in je zwei Grenzpaaren zu fünf und fünf so absondern, dass die sämmtlichen fünf der ersten Grenzpaare noch eine zweite gemeinsame Transversale haben, während dies bei den fünf Geraden der zweiten Grenzpaare nicht zutrifft. Keine zwei Geraden derselben Grenzpaare können sich schneiden.

Die 10 Geraden, welche zwei Gerade, die sich selbst nicht schneiden, nicht schneiden, lassen sich 12 mal zu je fünf Seiten je eines räumlichen Fünfseits zusammenstellen, welche sechs mal zu je zweien so geordnet sind, dass jede Seite des einen je eine und nur eine Seite des zweiten schneidet.

Nehmen wir, um das Gesagte zu beweisen, die Gerade R, so ist diese von den 10 Geraden

$$(22) \qquad \begin{cases} G_1, & G_2, & G_3, & G_4, & G_5 \\ G_{34}, & G_{45}, & G_{51}, & G_{12}, & G_{23} \end{cases}$$

geschnitten. Von diesen 10 Geradeu sind die fünf

$$(23) \qquad G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad G_4, \quad G_5$$

von der Geraden ζ geschnitten, ferner sind die Geraden

$$(24) \qquad G_n, \quad G_{n-2,n-1}, \quad G_{n-1,n}, \quad G_{u,n-1}, \quad G_{n+1,n+2}$$

von der Geraden $L_{n+2,n-2}$ und die Geraden

$$(25) \qquad G_{n-1,n}, \quad G_{n-1}, \quad G_n, \quad G_{n+1}, \quad G_{n+1,n}$$

von der Geraden $\Gamma_{n+2,n-2}$ und endlich die fünf Geraden

$$(26) \qquad G_{n-2,n-1}, \quad G_{n-2}, \quad G_n, \quad G_{n+2}, \quad G_{n+1,n+2}$$

von der Geraden $S_{n+2,n+2}$ geschnitten.

Um die 16 verschiedenen Gruppirungen zu erhalteu, hat man n fünf aufeinander folgende Werte zu geben. Ebenso ist klar, dass von den 10 Geraden (22) jede fünf, welche unter (23) (24) (25) und (26) nicht angegeben vorkommen, auf R von keiner zweiten gemeinsamen Transversalen geschnitten werden.

Aus dem obigen folgt, dass die beiden Geraden R und ζ von (27) den 5 Geraden G_n geschnitten sind, jedoch von den 10 Geraden ($5\,S$) und ($5\,\Gamma$) nicht getroffen werden.

(28) Dass die drei Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}$$

geschnitten sind von den drei Geraden

$$G_{n+2}, \quad G_n, \quad G_{n-2}$$

und nicht getroffen werden von den sechs Geraden

$$\Gamma_{n-1,n}, \quad \Gamma_{n+1,n+2}, \quad \Gamma_{n-1,n-1}, \quad \Gamma_{n,n+1}, \quad S_{n,n+1}, \quad S_{n-1,n}$$

Nun aber erkennt man sogleich durch unsere obige Zusammenstellung,

dass sich diese sechs Geraden ihrer angeschriebenen Reihenfolge nach schneiden und so ein geschlossenes räumliches Sechsseit bilden.

(29) Die vier Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}, \quad S_{n,n+1}$$

sind von G_n und G_{n-2} und nicht geschnitten von den drei Geraden

$$\Gamma_{n-1,n}, \quad \Gamma_{n+1,n+2}, \quad \Gamma_{n-2,n-1}$$

und folglich sind die fünf Geraden

$$(30) \qquad R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}, \quad S_{n,n+1}, \quad \Gamma_{n-2,n-1}$$

von G_n jedoch nicht von $\Gamma_{n-1,n}$ geschnitten und (31) schliesslich sind die 6 Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}, \quad S_{n,n+1}, \quad \Gamma_{n-2,1-1}, \quad \Gamma_{n-1,n}$$

von keiner weiter gemeinsam geschnitten, und sie unter sich schneiden sich selbst nicht.

Von diesen 6 Geraden haben wir gesehen, dass die fünf ersteren von G_n geschnitten sind. Ebenso leicht erkennt man mit Hülfe obiger Zusammenstellung, dass irgend je fünf dieser 6 Geraden von einer gemeinsamen Transversale getroffen werden und indem wir diese aufsuchen und zusammenstellen, erhalten wir zwei Systeme von 6 Geraden — sie sind

$$(32) \qquad \left\{ \begin{matrix} R, & \zeta, & S_{n+2,n-2}, & S_{n,n+1}, & \Gamma_{n-2,n-1}, & \Gamma_{n-1,n} \\ L_{n+2,n-2}, & G_{n+1,n+2}, & G_{n+1}, & G_{n+2}, & G_{n-2}, & G_n \end{matrix} \right.$$

Aus jedem dieser beiden Systeme erkennen wir nun, dass jede Gerade des einen Systems die sämmtlichen Geraden des andern Systems schneidet, mit Ausnahme der Geraden, welche gerade über oder unter ihr steht. Die Geraden beider Systeme sind unter sich windschief zu einander. Zwei solche Systeme je sechs Geraden heisst man ein Schläfli'sches Doppelsechs.

Da jede Gerade des einen Systems je fünf andere Gerade des zweiten Systems schneidet, so folgt, dass in einem Doppelsechs keine fünf Geraden mit zwei Transversalen eintreffen.

Durch unsere Darstellung des Doppelsechs erkennt man, dass beziehlich

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$$

Geraden der einen Sechs beziehlich von

$$5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 6$$

Geraden des andern Sechs geschnitten werden. Speciell ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass die Geraden des einen Sechs je von drei Geraden des andern Sechs geschnitten werden. Z. B. haben wir die drei Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}$$

geschnitten von den drei Geraden

$$G_{n+2}, \quad G_n, \quad G_{n-2}$$

Benennen wir je drei unter sich windschiefe Geraden ein Triplo, so folgt:

(33) Die Geraden eines jeden Triplo, das sich aus den 27 Geraden der F_3 bilden lässt, werden von den drei Geraden im zweiten Triplo geschnitten. Zwei solche Triplo heissen wir ein Doppeldrei.

Dieser Satz ist aber identisch mit dem folgenden, wenn man beachtet, dass die Windschiefen ein Hyperboloid bilden:

(34) Schneidet ein Hyperboloid die Fläche F_3 in drei Geraden eines Triplo, so schneidet sie dann F_3 noch in drei Geraden eines zweiten Triplo. Diese beiden Tripli bilden ein Doppeldrei.

Ersetzen wir in (29) die Gerade $S_{n,n+1}$ durch $S'_{n-1,n}$, so ergiebt sich in gleicher Weise das Doppelsechs

$$(35) \left\{ \begin{array}{llllll} R, & \zeta, & S_{n+2,n-2}, & S_{n-1,n}, & \Gamma_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2} \\ L_{n-2,n-1}, & G_{n-2,n-1}, & G_{n-1}, & G_{n-2}, & G_n, & G_{n+2} \end{array} \right.$$

Die zwei Doppelsechs (32) und (35) haben also das Doppeldrei

$$\begin{array}{l|l} R, \ \zeta, \ S_{n+2,n-2} & \\ \hline & G_{n-2}, \ G_n, \ G_{n+2} \end{array}$$

gemeinsam. Hieraus folgt:

(36) Ein Doppeldrei findet sich in zwei Doppelsechs und ein Triplo in zwei Sechs vor.

Weil jede der 27 Geraden von 16 der übrigen nicht geschnitten wird, so lassen sich die sämmtlichen Geraden $\frac{27.16}{2}$ mal zu je zwei unter sich windschiefen zusammenstellen.

Nach den Beziehungen (23) — (26) werden je zwei windschiefe Geraden von fünf der übrigen, die unter sich selbst wieder windschief sind, geschnitten. Es giebt also 216 Fünf mit zwei Transversalen.

Jede der beiden Transversalen wird aber noch von je fünf Geraden geschnitten, die jedoch keine zweite Transversale mehr besitzen. Es giebt also 432 Fünf mit einer Transversalen.

Aus jedem Sechs lassen sich sechs Fünf mit je einer Transversalen bilden, folglich giebt es $\frac{432}{6}$ einfache Sechs oder 36 Doppelsechs. Mit Hülfe der Doppeldrei lassen sich leicht alle 36 Doppelsechs darstellen. Geben wir in der folgenden Zusammenstellung je 5 aufeinanderfolgende Werte, so repräsentirt

$$1)\ \left\{\begin{matrix} R, & L_{12}, & L_{23}, & L_{34}, & L_{45}, & L_{51} \\ \zeta, & G_{12}, & G_{23}, & G_{34}, & G_{45}, & G_{51} \end{matrix}\right\} \text{ ein Doppelsechs.}$$

$$2)\ \left\{\begin{matrix} R, & \zeta, & S_{n+2,n-2}, & S_{n,n+1}, & \Gamma_{n-1,n}, & \Gamma_{n-2,n-1} \\ L_{n+1,n+2}, & G_{n+1,n+2}, & G_{n+1}, & G_{n+2}, & G_{n}, & G_{n-2} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$3)\ \left\{\begin{matrix} R, & L_{n+2,n-2}, & L_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n+2,n-2}, & S_{n-1,n} \\ \Gamma_{n-1,n}, & G_{n-1}, & G_{n}, & G_{n,n+1}, & G_{n-2,n-1}, & G_{n-1,n} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$4)\ \left\{\begin{matrix} R, & L_{n+2,n-2}, & L_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & S_{n,n+1}, & S_{n+2,n-2} \\ S_{n+1,n+2}, & G_{n-2}, & G_{n}, & G_{n+1,n+2}, & G_{n-2,n-1}, & G_{n-1,n} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$5)\ \left\{\begin{matrix} \zeta, & G_{n+2,n-2}, & G_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n+2,n-2}, & S_{n-1,x} \\ \Gamma_{n-1,n}, & G_{n-1}, & G_{n}, & L_{n-1,n}, & L_{n-1,n-2}, & L_{n,n-1} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$6)\ \left\{\begin{matrix} \zeta, & G_{n+2,n-2}, & G_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & S_{n,n+1}, & S_{n+2,n-2} \\ S_{n+1,n+2}, & G_{n-2}, & G_{n}, & L_{n+1,n+2}, & L_{n-2,n-1}, & L_{n-1,n} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$7)\ \left\{\begin{matrix} G_{n}, & L_{n-1,n}, & G_{n-1,n}, & \Gamma_{n-1,n}, & \Gamma_{n,n+1}, & S_{n+2,n-2} \\ G_{n+2}, & L_{n+2,n-2}, & G_{n+2,n-2}, & S_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n+2,n-2} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

$$8)\ \left\{\begin{matrix} G_{n}, & S_{n+1,n+2}, & S_{n-2,n-1}, & G_{n-2,n-1}, & L_{n-2,n-1}, & \Gamma_{n-1,n} \\ G_{n+1}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & S_{n,n+1}, & G_{n+2,n-2}, & L_{n+2,n-2}, & S_{n+2,n-2} \end{matrix}\right\} \text{ fünf Doppelsechs.}$$

An dieser Zusammenstellung ersieht man, dass zwei windschiefe Geraden, z. B. R und ζ, in 6 Doppelsechs und eine, z. B. R, in 16 Sechs vorkommen.

Zwei Geraden, die sich schneiden, sind von 17 der übrigen geschnitten und von acht nicht. Diese acht Geraden sind alle von ein und derselben Geraden geschnitten, welche mit den beiden ersten in derselben Ebene liegen, und bilden so ein geschlossenes Dreieck. Man erkannte aus der obigen Zusammenstellung, dass durch jede Gerade fünf Ebenen gehen, welche je noch zwei Geraden enthalten, d. h. jede Gerade ist Seite zu fünf Dreiecken oder da je drei Seiten in dem gleichen Dreieck vorkommen, giebt es $\frac{27 . 5}{3}$ Dreiecke. Von den Ebenen dieser 45 Dreiecke gehen durch jede Gerade je fünf.

An der obigen Zusammenstellung lassen sich die 45 Ebenen mit ihren Geraden in folgender Weise darstellen. Wir haben, wenn man n je fünf aufeinanderfolgende Werte beilegt:

1) fünf Ebenen $(\zeta, \ G_n, \ L_{n+2,n-2})$
2) " " $(R, \ G_n, \ G_{n+2,n-2})$
3) " " $(S_{n+1,n+2}, \ G_{n-1}, \ \Gamma_{n+1,n+2})$
4) " " $(S_{n+2,n-2}, \ G_{n-2}, \ S_{n-2,n-1})$
5) " " $(\Gamma_{n-1,n}, \ G_{n+1}, \ \Gamma_{n+2,n-2})$
6) " " $(G_{n-2,n-1}, \ S_{n-1,n}, \ L_{n,n+1})$
7) " " $(G_{n+1,n+2}, \ S_{n,n+1}, \ L_{n-1,n})$
8) " " $(G_{n+2,n-2}, \ \Gamma_{n,n+1}, \ L_{n-2,n-1})$
9) " " $(G_{n,n+1}, \ \Gamma_{n+2,n-2}, \ L_{n-1,n})$

Ersetzen wir die 5 Ebenen 9) durch die 3 Ebenen

10) $(G_{n,n+1}, \ \Gamma_{n-2,n-1}, \ L_{n+1,n+2})$

welche mit der Ebene 8) identisch sind und sich aus diesen ergeben, indem n durch $n-2$ ersetzt wird. Für denselben Wert von n repräsentirt 1)—8) und 10) je 9 Ebenen, auf denen alle 27 Geraden der Fläche F_3 liegen.

Ersetzen wir den Wert n durch $n+1$, so erhalten wir neun andere Ebenen, auf denen wieder alle 27 Geraden der F_3 liegen. Diese zwei Systeme von je 9 Ebenen schneiden sich in 81 Geraden, zu denen die 27 der F_3 auch gehören. Diese 81 Geraden bilden somit die Grundcurve eines Flächenbüschels neunter Ordnung und wir haben daher:

(37) Die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung lassen sich als den vollständigen Schnitt dieser Fläche mit unendlich vielen Flächen neunter Ordnung ansehen.

Die Geraden, welche auf den drei Ebenen liegen

$(\zeta, \ G_n, \ L_{n+2,n-2})$
$(R, \ G_{n+1}, \ G_{n-2,n-1})$
$(G_{n+2,n-2}, \ \Gamma_{n,n+1}, \ L_{n-2,n-1})$

liegen auch auf den drei Ebenen

$(\zeta, \ G_{n+1}, \ L_{n-2,n-1})$
$(R, \ G_n, \ G_{n+2,n-2})$
$(L_{n+2,n-2}, \ \Gamma_{n,n+1}, \ G_{n-2,n-1})$

Dieses Paar von je drei Ebenen, auf denen dieselben 9 Geraden der

… das bereits be-
raden …
Es gi…

ver…

… Vertical-Reihen je auf
… Geraden, so
… bilden, die unter
… auf denen alle 27 Ge-
… und die folgende Zu-
… Wir haben

$$\ldots\ \Gamma_{n-2,n-1},\ \Gamma_{n,n+1} \quad \ldots\ L_{n+1,n+2},\ S_{n-1,n} \quad \ldots\ G_{n,n+1},\ \Gamma_{n+2,n-2}$$

$$\ldots\ S_{n+1,n+2},\ S_{n+2,n-2} \quad \ldots\ G_{n+2,n-2},\ L_{n+1,n+2} \quad \ldots\ L_{n+1,n},\ G_{n-1,n-2}$$

$$\ldots\ G_{n+1,n+2},\ S_{n+2,n-2} \quad \ldots\ \Gamma_{n-1,n-2},\ L_{n+1,n+2} \quad \ldots\ L_{n+1,n},\ G_{n-1,n-2}$$

$$\ldots\ S_{n,n+1},\ S_{n+1,n+2} \quad \ldots\ G_{n-1,n},\ L_{n,n+1} \quad \ldots\ L_{n+1,n+2},\ G_{n+2,n-2}$$

$$\ldots\ \Gamma_{n+2,n-2},\ \Gamma_{n,n+1} \quad \ldots\ L_{n,n+1},\ G_{n+2,n-2} \quad \ldots\ G_{n+1,n+2},\ L_{n-1,n-2}$$

$$\ldots\ S_{n-2,n-1},\ S_{n-1,n} \quad \ldots\ L_{n-1,n},\ G_{n-2,n-1} \quad \ldots\ G_{n+2,n-2},\ L_{n+1,n}$$

Ge…
Se…

sein…
und …
dere…
Man …
Gerad…
d. h. …
in dem …
den Eb…

$$(7)\quad \left|\begin{array}{ccc} \zeta, & G_n, & L_{\substack{n+2\\n-2}} \\ G_{n+2}, & S_{\substack{n+2,\\n-2}} & S_{\substack{n+1\\n+2}} \\ L_{\substack{n-1,\\n}} & \Gamma_{\substack{n+2,\\n-2}} & G_{\substack{n\\n+1}} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} R, & G_{n-1}, & G_{\substack{n+1\\n+2}} \\ G_{n+2}, & S_{\substack{n+2,\\n-2}} & S_{\substack{n+1\\n+2}} \\ G_{\substack{n-2,\\n-1}} & S_{\substack{n-1,\\n}} & L_{\substack{n+1\\n}} \end{array}\left\| \begin{array}{ccc} G_{n-2}, & S_{\substack{n+1,\\n}} & \Gamma_{\substack{n+1\\n}} \\ \Gamma_{\substack{n+1,\\n+2}} & G_{\substack{n-1,\\n}} & L_{\substack{n-2\\n-1}} \\ \Gamma_{\substack{n-1,\\n}} & L_{\substack{n+1,\\n+2}} & G_{\substack{n+2\\n-2}} \end{array}\right|$$

$$(8)\quad \left|\begin{array}{ccc} \zeta, & G_n, & L_{\substack{n+2\\n-2}} \\ G_{n+1}, & S_{\substack{n,\\n+1}} & S_{\substack{n+1\\n+2}} \\ L_{\substack{n-2,\\n-1}} & S_{\substack{n-1,\\n}} & G_{\substack{n+1\\n}} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} R, & G_{n-1}, & G_{\substack{n+1\\n+2}} \\ G_{n+2}, & \Gamma_{\substack{n,\\n+1}} & \Gamma_{\substack{n-2\\n-1}} \\ G_{\substack{n-1,\\n}} & \Gamma_{\substack{n+2,\\n-2}} & L_{\substack{n+1\\n}} \end{array}\left\| \begin{array}{ccc} G_{n-2}, & \Gamma_{\substack{n+1,\\n+2}} & \Gamma_{n,n-1} \\ S_{\substack{n-2,\\n-1}} & L_{\substack{n-1,\\n}} & G_{\substack{n+2\\n-2}} \\ S_{\substack{n+2,\\n-2}} & G_{\substack{n-1,\\n-2}} & L_{\substack{n+1\\n+2}} \end{array}\right|$$

Geben wir n fünf aufeinander folgende Werte, so erhalten wir 40 Tripeltriederpaare und folglich giebt es im ganzen 120 Triederpaare.

Ausserdem ersieht man, dass sich jede Gerade z. B. ζ in 40, und zwei die sich nicht schneiden wie z. B. R und ζ, in 10 Triederpaaren befinden, und ferner folgt, dass drei und mehr windschiefe Geraden sich nicht in mehr als einem Triederpaar vorfinden.

Nehmen wir zwei zu einander windschiefe Geraden, z. B. R und ζ und die Gerade G_n, welche jene beiden schneidet, so sind diese drei Gerade von den Geraden

$$\Gamma_{n+1,n}, \quad \Gamma_{n,n-1}, \quad S_{n-1,n-2}, \quad S_{n+2,n+1}$$

nicht geschnitten. Nehmen wir noch G_{n+1} hinzu, so bilden die vier Geraden R, ζ, G_n, G_{n+1} ein geschlossenes unebenes Vierseit. Diese vier Geraden sind von der Geraden

$$\Gamma_{n+1,n}$$

nicht geschnitten. Die zwei Geraden ζ und R sind von den fünf Geraden G_n geschnitten, je zwei von diesen bilden mit jenen ein Vierseit, folglich gehören zu ζ und R je $\frac{5.4}{2} = 10$ Vierseite und aus den 27 Geraden lassen sich somit

$$\frac{216.10}{2}$$

unebene Vierseite bilden.

Weil es nur eine unter den 27 Geraden giebt, welche die 4 Seiten eines unebenen Vierseits nicht schneiden, so folgt, dass je 40 Vierseite von ein und derselben Geraden nicht geschnitten werden. Die Gerade R schneidet z. B. die folgend zusammengestellten 40 Vierseite nicht.

$$\begin{vmatrix} \zeta, & L_{\substack{n+1\\n+2}} \\ L_{\substack{n-2\\n-1}}, & S_{\substack{n+2\\n-2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \zeta, & L_{\substack{n\\n+1}} \\ L_{\substack{n-1\\n}}, & \Gamma_{\substack{n+1\\n-2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{\substack{n+2\\n-2}}, & \Gamma_{\substack{n\\n+1}} \\ S_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n+1\\n+2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}}, & \Gamma_{\substack{n-1\\n}} \\ S_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n+1\\n+2}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n+1\\n}} \\ S_{\substack{n+2\\n-2}}, & S_{\substack{n+1\\n+2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n\\n-1}} \\ S_{\substack{n+2\\n-2}}, & S_{\substack{n-1\\n-2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n-1\\n}} \\ \Gamma_{\substack{n-1\\n}}, & \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{\substack{n+2\\n-2}}, & L_{\substack{n+1\\n+2}} \\ S_{\substack{n+1\\n+2}}, & S_{\substack{n+1\\n}} \end{vmatrix}$$

Nehmen wir vier Gerade, von denen die erste die zweite, die zweite die dritte, die dritte die vierte, aber diese die erste nicht schneidet, wie z. B.

$$S_{n,n-1}, \quad S_{n,+1,n}, \quad S_{n+2,n+1}, \quad S_{n-2,n+2}$$

so sind diese von den Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad \Gamma_{n-1,n-2}$$

nicht geschnitten. Nehmen wir zu den obigen vier noch die Gerade $S_{n-1,n-2}$ hinzu, so erhalten wir ein unebenes Fünfseit, dessen Seiten von den beiden Geraden R und ζ nicht geschnitten werden. Die Geraden R und ζ schneiden, wie wir schon oben gesehen haben, die fünf Gerade Γ auch nicht und wir haben:

(38) Solche fünf Geraden, welche ein einfaches geschlossenes Fünfseit bilden, werden von zwei Geraden nicht geschnitten. Diese zwei Geraden schneiden auch noch andre fünf Geraden nicht, die selbst wieder ein einfaches geschlossenes Fünfseit bilden. Die 10 Geraden dieser beiden Fünfseite lassen sich noch zu 10 andern Fünfseiten zusammenstellen.

Hieraus folgt:

(39) Die 27 Geraden der Fläche F_3 lassen sich zu fünf und fünf auf 216.12 verschiedene Arten so zusammenstellen, dass je die fünf Geraden ein einfaches unebenes geschlossenes Fünfseit bilden, und dass je fünf solche Geraden von zwei der übrigen nicht geschnitten werden. Diese 2592 Fünfseite bilden 1296 Fünfseitpaare so, dass jede Seite des einen Fünfseits jeden Paares je eine und nur eine Seite des andern Fünfseits desselben Paares schneidet. Die Seiten der beiden Fünfseite desselben Paares werden von 2 Geraden, die sich selbst nicht schneiden, nicht geschnitten.

Nehmen wir die fünf Geraden, von denen die erste die zweite, diese die dritte, diese die vierte und schliesslich die vierte die fünfte, jedoch die fünfte die erste nicht schneidet, so werden diese von den Geraden nicht geschnitten. Nehmen wir z. B. die Geraden

$$\Gamma_{n-1,n}, \quad \Gamma_{n+1,n+2}, \quad \Gamma_{n-2,n-1}, \quad \Gamma_{n,n-1}, \quad S_{n,n+1}$$

so sind dieselben von den Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}$$

nicht geschnitten. Nehmen wir aber noch die Gerade $S_{n-1,n}$ hinzu, so schneidet diese sowol $S_{n,n+1}$ als $\Gamma_{n-1,n}$ und wir haben somit ein räumliches einfaches Sechsseit. Die Seiten desselben sind von den drei Geraden

$$R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2}$$

nicht geschnitten. Oben haben wir umgekehrt gesehen, dass irgend drei Geraden eines Triglo von 6 der übrigen Geraden nicht geschnitten werden und wir haben also jetzt den allgemeinen Satz:

(40) Je drei windschiefe Geraden unter den 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung werden von 6 der übrigen Geraden nicht geschnitten. Diese bilden ein einfaches geschlossenes räumliches Sechsseit.

Zu ieden Triplo gehört ein zugeordnetes Triplo, wo, wie wir oben gesehen haben, die drei Geraden des einen die drei Geraden des andern schneiden. Die zwei Sechsseite, welche den beiden Triplo eines Doppeldrei entsprechen, heissen wir ein **Doppelsechsseit**. So entpricht z. B. dem Doppeldrei

$$\left\{ \begin{array}{l} R, \quad \zeta, \quad S_{n+2,n-2} \\ \end{array} \right| \overline{} \; G_{n+2}, \quad G_{n}, \quad G_{n-2}$$

das Doppelsechsseit

$$\left\{ \begin{array}{llllll} S_{n-1,n}, & S_{n,n+1}, & \Gamma_{n+1,n}, & \Gamma_{n-1,n-2}, & \Gamma_{n+1,n+2}, & \Gamma_{n,n-1} \\ G_{n-1}, & G_{n+1,n+2}, & L_{n-2,n-1}, & G_{n+1}, & G_{n-2,n-1}, & L_{n+1,n+2} \end{array} \right.$$

Hieraus erkennen wir an der Hand unserer obigen Zusammenstellung Seite 124. sogleich, dass jede Seite des einen Sechsseit je drei Seiten des andern Sechsseit schneiden und zwar sind je zwei der drei geschnittuen Seiten durch je eine der nicht geschnitten getrennt.

Da, wie aus der obigen Zusammenstellung S. 124. leicht hervorgeht, zu fünf Geraden, von denen die erste die zweite, die zweite

die dritte, die dritte die vierte und diese die fünfte, jedoch die fünfte die erste nicht schneidet, keine sechste gefunden werden kann, welche entweder die erste oder die fünfte schnitte, aber keiner der übrigen begegnete, so folgt:

(41) Aus den 27 Geraden der Oberfläche F_3 lassen sich keine geschlossenen einfache Siebenseit bilden.

Kehren wir nun zu einem Triederpaar zurück, z. B. zu

$$\begin{vmatrix} \zeta, & G_n, & L_{\substack{n+2\\n-2}} \\ G_{n+1}, & \Gamma_{\substack{n-2\\n-1}}, & S_{\substack{n-2\\n-1}} \\ L_{\substack{n-2\\n-1}}, & \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}}, & G_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

so können wir aus diesen 9 Geraden sechs Tripli bilden, sie sind:

$$(\zeta,\ \Gamma_{\substack{n-2\\n-1}},\ G_{n-1,n}),\qquad (G_n,\ S_{\substack{n-1\\n-2}},\ L_{\substack{n-2\\n-1}})$$

$$(\zeta,\ S_{\substack{n-2\\n-1}},\ \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}}),\qquad (G_n,\ G_{n+1},\ G_{n-1,n})$$

$$(L_{\substack{n+2\\n-2}},\ G_{n+1},\ \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}})$$

$$(L_{\substack{n+2\\n-2}},\ \Gamma_{\substack{n-2\\n-1}},\ L_{\substack{n-2\\n-1}})$$

Zu jedem dieser 6 Tripli gehört der zugeordnete Triplo. Diese 6 ferner enthalten alle 18 übrigen Geraden der F_3. Nehmen wir speciell das Triplo

$$(\zeta,\ \Gamma_{\substack{n-2\\n-1}},\ G_{\substack{n-1\\n}})$$

alsdann bilden die sechs übrigen Geraden des Triederpaares das Sechsseit:

$$G_x,\ L_{\substack{n+2\\n-2}},\ S_{\substack{n-2\\n-1}},\ G_{n+1},\ L_{\substack{n-2\\n-1}},\ \Gamma_{\substack{n+1\\n+2}}.$$

Nun liegt ζ in der Ebene $(G_n,\ L_{\substack{n+2\\n-2}})$ wie $(G_{n+1},\ L_{\substack{n-2\\n-1}})$

$\Gamma_{\substack{n-2\\n-1}}$ " " " $(G_{n+1},\ S_{\substack{n-2\\n-1}})$ wie $(G_n,\ \Gamma_{n+1,n+2})$

$G_{\substack{n-1\\n}}$ " " " $(L_{\substack{n+2\\n-2}},\ S_{\substack{n-2\\n-1}})$ wie $(\Gamma_{\substack{n+1\\n+2}},\ G_{\substack{n-2\\n-1}})$

d. h. die Geraden des Triplo

$$(\zeta,\ \Gamma_{\substack{n-1\\n-2}},\ G_{n,n-1})$$

sind die Diagonalen, in denen sich die drei Paar Gegenebenen des Sechsseit schneiden. Das Triplo, welches dem Triplo

$$(\zeta, \quad \Gamma_{\substack{n-1,\\ n-2}} \quad G_{n,n-1})$$

zugeordnet ist, enthält somit die drei Geraden, welche die sechs Seiten des Sechsseits nicht schneiden und wir haben den Satz:

Je drei Geraden, welche sich nicht schneiden, sind die drei Hauptdiagonalen, in denen sich die Gegenebenen eines einfachen Sechsseits schneiden. Die ferneren drei Geraden, welche jene schneiden, bilden das Triplo, von dem keine Gerade die Seiten des Sechsseits schneidet.

Anmerkung. An das Behandelte schliessen sich nun sogleich die folgenden Aufgaben an, deren Lösungen selbst nicht schwer zu finden sind.

1. Aufgabe. Alle 9 unter den 27 Geraden der Fläche F_3 zu finden, durch welche ein Büschel von Flächen dritter Ordnung hindurchgehen.

2. Aufgabe. Irgend 9 Gerade des Raumes zu construiren, durch welche ein Büschel Flächen dritter Ordnung hindurchgeht. Alsdann den Ort der Geraden sämmtlicher Flächen dritten Grades des Büschels zu untersuchen, und schliesslich die 18 resp. 17 übrigen Geraden der Fläche des Büschels zu construiren, welche entweder durch einen bestimmten Punkt gehen oder welche eine weitere Gerade in specieller Lage enthält.

3. Aufgabe. Alle Systeme von Geraden zu construiren, durch welche eine Fläche dritten Grades vollständig bestimmt ist und je die übrigen Geraden der Fläche mit zu construiren.

4. Aufgabe. Im Raume ein Doppelsechs mit Hülfe des Lineals einzig zu construiren.

Anhang.

In dem Nachfolgenden spreche ich nun einige Sätze aus, die sich aus dem Vorhergehenden ohne weiteres ergeben. In einer spätern Mitteilung werde ich dieselben mit den einfachsten Hülfsmitteln der Elementargeometrie begründen und dann darauf eine elementare Theorie der räumlichen einfachen und vollständigen Fünf- und Sechsseite gründen.

Wir gehen von den Geraden R, S und G_n aus und erhalten, indem wir uns den Beweis, dass der Ort der Fläche der Kegelschnitte Ky eine Fläche dritter Ordnung sei, mit Berücksichtigung der Summen (22) bis (26) die folgenden Sätze:

(42) Es sei das räumliche einfache Fünfseit f_5 mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5 (oder allgem. n), mit den Eckebenen E_1, E_2, ... (oder allgem. E_n) und den Seiten S_{12}, S_{23}, ... (oder allgem. $S_{n,n+1}$), sowie die Gerade R, welche keine der Seiten S schneidet, gegeben. Die Geraden R und S_{34} schneiden die Ebene E_1 in zwei Punkten der Verbindungsgerade G_1. Oder allgemein die Geraden R und $S_{n+2,n-2}$ schneiden die Ebene E_n in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade G_n. Geben wir n fünf aufeinanderfolgende Werte, so erhalten wir die sämmtlichen fünf Geraden

$$G_1,\quad G_2,\quad G_3,\quad G_4,\quad G_5.$$

Diese fünf Geraden schneiden alle R und werden auch alle noch von einer zweiten Transversalen geschnitten, sie sei ζ.

Legen wir durch G_n und R die Ebene C_n, so schneidet diese die zwei Seiten $S_{n+1,n+2}$ und $S_{n-2,n-1}$ in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade $G_{n+2,n-2}$ sei, geben wir n fünf aufeinanderfolgende Werte, so erhalten wir die fünf Geraden

$$G_{34},\quad G_{45},\quad G_{51},\quad G_{12},\quad G_{23},$$

welche alle ausser der Geraden R von keiner zweiten Geraden geschnitten werden.

In Betreff dieser 10 Geraden gelten nun die folgenden Sätze:

Von den Geraden

$$\begin{array}{ccccc} G_1, & G_2, & G_3, & G_4, & G_5, \\ G_{34}, & G_{45}, & G_{51}, & G_{12}, & G_{23}, \end{array}$$

welche alle die Gerade R schneiden, werden die fünf

$$G_{n-2},\quad G_{n-1},\quad G_n,\quad G_{n+1},\quad G_{n+2}$$

von einer Geraden ζ geschnitten.

Die Geraden

$$G_{n-2,n-1},\quad G_{n-1,n},\quad G_n,\quad G_{n,n+1},\quad G_{n+1,n+2}$$

werden von der Gerade $L_{n+2,n-2}$,

die fünf Geraden

$$G_{n-1,n}, \quad G_{n-1}, \quad G_n, \quad G_{n+1}, \quad G_{n,n+1}$$

werden von $\Gamma_{n+2,n-2}$,

und endlich die fünf Geraden

$$G_{n-2,n-1}, \quad G_{n-2}, \quad G_x, \quad G_{n+2}, \quad G_{n+1,n+2}$$

werden von der Geraden $S_{n+2,n-2}$ geschnitten.

Geben wir n fünf aufeinanderfolgende Werte, so repräsentiren ζ, $L_{\substack{n+2\\n-2}}$, $\Gamma_{\substack{n+2\\n-2}}$, $S_{\substack{n+2\\n-2}}$ sechszehn Geraden, welche mit R und den 10 G ein System von 27 Geraden bilden. Sobald die obigen Sätze bewiesen sind, so ergeben sich die weitern von selbst. Von hier aus lassen sich nun noch eine Menge Beziehungen herleiten, die ich wie früher oben gesagt in einer spätern Notiz mitteile.

Ist ein räumliches einfaches Sechsseit gegeben mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6, den Eckebenen E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 und den Seiten S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45}, S_{56}, S_{61}, so bezeichnen wir 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 als Gegenecken, E_1 und E_4, E_2 und E_5, E_3 und E_6 als Gegenebenen, die Schnitte je zweier Gegenebenen heissen wir eine Hauptdiagonale und bezeichnen sie mit d_{14}, d_{25}, d_{36}, dann schneidet

d_{14} die Seiten S_{12}, S_{61}, S_{45}, S_{34},
d_{24} „ „ S_{23}, S_{12}, S_{45}, S_{56},
d_{36} „ „ S_{34}, S_{23}, S_{56}, S_{61}.

Die 9 Geraden (6 S) und (3 d) lassen sich als den vollständigen Schnitt der beiden Trieder ($E_1E_3E_5$) und ($E_2E_3E_6$) ansehen, und da dies specielle ausgeartete Flächen dritter Ordnung sind, so hat man:

(42) Die Seiten eines räumlichen einfachen Sechsseits und die drei Hauptdiagonalen bilden die Basiscurve eines Flächenbüschels dritter Ordnung.

In der Tat sind die 6 Geraden des einfachen Sechsseits 18 Bedingungen gleich, denn damit z. B. die erste Seite auf einer Fläche dritter Ordnung liegt, muss sie 4 Punkte auf der Fläche haben, die 2te, 3te, 4te und 5te je noch drei, und endlich die 6te noch zwei, dies repräsentirt aber

$$4+3+3+3+3+2=18$$

Punkte. Durch jeden 19ten Punkt geht somit noch eine Fläche dritter Ordnung. Die Diagonalen d_{14}, d_{25}, d_{36} liegen von selbst auf jeder Fläche, denn jede dieser Diagonalen schneidet vier Seiten des Sechsseits.

Nehmen wir irgend eine der Geraden G, welche alle drei Dia-

gonalen d schneidet, so hat sie mit jeder Fläche des durch das Sechsseit bestimmten Flächenbüschels dritter Ordnung drei Punkte gemein. Folglich giebt es je eine Fläche des Büschels, welche sie ganz enthält.

Es sei F_3 diese Fläche. Legen wir durch G irgend eine Ebene, so schneidet sie F_3 in der Geraden G und folglich noch in einem Kegelschnitt, d. h. diese Ebene schneidet die 6 Seiten des Sechsseits in sechs Punkten eines Kegelschnitts, und wir haben den Satz:

(43) Die drei Paar Gegenebenen eines einfachen räumlichen Sechsseits schneiden sich in den drei Hauptdiagonalen des Sechsseits. Diese drei Geraden sind im allgemeinen windschief zu einander und bestimmen so ein Hyperboloid. Jede Ebene, welche durch eine Gerade G geht, welche die drei Diagonalen schneidet, also eine Tangentialebene des Diagonalhyperboloides ist, schneidet die sechs Seiten des Sechsseits in sechs Punkten eines Kegelschnitts Kx. Drehen wir die Ebene um dieselbe Gerade G, so liegen alle Kegelschnitte Kx auf einer Fläche dritten Grades. Es giebt noch zwei andere Geraden G, welche zur Erzeugung derselben Fläche Veranlassung geben.

Oder auch:

(44) Der Ort der Ebenen, welche ein einfaches räumliches Sechsseit in sechs Punkten eines Kegelschnitts schneiden, ist eine Fläche zweiter Classe, welche die drei Gegenebenendiagonalen als drei Erzeugende der einen Schaar enthält.

Zum Schluss mag hier noch der reciproke Satz Platz finden. Da er nach dem Gesetz der Reciprocität von selbst klar ist, so gehe ich hier zunächst auf keine weitere Herleitung desselben ein. Er heisst:

(46) Der Ort der Punkte, durch welche je mit den sechs Seiten eines einfachen räumlichen Sechsseits sechs Tangentialebenen eines Kegels zweiter Ordnung bestimmt sind, ist eine Fläche zweiter Ordnung. Diese Fläche enthält die drei Hauptdiagonalen des Sechsseits, oder die Verbindungsgeraden der Gegenecken desselben, als drei Geraden desselben seiner Geradenschaaren.

Bemerkung. Das räumliche einfache Sechsseit ist also in

innigster Beziehung zu zwei Hyperboloiden, welche beziehlich durch seine Ebenendiagonalen und Eckendiagonalen bestimmt wird.

Halten wir die sechs Ecken fest, so lassen sich sechzig einfache Sechsseite bilden. Welche Beziehungen haben diese 60 zugehörigen Hyperboloide, welche durch die Ebenendiagonalen erzeugt werden, zu einander? Ebenso für den reciproken Fall?

In welcher Beziehung stehen die Ebenen- und Eck-Hauptdiagonalen eines einfachen räumlichen Sechsseits zu einander?

(Fortsetzung folgt).

Pisa, den 1. Januar 1874.

XII.

Rationale ebene Curven dritter Ordnung.

Von

K. Zahradnik.

I.

Die allgemeine Gleichung rationaler ebener Curven dritter Ordnung, wenn wir den Doppelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten wählen, ist

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2=0 \tag{1}$$

Gehen wir zu Polarcoordinaten über, indem wir $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ setzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&r^3(a\cos^3\varphi+b\cos^2\varphi\sin\varphi+c\cos\varphi\sin^2\varphi+d\sin^3\varphi)+\\&r^2(e\cos^2\varphi+f\cos\varphi\sin\varphi+g\sin^2\varphi)=0\end{aligned} \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass eine jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade die Curve in drei Punkten schneidet, von denen zwei mit dem Coordinatenanfang zusammenfallen. Es existiren aber zwei Richtungen der Geraden, wo alle drei Schnittpunkte mit dem Coordinatenanfang zusammenfallen; dieselben ergeben sich aus der Gleichung

$$e\cos^2\varphi+f\cos\varphi\sin\varphi+g\sin^2\varphi=0 \tag{3}$$

denn in diesem Falle geht die Gl. (2) über in $r^3=0$. Durch den Doppelpunkt einer rationalen Curve dritter Ordnung gehen demnach zwei Gerade, welche in demselben drei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein haben; es sind dies die Doppelpunktstangenten, deren Gleichung

$$r^2(e\cos^2\varphi+f\cos\varphi\sin\varphi+g\sin^2\varphi)$$

oder

$$ex^2+fxy+gy^2=0 \tag{4}$$

ist. Diese Doppelpunktstangenten fallen zusammen, bilden eine Rückkehrtangente, wenn

$$f^2-4ge=0 \tag{5}$$

ist, und der Doppelpunkt wird zu einem Rückkehrpunkte, einer Spitze. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte lautet demnach mit Rücksicht auf Gl. (5)

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+(x\sqrt{e}+y\sqrt{g})^2=0 \tag{6}$$

Nehmen wir nun die Rückkehrtangente, deren Gleichung

$$y=-x\sqrt{\frac{e}{g}}\,.$$

zur Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so geht die Gl. (6) über in eine Gleichung von der Form:

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=ey^2 \tag{7}$$

In diesem Abschnitte wollen wir die Curven dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte behandeln, und im nächsten Hefte wollen wir uns zur Theorie der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte wenden.

2. Jeder durch den Anfangspunkt gehende Strahl schneidet die Gerade (ausser im Doppelpunkte) nur in einem Punkte. Die Coordinaten des Schnittpunktes erhalten wir durch nachstehende Betrachtung. Bezeichnet u die Cotangente *) des Winkels, den der Strahl mit der x Axe bildet, so ist

$$x=uy \tag{8}$$

die Gleichung dieses Strahles. Führen wir den Wert für x in die Gl. (7) ein, so erhalten wir nach Unterdrückung des vom Rückkehrpunkte herrührenden Factors y^2, für die Ordinate des Schnittpunktes

$$y=\frac{e}{au^3+bu^2+cu+d} \tag{9}$$

---

*) Im rechtwinkligen Coordinatensysteme, im schiefwinkligen also allgemein, wenn wir den Strahl mit u bezeichnen

$$u=\frac{\sin(yu)}{\sin(xu)}.$$

und mit Rücksicht auf Gl. (8)

$$x = \frac{eu}{au^3 + bu^2 + cu + d} \tag{10}$$

Die Grösse u nennt man den Parameter entsprechenden Curvenpunktes. Jedem Werte von u entspricht nur ein Wert für x und y, demnach nur ein Curvenpunkt, und ein Strahl (8). Das Strahlenbüschel (8), mit dem Rückkehrpunkte als Scheitel, und die Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte stehen demnach in eindeutiger Beziehung.

3. Die Parameter der Schnittpunkte einer Geraden

$$mx + ny + 1 = 0$$

erhalten wir, wenn wir die Werte für x und y aus den Gleichungen (9), (10) in die Gleichung der Geraden einführen als Wurzeln nachstehender cubischen Gleichung

$$au^3 + bu^2 + (c + me)u + (d + ne) = 0 \tag{11}$$

Bezeichnen wir mit $(u)_1$ die Summe der Wurzeln u_1, u_2, u_3, so folgt aus Gl. (11)

$$(u)_1 = -\frac{b}{a} \tag{12}$$

Da in dieser Gleichung sich weder m noch n vorfindet, so ist dieselbe unabhängig von der Lage der Geraden und drückt uns demnach die Bedingung aus für die Lage dreier Curvenpunkte anf einer Geraden.

Drehen wir nun die y Axe um einen Winkel, dessen Tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{3a}$$

(in diesem Falle geht die y Axe durch den Inflexionspunkt der Curve, wie wir es später erhärten werden), so fällt nach der Transformation das Glied x^2y weg, und wir erhalten die Gleichung der Curve in einfachster Form und zwar:

$$ax^3 + bxy^2 + cy^3 = dy^2 \tag{13}$$

Die Gleichungen (9), (10), (12) gehen in diesem Falle über in nachstehende

$$y = \frac{d}{au^3 + bu + c} \tag{14}$$

$$x = \frac{du}{au^3 + bu + c} \tag{15}$$

$$(u)_1 = 0 \tag{16}$$

Die Gleichung (16) ist die gesuchte Bedingungsgleichung, in welche die Gleichung *) $u_1 u_2 u_3 = k$ übergeht, wenn der Doppelpunkt zum Rückkehrpunkte wird.

Wenn die Summe der Parameter dreier Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte gleich Null ist, so liegen dieselben auf einer Geraden.

Die Parameter der unendlich entfernten Punkte erhalten wir (14), (16) aus der Gleichung

$$au^3 + bu + c = 0$$

und aus dieser erhellt, dass

$$(u)_1 = 0$$

d. i. Die unendlich fernen Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte oder kurz einer C_3^3 liegen auf einer Geraden.

Wenn $u_2 = u_3 = u$ ist, so wird die Gerade zur Tangente im Punkte u und die Gl. (16) geht in nachstehende über:

$$2u + u' = 0 \tag{17}$$

Der Punkt **) u ist der Berührungspunkt und u' der entsprechende Tangentialpunkt.

4. Gegeben seien zwei Gerade P und P'. Die erste schneidet die C_3^3 in den Punkten u_1, u_2, u_3, die zweite in u_1', u_2', u_3'. Nach Gl. (16) ist

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0 \\ u_1' + u_2' + u_3' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Verbinden wir je einen Schnittpunkt u_i des P mit C_3^3 mit je einem Schnittpunkte u_i' des P' mit C_3^3, so schneidet uns die Verbindungslinie $\overline{u_i u_i'}$ die Curve in fernerem Punkte u_i'' und nach Gl. (16) haben wir

---

*) Siehe Dr. Em. Weyr: „Zur Theorie der Curven dritter Ordnung" Sitzungsbericht der königl böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften. Prag 27. April 1870, wo Herr Weyr die Gleichung $u_1 u_2 u_3 = k$ als speciellen Fall folgenden Satzes aufführt. Es sei Gl. (1) kurz $C^3 = 0$; eine $C^n = 0$ schneidet dieselbe in $3n$ Punkten, und das Product der Parameter sämmtlicher Durchschnittspunkte $\pi(u)$ ist eine Constante von C^n unabhängige Grösse

$$\pi(u) = k^n = \left(-\frac{a}{d}\right)^n.$$

**) Man sagt der Punkt u kurz statt der Punkt, dessen Parameter u ist.

$$u_1 + u_1' + u_1'' = 0$$
$$u_2 + u_2' + u_2'' = 0$$
$$u_3 + u_3' + u_3'' = 0$$

Addiren wir diese Gleichungen mit Rücksicht auf Gl. (18), so erhalten wir:

$$u_1'' + u_2'' + u_3'' = 0.$$

Schneiden wir eine C_3^3 mit zwei Geraden P und P', und verbinden je einen Schnittpunkt der P mit je einem Schnittpunkte der P', so schneiden uns die Verbindungslinien die C_3^3 in drei Punkten einer Geraden.

Wenn $u_1 = u_1'$, so ist $\overline{u_1 u_1'}$ Tangente im Punkte u_1 und der angeführte Satz löst uns die Aufgabe, in einem Punkte der C_3^3 eine Tangente zu ziehen. Durch den Punkt u_1 legen wir zwei Gerade P und P', diese schneiden C_3^3 noch in den Punkten u_2, u_3; $u_2' u_3'$. Die Gerade $\overline{u_2 u_2'}$ bestimmt den Punkt u_2'', $\overline{u_3 u_3'}$ den Punkt u_3''. Verbinden wir nun $\overline{u_2'' u_3''}$, so schneidet uns diese Gerade C_3^3 im Punkte u_1'', dem Tangentialpunkte von u_1, demnach ist $\overline{u_1 u_1''}$ die verlangte Tangente.

Wenn P und P' einander unendlich nahe rücken, so werden $\overline{u_1 u_1'}$, $\overline{u_2 u_2'}$, $\overline{u_3 u_3'}$ Tangenten und u_1'', u_2'', u_3'' die entsprechenden Tangentialpunkte, woraus der Satz folgt:

Die Tangentialpunkte dreier in einer Geraden liegenden Punkte einer C_3^3 liegen wieder in einer Geraden*).

5. Dem Punkte u entspricht u_1 als Tangentialpunkt; fassen wir u_1 als Berührungspunkt auf, so bekommen wir u_2 als den zu u_1 entsprechenden Tangentialpunkt u. s. w. Vermöge der Gl. (17) ergibt sich unmittelbar nachstehende Relation:

$$2^n u = (-1)^n u_n.$$

Für $n = \infty$, wird $u_n = \cot\alpha = \infty$, demnach $\alpha = 0$. Wir nähern uns nach und nach dem Rückkehrpunkte der C_3^3 und die Grenzlage der Tangente ist in diesem Falle die x Axe, d. i. die Tangente im Rückkehrpunkte.

---

*) Siehe Dr. Em. Weyr: „Geometrische Mittheilungen" (Sitzungsberichte d. k. Akademie der Wissenschaften Wien II. Abth.), wo derselbe unter anderen auch diese Sätze aus $u_1 u_2 u_3 = k$ für Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte entwickelt.

Suchen wir umgekehrt zu gegebnem Punkte u auf C_3^3 als Tangentialpunkt aufgefasst, den Berührungspunkt u_1 zu diesem Punkte als Tangentialpunkte wieder den Berührungspunkt u_2 u. s. w., so erhalten wir vermöge der Relation

$$u + 2u_1 = 0$$

die Gleichung

$$2^n u_n = (-1)^n u.$$

Für $n = \infty$ wird $u_n = \cos\varphi = 0$, daher $\varphi = 90^0$ und die Grenzlage der Tangente im Punkte u_∞ ist die zur y axe parallele Asymptote der C_3^3.

6. Schneiden wir C_3^3 mit einem beliebigen Kegelschnitte, dessen Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ist, so erhalten wir sechs Schnittpunkte, deren Parameter wir erhalten, wenn wir für x und y die Werte aus (14) (15) einführen, als Wurzel einer Gleichung sechsten Grades von der Form:

$$Au^6 + Bu^4 + Cu^3 + Du^2 + Eu + F = 0 \tag{19}$$

Fünf Punkte bestimmen den Kegelschnitt vollständig, sollen sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen die Parameter derselben einer Bedingungsgleichung genügen; diese Bedingungsgleichung erhellt sogleich aus der Form der Gleichung (19), sie ist

$$(u)_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0 \tag{20}$$

Aus dieser Gleichung folgen sogleich nachstehende Sätze:

Schneiden wir C_3^3 mit C^2, so bilden die Schnittpunkte ein Sechseck $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$. Die Verlängerungen der Seiten dieses Sechseckes treffen die C_3^3 in neuen sechs Punkten, welche auf einem Kegelschnitte liegen.

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken des Sechseckes treffen die C_3^3 in drei Punkten einer Geraden.

Secante, Tangente, Normale.

7. Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte $u_1(x_1 y_1)$, $u_2(x_2 y_2)$ ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Führen wir statt $x_i y_i$ Werte aus (14) und (15) ein, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & \frac{du_1}{c+bu_1+au_1^3} & \frac{d}{c+bu_1+au_1^3} \\ 1 & \frac{du_2}{c+bu_2+au_2^3} & \frac{d}{c+bu_2+au_2^3} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach bekannter Umformung:

$$\begin{vmatrix} d & x & y \\ c+bu_1+au_1^3 & u_1 & 1 \\ b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$y[c-au_1u_2(u_1+u_2)]+x[b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)] = d \tag{21}$$

Für $u_1 = u_2$ geht die Gleichung der Tangente in die der Secante über und wir erhalten so

$$y(c-2au^3)+x(b+3au^2) = d \tag{22}$$

Diese Gleichung gibt uns die Relation an zwischen dem Berührungspunkte und irgend einem Punkte auf der Tangente. Sind nun x, y Coordinaten eines festen Punktes, so erhalten wir die Parameter der Berührungspunkte der durch (xy) zur C_3^3 gelegten Tangenten, wenn wir die Gl. (22) nach u auflösen. Dieselbe ist in Bezug auf u vom dritten Grade, woraus erhellt, dass wir aus einem beliebigen Punkte in der Ebene der C_3^3 an die Curve drei Tangenten legen können; demnach ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte, dritter Classe.

Die Gleichung der Normalen im Punkte u der C_3^3 ist:

$$y-\frac{d}{au^3+bu+c} = \frac{c-2au^3}{b+3au^2}\left(x-\frac{du}{au^3+bu+c}\right)$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned} &y(3a^2u^5+4abu^3+3acu^2+b^2u+bc)+ \\ &x(2a^2u^6+2abu^4+acu^3-bcu-c^2) \\ &= d(2au^4+3au^2-cu+b) \end{aligned} \tag{23}$$

Die Gleichung (19) gibt uns die Relation an zwischen dem Fusspunkte und irgend einem Punkte der Normalen. Sind nun (xy) Coordinaten eines festen Punktes, so erhalten wir die Parameter der Fusspunkte der Normalen, indem wir die Gl. (23) nach u auflösen.

Dieselbe ist vom sechsten Grade in Bezug auf u, woraus erhellt, dass man von irgend einem Punkte in der Ebene C_3^3 auf diese sechs Normalen fällen kann.

Punktinvolution auf C_3^3.

8. Jeder Strahl eines Strahlenbüschels bestimmt auf C_3^3 Punkttripel u_1, u_2, u_3 einer cubischen Involution. Die Parameter zweier Schnittpunkte eines Strahles, z. *B.* u_1, u_2 genügen der Gl. (21)

$$y[c-au_1u_2(u_1+u_2)]+x[b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)]=d.$$

Diese Gleichung können wir auch mit Rücksicht auf die Gl. (16) schreiben:

$$y(c+au_1u_2u_3)+x[b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)]=d \tag{24}$$

Zwei Punkte bestimmen den Strahl vollständig, es gilt demnach die Gl. (24) für $\overline{u_1u_2}$, $\overline{u_2,u_3}$, $\overline{u_3,u_1}$. Wir erhalten so durch cyklische Vertauschung der Indices aus (24) zwei neue Gleichungen und zwar:

$$y(c+au_1u_2u_3)+x[b+a(u_2^2+u_2u_3+u_3^2)]=d$$
$$y(c+au_1u_2u_3)+x[b+a(u_3^2+u_3u_1+u_1^2)]=d.$$

Addiren wir nun diese drei Gleichungen, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Relation

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=-2(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1),$$

die Gleichung der Punktinvolution des Strahlenbüschels xy:

$$y(c+au_1u_2u_3)+x[b-(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)]=d \tag{25}$$

Die Involution (Vertauschfähigkeit) erhellt schon aus der Symmetrie dieser Gleichung. Die Gleichung dieser Involution bekommen wir in der Normalform folgendermassen. Jeder Strahl des Strahlenbüschel (xy) schneidet C_3^3 in drei Punkten, deren Parameter sich als Wurzeln einer cubischen Gleichung ergeben, welche wegen $(u)_1=0$ von der Form

$$u^3+\lambda u+\mu=0 \tag{26}$$

sein wird. Zwischen den Coëfficienten λ, u besteht aber eine lineare Bedingungsgleichung (25):

$$y(c-a\mu)+x(b-a\lambda)=d \tag{27}$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (26), (27) die Grösse μ, so erhalten wir:

$$x = \frac{f(u)}{\psi(u)}$$
$$y = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \tag{33}$$

Den Krümmungshalbmesser erhalten wir als Entfernung zweier Punkte, des Fusspunktes der Normalen (14), (15) und des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes (33). Dem Durchschnittspunkte der y Axe mit $C_3{}^3$ entspricht der Parameter $u = 0$. Für diesen Wert ist aus (33) $x = \infty$, $y = \infty$, und ebenso der der Krümmungshalbmesser, d. i. der Durchschnittspunkt ist ein Inflexionspunkt der $C_3{}^3$, wie wir früher (Nr. 5.) bemerkt haben.

Anwendung auf die Cissoide.

II.

Die Gleichung der Cissoide des Diocles ist, wie bekannt

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}} \tag{1}$$

wo a den Durchmesser des Erzeugungskreises bedeutet. Führen wir nun mittelst der Gleichung $uy = x$ den eindeutigen Parameter u ein, so erhalten wir x und y als rationale gebrochene Functionen von u, und zwar

$$x = \frac{a}{1+u^2}$$
$$y = \frac{a}{u(1+u^2)} \tag{2}$$

Die Parameter der unendlich fernen Punkte ergeben sich aus

$$u(1+u^2) = 0,$$

demnach $u_1 = 0$, $u_2 = +i$, $u_3 = -i$, ihre Summe ist gleich Null, d. i. die unendlich fernen Punkte liegen auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden. Als Gleichung der Secante $\overline{u_1u_2}$ erhalten wir (I, 21)

$$yu_1u_2(u_1+u_2) - x(1+u_1{}^2+u_1u_2+u_2{}^2)+a = 0$$

Für $u_1 = u_2 = u$ erhalten wir die Gleichung der Tangente im Punkte u

$$2u^3y - x(1+3u^2)+a = 0.$$

Die Tangente im Punkte $u(x,y)$ können wir bei der Cissoide folgendermassen construiren. Zwischen dem Tangentialpunkte und dem Berührungspunkte gilt die Relation

$$u' = -2u = -\frac{2x}{y}.$$

Ist nun $u(x,y)$ gegeben, so construiren wir uns einen Punkt $m(2x,-y)$, und ziehen $\overline{om}$. Auf diesem Strahl liegt der Tangentialpunkt u', der sich entweder aus der punktweisen Construction der Cissoide oder als Durchschnittspunkt des Strahles $\overline{om}$ mit der Cissoide ergibt, falls diese construirt ist.

Asymptoten sind Tangenten unendlich ferner Punkte; wir erhalten die Gleichungen derselben, wenn wir die Parameter dieser Punkte in die Tangentengleichung der Cissoide einführen, nämlich

$$x-a=0$$

$$x-iy+\frac{a}{2}=0$$

$$x+iy+\frac{a}{2}=0$$

Die Cissoide hat demnach drei Asymptoten, von denen eine reell, die übrigen zwar imaginär sind, sich aber im reellem Punkte auf der x Axe schneiden in der Entfernung $x=-\frac{a}{2}$.

Die Gleichung der Normalen im Punkte u ist

$$y-\frac{a}{u(1+u^2)}=-\frac{2u^3}{1+3u^2}\left(x-\frac{a}{1+u^2}\right)$$

oder ausgeführt:

$$(1+u^2)[u(1+3u^2)y+2u^4x-a(1+2u^2)]=0.$$

Unterdrücken wir den Factor $(1+u^2)$, welcher uns besagt, dass die Cissoide durch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht, welche zwei Normalen absorbiren, so erhalten wir als Gleichung der Normalen

$$u(1+3u^2)y+2u^4x-a(1+2u^2)=0 \tag{3}$$

Sind nun x, y Coordinaten eines festen Punktes auf der Normalen und u der Parameter des unbekannten Fusspunktes der von (x,y) zur Cissoide gefällten Normale, so erhellt aus der Gleichung (3), dass von einem Punkte der Ebene der Cissoide zu dieser vier Normalen gezogen werden können, und die Parameter der Fusspunkte erhalten wir als Wurzeln der Gleichung (3) in Bezug auf u.

Ordnen wir demnach die Gl. (3) nach den Potenzen von u, so erhalten wir

$$2xu^4+3yu^3-2au^2+yu-a=0 \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass

$$\begin{aligned}(u)_1 &= 3(u)_3\\ (u)_2 &= 2(u)_4\end{aligned} \tag{4}$$

Zwischen den Parametern der vier Fusspunkte bestehen demnach zwei Bedingungsgleichungen. Zwei Punkte u_1, u_2 bestimmen die Lage des Punktes (xy) vollständig und die übrigen Fusspunkte u_3, u_4 ergeben sich als Wurzeln einer quadratischen Gleichung, die sich aus (5) leicht bestimmen lässt.

Durchschnitte eines Kreises mit der Cissoide.

2. Allgemeine Gleichung eines Kreises ist:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+m^2=0 \tag{6}$$

wo

$$m^2=\alpha^2+\beta^2-r^2$$

Die Parameter der Durchschnittspunkte der Cissoide mit dem Kreise erhalten wir, wenn wir für x und y Werte aus (2) in die Gl. (16) einführen. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$uy=x$$

wird diese Substitution rascher vollführt, denn die Gl. (6) geht über in

$$y^2(1+u^2)-2y(\alpha u+\beta)+m^2=0$$

und setzen wir für y den Wert ein, so erhalten wir, wenn wir das Resultat nach den Potenzen von u ordnen:

$$m^2u^4+(m^2-2a\alpha)u^2-2a\beta u+a^2=0 \tag{7}$$

Die vier Werte von u sind die Parameter der Durchschnittspunkte. Durch drei Punkte ist aber der Kreis vollständig bestimmt, es muss demnach zwischen den Parametern der vier Durchschnittspunkte eine Relation stattfinden. Dieselbe ergibt sich aus der bekannten Beziehung zwischen den Coëfficienten und den Wurzeln einer Gleichung aus (7) nämlich:

$$(u)_1=u_1+u_2+u_3+u_4=0 \tag{8}$$

Vier Punkte einer Cissoide liegen an einem Kreise, wenn die Summe ihrer Parameter gleich Null ist.

Es seien u_1, u_2, u_3, u_4 vier Punkte einer Cissoide, welche einem Kreise angehören, durch u_1, u_2; u_3, u_4 legen wir zwei neue Kreise, so schneiden diese die Cissoide in den Punkten v_3, v_4 respective v_1, v_2; die vier Durchschnittspunkte v_1, v_2, v_3, v_4 liegen wieder auf einem Kreise; denn nach (8) ist

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0$$
$$n_1+u_2+v_3+v_4=0$$
$$v_1+v_2+u_3+u_4=0.$$

Addiren wir die zwei letzten Gleichungen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die erste

$$v_1+v_2+v_3+v_4=0,$$

womit der Satz als bewiesen erscheint.

Schneiden wir nun die Cissoide mit zwei beliebigen Kreisen K, K'. Zwischen den Parametern der Durchschnittspunkte bestehen nach (8) nachstehende Relationen:

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3+u_4&=0 \\ u_1'+u_2'+u_3'+u_4'&=0 \end{aligned} \tag{9}$$

V e r b i n d e n w i r j e e i n e n S c h n i t t p u n k t u_2 der Cissoide mit K mit je einem Schnittpunkte u_2' der Cissoide mit K', so bestimmen die Verbindungslinien $\overline{u_i u_i'}$ vier neue Punkte auf der Cissoide die wieder auf einem Kreise liegen, denn nach (I, 16) haben wir

$$u_1+u_1'+u_1''=0$$
$$u_2+u_2'+u_2''=0$$
$$u_3+u_3'+u_3''=0$$
$$u_4+u_4'+u_4''=0.$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir mit Rücksicht auf (9)

$$u_1''+u_2''+u_3''+u_4''=0$$

als Beweis des erwähnten Satzes.

Fallen nun K und K' zusammen, also $K \equiv K'$, so ist auch $u_i = u_i'$ und wir bekommen nachstehenden Satz:

Die Tangenten in den Ecken eines der Cissoide eingeschriebenen Kreisviereckes schneiden dieselbe in vier Punkten eines Kreises.

Ebenso ohne Beweis können wir diesen Satz hinzufügen:

Die Verlängerungen der Seiten eines der Cissoide eingeschriebenen Kreisviereckes schneiden dieselbe in vier Punkten eines Kreises.

Krümmungskreis, Evolute der Cissoide.

3. Fallen drei der Schnittpunkte eines Kreises mit der Cissoide zusammen, also $u_2 = u_3 = u_4 = u$, so geht der Kreis durch drei unendlich nahe Punkte der Curve hindurch, und wird zum Krümmungskreise. Die Gl. (8) geht in diesem Falle über in

$$u_1 + 3u = 0 \tag{10}$$

Diese Gleichung löst uns die Aufgabe im gegebenen Punkte u der Cissoide den Krümmungskreis zu construiren. Der Krümmungskreis schneidet die Curve noch im Punkte u_1 und nach Gl. (10) ist

$$u_1 = -3u = -\frac{3x}{y}$$

Bestimmen wir uns den Punkt $n(3x, -y)$ und ziehen $\overline{on}$. Auf diesem Strahl liegt der Schnittpunkt u_1, den wir uns nach der punktweisen Consruction der Cissoide bestimmen können. Verbinden wir nun $\overline{uu_1}$ und halbiren diese Strecke im Punkte p und errichten in diesem Halbirungspunkte eine Senkrechte, ebenso im Punkte u eine Normale zur Cissoide, diese zwei Geraden schneiden sich im Mittelpunkte des Krümmungskreises q und $\overline{qu}$ ist der Krümmungsradius.

Aus der Gl. (7) folgt

$$\begin{aligned} (u)_2 &= -1 + \frac{2a}{m^2}\alpha \\ (u)_3 &= 2\frac{a}{m^2}\beta \\ (u)_4 &= \frac{a^2}{m^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Für einen Krümmungskreis ist $u_2 = u_3 = u_4 = u$ und die Gl. (11) gehen über in

$$\begin{aligned} (u)_2 &= -6u^2 = 1 - 2\frac{a}{m^2}\alpha \\ (u)_3 &= -8u^3 = 2\frac{a}{m^2}\beta \\ (u)_4 &= -3u^4 = \frac{a^2}{m^2}. \end{aligned}$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen m^2, so erhalten wir

$$\alpha = -a\frac{6u^2+1}{6u^4}$$
$$\beta = \frac{4a}{3u}. \tag{12}$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes α, β sind demnach rationale Functionen des Parameters u. Ist dieser veränderlich, so stellt uns (12) den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise dar. Die Evolute der Cissoide ist demnach eine rationale Curve vierter Ordnung; wir erhalten die Gleichung derselben als $F(\alpha, \beta) = 0$, wenn wir aus (12) den veränderlichen Parameter u eliminiren, nämlich

$$512a^3\alpha + 288a^2\beta + 27\beta^4 = 0 \tag{13}$$

Der Krümmungshalbmesser folgt aus der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 - m^2 = r^2$.

Führen wir in diese Gleichung statt α, β und m Werte ein, so erhalten wir

$$r = \frac{a(4u^2+1)\sqrt{4u^2+1}}{6u^4}$$

oder wenn wir für $u = \frac{x}{y}$ setzen, und wo $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, so erhalten wir

$$r = \frac{a\sqrt{x}(4a-3x)^{\frac{3}{2}}}{6(a-x)^2} \tag{14}$$

In Nr. 10 des ersten Abschnittes hatten wir noch einen anderen Weg gezeigt, der allgemein giltig ist; der hier eingeschlagene Weg war einfach, da die Cissoide durch die imaginären Kreispunkte hindurch geht. Nach der allgemeinen Methode würden wir aus der Gleichung der Normalen

$$N \equiv y(u+3u^3) + 2u^4x - a(1+2u^2) = 0$$

und ihrer benachbarten

$$\frac{\partial N}{\partial u} = N' = y(1+9u^2) + 8u^3x - 4au = 0$$

den Parameter u eliminiren oder die Gleichungen nach x und y auflösen, je nachdem wir die Evolute in Form (13) oder (12) erhalten wollen.

Punktquadrupel auf der Cissoide.

4. Aus der Gleichung der Normalen, wenn wir dieselbe nach den Potenzen von u ordnen, nämlich

$$2u^4x + 3u^3y - 2au^2 + ay - a = 0 \tag{15}$$

folgt mit Rücksickt auf die Gl. (8) nachstehender Satz:

Die Fusspunkte der Normalen eines Punktes der x Axe (der Rückkehrtangente) liegen auf einem Kreise.

Denn in diesem Falle ist $y = 0$, daher $(u)_1 = 0$ als Beweis des erwähnten Satzes.

Wann bilden die vier Fusspunkte der Normalen eines Punktes ein harmonisches Punktquadrupel?

Damit vier Punkte, deren Parameter Wurzeln nachstehender Gleichung

$$Au^4 + 4Bu^3 + 6Cu^2 + 4Du + E = 0 \tag{16}$$

bei irgend einer Zuordnung harmonisch sind, ist die Bedingung *)

$$ACE - 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3 = 0 \tag{17}$$

Vergleichen wir die Coëfficienten der Gleichungen (15) und (16), so erhalten wir

$$A = 2x, \quad B = \tfrac{3}{4}y, \quad C = -\tfrac{1}{3}a$$
$$D = \tfrac{1}{4}y, \quad E = -a$$

und für diese Werte geht die Gleichung (17) über in

$$54xy^2 = 297ay^2 + 288a^2x + 16a^3 \tag{18}$$

Der geometrische Ort der Punkte, deren Fusspunkte der Normalen harmonische Punktquadrupel bilden, ist eine Curve dritter Ordnung. Wir sahen, dass ein Punktquadrupel einem Kreise angehörte, wenn es einem Punkte der x Axe zugeordnet war; verbinden wir nun beide Bedingungen, so geht die Gl. (18) über in

$$16a^2(18x + a) = 0 \tag{19}$$

welche Gleichung uns besagt, dass es einen Punkt auf der x Axe gibt, $\left(x = -\frac{a}{18}\right)$, dessen Normalenfusspunkte harmonisch sind und an einem Kreise liegen.

---

*) Durège, Ebene Curven, p. 22. Cremona, Ebene Curven, deutsch von Curtze, p. 9.

Vier Punkte, deren Parameter Wurzeln der Gl. (17) sind, sind äquianharmonisch *), wenn

$$AE - 4BD + 3C^2 = 0$$

Führen wir für A, B, C, D, E die zugehörigen Werte ein, so erhalten wir

$$y^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{8}{3}ax \tag{20}$$

Der geometrische Ort der Punkte, deren Normalenfusspunkte äquianharmonische Punktquadrupel bilden, ist eine Parabel, und aus (20) ersehen wir, dass die Axe der Parabel die x Axe und ihr Brennpunkt der Coordinatenanfang ist.

Fläche und Bogen der Cissoide.

5. Der allgemeine Ausdruck für die Fläche einer Curve ist

$$P = \int y\frac{dx}{du}du = -2a^2\int\frac{du}{(1+u^2)^3}$$

Schreiben wir

$$J_n = \int\frac{du}{(1+u^2)^n}$$

so ist

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)}\frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}$$

Integriren wir in den Grenzen 0 und ∞, so geht diese Formel über in

$$\Big|_0^\infty J_n = \frac{2n-3}{2n-2}\Big|_0^\infty J_{n-1}$$

In unserem Falle ist

$$J_3 = \frac{1}{4}\frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u$$

daher

$$P = -2a^2\Big|_{u_1}^{u_2} J_3$$

Wir erhalten die halbe Fläche der von der reellen Asymptote be-

*) Durège ibid. p. 25. Cremona ibid. p. 35.

von

XIII.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Fortsetzung von N. XXXII. des vorigen Bandes.

Von

R. Hoppe.

---

4. Allgemeinste Fläche, welche einem ebenen orthogonalen System von Geraden und parallelen Trajectorien entspricht.

Die Gleichungen einer bei variirendem u vom Punkte ($\xi\eta$) erzeugten Geraden, die sich bei variirendem v beliebig in der Ebene bewegt, lassen sich in die Doppelgleichung zusammenfassen:

$$\xi + i\eta = e^{i\lambda}(\pi u + \varrho e^{i\nu}) \tag{47}$$

wo λ, ν, π, ϱ Functionen von v bezeichnen. Damit die Curven $u =$ const. die Geraden $v =$ const. unter rechten Winkeln schneiden, muss der reelle Teil der Grösse

$$\frac{\partial(\xi - i\eta)}{\partial u}\frac{\partial(\xi + i\eta)}{\partial v} = \pi\{(\pi' + i\pi\lambda')u + [\varrho' + i\varrho(\lambda' + \nu')]e^{i\nu}\}$$

unabhängig von u verschwinden. Da nun π nicht null sein kann, so erhält man:

$$\pi' = 0; \qquad \varrho'\cos\nu - \varrho(\lambda' + \nu')\sin\nu = 0$$

Das constante π kann man $= 1$ setzen, indem man u statt πu schreibt. Setzt man

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\partial\mu}{\mu\,\partial\lambda}$$

so wird die zweite Gleichung:

$$\frac{\partial\varrho}{\varrho} = \frac{\partial\mu}{\mu} + \operatorname{tg} v\,\partial v$$

und giebt nach Integration:

$$\varrho = \frac{\mu}{\cos v}; \qquad \varrho e^{iv} = \mu(1+i\operatorname{tg} v) = \mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

Gl. (47) lautet nun:

$$\xi + i\eta = e^{i\lambda}\left(u + \mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right) \tag{48}$$

oder einzeln:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (u+\mu)\cos\lambda - \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sin\lambda \\ \eta &= (u+\mu)\sin\lambda + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

und giebt die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial u} = e^{i\lambda}; \qquad \frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial v} = ie^{i\lambda}\lambda'\left(u + \mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) \tag{50}$$

Beiläufig sei hier erwähnt, dass sich die Abbildungen des Netzes (48) in der Form

$$\xi_1 + i\eta_1 = F\left\{e^{i\lambda}\left(u + \mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\right\}$$

benutzen lassen, um die Orthogonaltrajectorien vieler verschiedener Curvenscharen unmittelbar aufgestellt zu finden. Ist z. B. die Function F zweite Potenz, so sind die Curven $v = \text{const.}$ Parabeln.

Nach Gl. (6) sind die Relationen des Punktes $(\xi\eta)$ in der Ebene zum entsprechenden Punkte (pqr) auf der Kugel

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

folgende:

$$p + iq = \frac{\xi + i\eta}{\zeta}; \qquad r = \frac{1}{\zeta} - 1 \tag{51}$$
$$2\zeta = 1 + \xi^2 + \eta^2$$

das ist hier:

$$2\zeta = 1 + (u+\mu)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2 \tag{52}$$

Es sind jetzt die Grössen (7), nämlich

$$M^2 = \frac{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2}{\partial u^2}; \qquad N^2 = \frac{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2}{\partial v^2} \tag{7}$$

zu entwickeln. Für beliebige Variation hat man, da $r\zeta = 1-\zeta$ ist:

$$\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2 = (\partial.\zeta p)^2+(\partial.\zeta q)^2+(\partial.\zeta r)^2$$
$$= \zeta^2(\partial p^2+\partial q^2+\partial r^2)+2\zeta\partial\zeta(p\partial p+q\partial q+r\partial r)+(p^2+q^2+r^2)\partial\zeta^2$$

woraus:

$$\partial\xi^2+\partial\eta^2 = \zeta^2(\partial p^2+\partial q^2+\partial r^2) \tag{53}$$

Nun ist nach (50)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi^2+\partial\eta^2}{\partial u^2} &= \frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial u}\frac{\partial(\xi-i\eta)}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial\xi^2+\partial\eta^2}{\partial v^2} &= \frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial v}\frac{\partial(\xi-i\eta)}{\partial v} = \lambda'^2\left(u+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

folglich, indem man Gl. (53) in beiderlei partiellem Sinne anwendet,

$$M = \frac{1}{\zeta}; \qquad N = \frac{\lambda'}{\zeta}\left(u+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right). \tag{55}$$

Gl. (52) differentiirt giebt, hierdurch ausgedrückt:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u} = u+\mu; \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial v} = N\zeta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \tag{56}$$

daher ist

$$\frac{\partial M}{M\partial v} = -\frac{\partial\zeta}{\zeta\partial v} = -N\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} \quad \text{oder} \tag{57}$$

$$\frac{\partial M}{MN\partial v} = -\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}, \text{ Function von } v \text{ allein.}$$

Hiermit ist die Bedingung der Gl. (12) erfüllt, nach welcher $M\frac{\partial m}{\partial u}$ *) eine willkürliche Function von u wird. Sei also k eine Function von u; dann kann man setzen:

$$M\frac{\partial m}{\partial u} = k'''$$

woraus nach (55):

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \zeta k''' \tag{58}$$

Dies integrirt giebt:

$$m = \zeta k'' - (u+\mu)k' + k + \pi \tag{59}$$

wo π eine willkürliche Function von v bezeichnet.

*) Die Abweichung (∂v statt ∂u) beruht auf einem Druckfehler.

Aus dem einen Hauptkrümmungsradius m ergab sich der andere n nach der Formel:

$$M\frac{\partial m}{\partial v} = -(m-n)\frac{\partial M}{\partial v}$$

für welche man zufolge (57) schreiben kann:

$$\frac{\partial m}{\partial v} = N(m-n)\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \tag{60}$$

Differentiirt man (59) nach der Formel (56), so kommt:

$$\frac{\partial m}{\partial v} = N\zeta\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}k'' - \mu' k' + \pi' \tag{61}$$

folglich ist

$$m-n = \zeta k'' - \frac{\lambda'}{N}\left(k' - \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right) \tag{62}$$

und nach (59)

$$n = -(u+\mu)k' + k + \pi + \frac{\lambda'}{N}\left(k' - \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right) \tag{63}$$

Aus den Hauptkrümmungsradien der gesuchten Fläche sind die Gleichungen der letztern zu berechnen. Multiplicirt man die Gl. (51) mit (58), so kommt:

$$(p+iq)\frac{\partial m}{\partial u} = (\xi + i\eta)k'''$$

$$r\frac{\partial m}{\partial u} = (1-\zeta)k'''$$

Dies bei constantem v integrirt giebt:

$$\left.\begin{aligned} (p+iq)m - (x+iy) &= (\xi+i\eta)k'' - e^{i\lambda}k' + V \\ rm - z &= (1-\zeta)k'' + (u+\mu)k' - k + V_1 \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

wo V, V_1 unbekannte Functionen von v bezeichnen. Zu ihrer Bestimmung differentiiren wir nach v; dann kommt:

$$(m-n)\frac{\partial(p+iq)}{\partial v} + (p+iq)\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial v}k'' - ie^{i\lambda}\lambda' k' + V'$$

$$(m-n)\frac{\partial r}{\partial v} + r\frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{\partial \zeta}{\partial v}k'' + \mu' k' + V_1'$$

Nun ist nach Gl. (50) mit Anwendung von (55)

$$\frac{\partial(\xi+i\eta)}{\partial v} = \frac{\partial.\zeta(p+iq)}{\partial v} = ie^{i\lambda}N\zeta \tag{65}$$

oder, wenn man nach der Formel (56) differentiirt und durch ζ dividirt,

$$N\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}(p+iq)+\frac{\partial(p+iq)}{\partial v}=ie^{i\lambda}N \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}=-\frac{N}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}=-(1+r)N\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

Hiernach gehen die Gl. (64) über in:

$$(m-n)N\{ie^{i\lambda}-\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}(p+iq)\}+(p+iq)\frac{\partial m}{\partial v}=ie^{i\lambda}(N\zeta k''-\lambda'k')+V'$$

$$-(m-n)N\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}(1+r)+r\frac{\partial m}{\partial v}=-N\zeta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}k''+\mu'k'+V_1'$$

oder nach Hebung je zweier Terme vermöge (60)

$$(m-n)Nie^{i\lambda}=ie^{i\lambda}(N\zeta k''-\lambda'k')+V'$$

$$-(m-n)N\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}=-N\zeta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}k''+\mu'k'+V_1'$$

Führt man jetzt für $m-n$ den Wert (62) ein, so bleibt:

$$V'=ie^{i\lambda}\lambda'\frac{\partial\pi}{\partial\mu}; \qquad V_1'=-\pi'$$

Demnach ist

$$V=\int\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\partial e^{i\lambda}; \qquad V_1=-\pi$$

Zur Abkürzung sei

$$\varrho=-(u+\mu)k'+k+\pi, \quad \text{also} \quad m=\zeta k''+\varrho \tag{66}$$

dann wird

$$(p+iq)m=(\xi+i\eta)k''+\frac{\xi+i\eta}{\zeta}\varrho$$

$$rm=(1-\zeta)k''+\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)\varrho$$

Nach Einführung dieser Werte nebst denen von V und V_1 lauten die Gleichungen der gesuchten Fläche (64):

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\varrho}{\zeta}\xi+k'\cos\lambda-\int\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\partial\cos\lambda\\ y&=\frac{\varrho}{\zeta}\eta+k'\sin\lambda-\int\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\partial\sin\lambda\\ z&=\frac{\varrho}{\zeta}\end{aligned}\right\} \tag{67}$$



$$z = 2\frac{k-k'u}{1+u^2}$$

reine Function von u wird, so sind die Krümmungslinien $u = \text{const.}$ auf den hierher gehörigen Flächen sämmtlich ebene Curven parallel der xy Ebene. Für $\pi = c\cos\lambda$ ist überdies die Fläche eine Rotationsfläche, und zwar kann man k so bestimmen, dass sie in jede beliebig gegebene übergeht.

Um schliesslich aus dem allgemeinen Ausdruck der Fläche die einfachsten Beispiele algebraischer Flächen abzuleiten, setzen wir:

$$k = \frac{a}{2}u^2 + bu + c$$

$$\pi = \frac{d-a}{2}\varkappa + (e+b)\mu + \tfrac{1}{2}f - c$$

$$\varkappa = 1 + \mu^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2$$

woraus:

$$\int\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\cos(\lambda+\delta) = \{(d-a)\mu + e + b\}\cos(\lambda+\delta) - (d-a)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sin(\lambda+\delta)$$

$$2\zeta = \varkappa + 2\mu u + u^2$$

$$2\varrho = d\varkappa + 2e\mu + f - 2a\zeta$$

Bei dieser Bestimmung kann der Fall, wo x, y, z constant werden, nur eintreten für $d = e = f = 0$. Nach Einführung in (67) besteht jede Coordinate aus 3 Termen mit den Coefficienten d, e, f. Man kann dann jeden Term als besondere Lösung ansehen und erhält so:

$$\text{I.} \quad x = \frac{(\varkappa - 2\mu^2 - \mu u)\cos\lambda + (2\mu + u)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sin\lambda}{\varkappa + 2\mu u + u^2}u$$

$$y = \frac{(\varkappa - 2\mu^2 - \mu u)\sin\lambda - (2\mu + u)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\cos\lambda}{\varkappa + 2\mu u + u^2}u$$

$$z = \frac{\varkappa}{\varkappa + 2\mu u + u^2}$$

$$\text{II.} \quad x = \frac{(2\mu^2 - \varkappa - u^2)\cos\lambda - 2\mu\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sin\lambda}{\varkappa + 2\mu u + u^2}$$

$$y = \frac{(2\mu^2 - \kappa - u^2)\sin\lambda + 2\mu\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\cos\lambda}{\kappa + 2\mu u + u^2}$$

$$z = \frac{2\mu}{\kappa + 2\mu u + u^2}$$

III. $x = \frac{\xi}{2\zeta}; \quad y = \frac{\eta}{2\zeta}; \quad z = \frac{1}{\zeta}$

Die dritte Lösung ist eine Kugelfläche. Man kann nun $\cos\lambda$, $\sin\lambda$ beliebig algebraisch in μ darstellen und dann u und μ eliminiren, um eine algebraische Gleichung zwischen x, y, z zu finden als Ausdruck einer Fläche, deren Krümmungslinien die Parameter u, v haben.

XIV.

Zur Integration eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Herrn Professor Dr. *Ladislaus Zajączkowski*
in Warschau.

1.

Versteht man unter V die abhängige Variabele, unter $x_1, x_2, .., x_{n+p}$ unabhängige Variabelen, dagegen unter $X_{i,k}$ gegebene Functionen der unabgängigen Variabelen, so nennt man das System:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k=n+p} X_{i,k} \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad [i = 1, 2, .., n]$$

ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bedeutet Δ_i folgende Operation:

$$(2) \qquad \Delta_i = X_{i1} \frac{\partial}{\partial x_1} + X_{i2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_{i,n+p} \frac{\partial}{\partial x_{n+p}},$$

so kann man das System (1) kürzlich so schreiben:

$$(3) \qquad \Delta_i V = 0, \quad [i = 1, 2 \ldots n]$$

Jacobi hat in seiner posthumen Abhandlung (Crelle Journal LX, 1—181) gezeigt, wie man eine gemeinsame Lösung des Systems (1) finden kann, wenn die Coefficienten $X_{i,k}$ gewisse Bedingungen erfüllen. Clebsch vervollkommete Jacobi's Integrationsmethode, indem er gezeigt hat (Crelle Journal LXV, 257—268), wie man mittels derselben alle gemeinsamen Lösungen finden kann, und wie man

ein System, dessen Coefficienten den erwähnten Bedingungen nicht genügen, auf ein anderes zurückführen kann, bei welchem selbe erfüllt werden.

Die wiederholt erwähnten Bedingungen bestehen, wie bekannt, im Folgenden. Sind

$$\varDelta_r V = 0 \quad \varDelta_s V = 0$$

zwei Gleichungen des gegebenen Systems; vollzieht man auf ihren ersten Seiten beziehungsweise die Operationen $\varDelta_s$, $\varDelta_r$ und zieht hierauf die Operationsresultate von einander ab, so erhält man, das Endresultat mit $(\varDelta_s \varDelta_r - \varDelta_r \varDelta_s) V$ bezeichnend

$$(4) \qquad (\varDelta_s \varDelta_r - \varDelta_r \varDelta_s) V = \sum_{k=1}^{k=n+p} Y_{s,r}^{(k)} \frac{\partial V}{\partial x_k},$$

wo

$$(5) \qquad Y_{1,s}^{(k)} = \varDelta_s X_{rk} - \varDelta_r X_{sk}.$$

Ist nun der Ausdruck (4) identisch gleich Null, und zwar, welche Werte die Zeiger r, s aus der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, n$ auch annehmen, ist also:

$$(6) \qquad Y_{r,s}^{(k)} = 0$$

für $r = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, n$ und $k = 1, 2, \ldots, n+p$, so bildet das System (1) das sog. Jacobi'sche System, auf welches Jacobi's Integrationsmethode angewandt werden kann, und selbes besitzt p gemeinsame Lösungen, deren willkürliche Function das allgemeine Integral des Systems ist.

Vom praktischen Standpunkte aus betrachtet, ist Jacobi's Integrationsmethode wol die einfachste, doch sie lässt in theoretischer Hinsicht einiges zu wünschen übrig. Die Ableitung obiger Bedingungen nämlich ist nicht naturgemäss, indem selbe einem dem Gegenstande fremdartigen Poisson'schen Princip (Journal de l'école polytechnique. Cahier 15) entnommen worden sind, weshalb man nicht unmittelbar einsieht, dass im Falle, wenn jenen Bedingungen genügt wird, das System wirklich p verschiedene gemeinsame Lösungen besitzt.

Diesem Uebelstande kann man verhelfen, wenn man an die Arbeit Boole's (Treatise on differential equations. Supplementary volume. 1865 p. 74) sich anschliessend das System linearer partieller Differentialgleichungen (1) auf ein System p totaler Differentialgleichungen zwischen $n+p$ Variabelen zurückführt, analog der Zurückführung einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung, und die Integrabili-

tätsbedingungen des erstern Systems aus denen des letzteren ableitet. Die besagte Zurückführung ist von Boole (l. c.) gegeben, doch vermisst man in dem ausgezeichneten Werke des englischen Geometers die bemerkte Ableitung der Bedingungsgleichungen. — Diese Lücke auszufüllen hat der Verfasser vorliegender Abhandlung unternommen.

2.

Mittels successiver Elimination bringe man das System (1) vorläufig auf die Gestalt:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_{n+k}} = 0. \qquad [i = 1, 2, \ldots, n] \tag{7}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (7) mit unbestimmten Constanten λ_i, und addirt die Producte, so erhält man eine einzige lineare partielle Differentialgleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i A_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_{n+k}} = 0, \tag{8}$$

welche wegen der unbestimmten Factoren λ_i dem System (7) aequivalent ist. Um die Gleichung (8) zu integriren, bilden wir nach dem Vorgange von Lagrange die Hilfsgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda_n} = \frac{dx_{n+1}}{\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} + \ldots + \lambda_n A_{n1}} = \ldots$$
$$= \frac{dx_{n+p}}{\lambda_1 A_{1p} + \lambda_2 A_{2p} + \ldots + \lambda_n A_{np}}, \tag{9}$$

woraus durch Elimination der unbestimmten Factoren λ_i das System p totaler Differentialgleichungen zwischen $n+p$ Variabelen:

$$\left\{\begin{array}{l} dx_{n+1} = A_{11}\, dx_1 + A_{21}\, dx_2 + \ldots + A_{n1}\, dx_n \\ dx_{n+2} = A_{12} dx_1 + A_{22}\, dx_2 + \ldots + A_{n2}\, dx_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_{n+p} = A_{1p}\, dx_1 + A_{2p}\, dx_2 + \ldots + A_{np}\, dx_n \end{array}\right. \tag{10}$$

folgt.

Weil das System (10) im System (9) mit eingeschlossen ist, so werden Integrale

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c, \; \ldots \tag{11}$$

des ersteren auch dem letzteren genügen. Daher sind u, v, w, ... Lösungen der partiellen Differentialgleichung (8), und da diese Lösungen der partiellen Differentialgleichung (8) genügen unabhängig

von den Werten der Constanten λ_i, so sind $u, v, w, \ldots$ Lösungen des Systems (7), dessen allgemeines Integral

$$V = F(u, v, w, \ldots) \tag{12}$$

sein wird, wo F eine ganz willkürliche Function bedeutet.

Hieraus folgt, dass das System linearer partieller Differentialgleichungen (7) p verschiedene gemeinsame Lösungen zulässt, wenn das System totaler Differentialgleichungen (10) in Form von p Urgleichungen integrirbar ist.

Um also die Bedingung aufzufinden, unter welcher das System (7) p verschiedene gemeinsame Lösungen zulässt, genügt es die Bedingung der Integrirbarkeit des Systems (10) in Form von p Urgleichungen aufzustellen.

3.

Da aus p Gleichungen, allgemein gesprochen, p Grössen bestimmt werden können, so liegt die Vermutung nahe, dass das Gleichungssystem

$$dy_k = \sum_{i=1}^{i=n} A_{ik} dx_i \quad [k = 1, 2, \ldots p] \tag{13}$$

in Form von p Urgleichungen unter gewissen Bedindungen integrirbar ist.

Um die notwendigen Bedingungen abzuleiten, setzen wir voraus, das Gleichungssystem (13) sei wirklich in Form von p Urgleichungen integrirbar, denken uns aus diesen Urgleichungen p Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ durch n Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausgedrückt und in die Gleichungeu (13) hineinsubstituirt; dadurch werden die Gleichungen (13) identisch, somit muss:

$$\overline{A}_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n) \quad [k = 1, 2 \ldots p] \tag{14}$$

und

$$\frac{\partial \overline{A}_{rk}}{\partial x_s} - \frac{\partial \overline{A}_{sk}}{\partial x_r} = 0 \tag{15}$$

sein, wo statt rs jede Combination zu zwei Zahlen aus der Zahlenreihe $1, 2 \ldots n$, zu setzen ist, und der Strich über A_{ik} zu bedeuten hat, dass in den Coefficienten A_{ik} die Grössen y als Functionen der Grössen x zu betrachten sind.

Nun ist aber

$$\frac{\partial . \overline{A_{rk}}}{\partial x_s} = \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_s} + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{\partial A_{rk}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_s}$$

$$\frac{\partial . \overline{A_{sk}}}{\partial x_r} = \frac{\partial A_{ks}}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{\partial A_{sk}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_r}$$

oder wegen (14)

$$\frac{\partial . \overline{A_{rk}}}{\partial y_s} = \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_s} + \sum_{l=1}^{l=p} A_{sl} \frac{\partial A_{rk}}{\partial y_l}$$

$$\frac{\partial . \overline{A_{sk}}}{\partial x_r} = \frac{\partial A_{sk}}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{l=p} A_{rl} \frac{\partial A_{sk}}{\partial y_l},$$

setzt man diese Werte in (3) ein, so findet man:

$$\frac{\partial A_{rk}}{\partial x} - \frac{\partial A_{sk}}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{l=p} \left(A_{sl} \frac{\partial A_{rk}}{\partial y_l} - A_{rl} \frac{\partial A_{sk}}{\partial y_l} \right) = 0, \tag{16}$$

$$[k = 1,\ 2 \ldots p, \quad r = 1,\ 2 \ldots n, \quad s = 1,\ 2 \ldots n]$$

als die notwendigen Bedingungsgleichungen dafür, dass das Gleichungssystem (1) in Form von p Urgleichungen integrirbar sei.

4.

Indem wir jetzt den Weg befolgen wollen, den Euler (Vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Wien 1830. Band III. 1—31.) für die Integration der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ vorgeschlagen hat, betrachten wir $n-1$ Grössen $x_2, \ldots, x_n$ als constant, setzen also $dx_2 = dx_3 = \ldots = dx_n = 0$. Hierdurch reducirt sich das System (13) auf das Lagrange'sche System gleichzeitiger Differentialgleichungen

$$dx_1 = \frac{dy_1}{A_{11}} = \frac{dy_2}{A_{12}} = \ldots = \frac{dy_p}{A_{1p}}. \tag{17}$$

Es seien

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \; \ldots, \; u_p = c_p \tag{18}$$

die vollständigen Integrale dieses Systems. Wir wollen nun zeigen, dass die willkürlichen von $x_1, y_1, \ldots, y_p$ unabhängigen Grössen $c_1, \ldots, c_p$, falls alle Bedingungsgleichungen (16) erfüllt sind, als solche Functionen der Grössen $x_2, \ldots x_n$ bestimmt werden können, dass hiedurch die Gleichungen (18) sich zu vollständigen Integralen des Systems (13) umwandeln.

Ehe wir hiezu schreiten, wollen wir einige Formeln entwickeln, die für das folgende brauchbar sind.

Erstens ist bekannt, dass die Functionen u_l, welche die ersten Seiten der Gleichungen (18) bilden, den linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(19)\qquad \frac{\partial u_l}{\partial x_1}+\sum_{h=1}^{h=p}A_{lh}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}=0\qquad [l=1,2,\dots p]$$

identisch genügen. Differenzirt man die identischen Gleichungen (19) partiell einmal nach x_i, das andere Mal nach y_k, so erhält man zweitens:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\,\partial x_1}+\sum_{h=1}^{h=p}A_{1h}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\,\partial y_h}&=-\sum_{h=1}^{h=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}\,\frac{\partial A_{1h}}{\partial x_i}\\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k\partial x_1}+\sum_{h=1}^{h=p}A_{1h}\frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k\,\partial y_h}&=-\sum_{h=1}^{h=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}\,\frac{\partial A_{1h}}{\partial y_k}\end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man ferner mit R_0, R_k folgende Functionaldeterminanten:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} R_0&=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial y_2}, \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial y_p}\\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial y_2}, \dots, & \frac{\partial u_2}{\partial y_p}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial u_p}{\partial y_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial y_2}, \dots, & \frac{\partial u_p}{\partial y_p}\end{vmatrix}\\ R_k=(-1)^k.&\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial y_{k-1}}, & \frac{\partial u_1}{\partial y_{k+1}}, \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial y_p}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, \dots, & \frac{\partial u_2}{\partial y_{k-1}}, & \frac{\partial u_2}{\partial y_{k+1}}, \dots, & \frac{\partial u_2}{\partial y_p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial y_1}, \dots, & \frac{\partial u_p}{\partial y_{k-1}}, & \frac{\partial u_p}{\partial y_{k+1}}, \dots, & \frac{\partial u_p}{\partial y_p}\end{vmatrix}\end{aligned}\right.$$

von denen die erste nicht Null sein kann, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen (19) nach A_{1h}:

$$(22)\qquad \frac{1}{R_0}=\frac{A_{11}}{R_1}=\frac{A_{12}}{R_2}=\dots=\frac{A_{1p}}{R_p}.$$

Der Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingungsgleichungen (4) stützt sich auf das bekannte Jacobi'sche Theorem über die

functionale Abhängigkeit von n Grössen, welche gegebene Functionen von n anderen Grössen sind. Ich habe mir eine diesem Theorem verwandte Frage gestellt und glücklich gelöst.

„Es seien n Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gegebene Functionen von $n+p$ anderen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$, wir fragen nach den notwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Grössen n von einander functional abhängen.

Um die notwendigen Bedingungen abzuleiten, setzen wir voraus, dass zwischen den Grössen u die identische Relation:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \tag{23}$$

stattfindet, und differentiiren diese Relation partiell nach jeder Grösse x, so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{n+p}} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_{n+p}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_{n+p}} = 0$$

Combinirt man diese Gleichungen zu n, und eliminirt aus jeder Gruppe dieselben n Grössen $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_n}$, so erhält man $\frac{(n+p)!}{n!\,p!}$ Bedingungsgleichungen in Form von Jacobi'schen Determinanten, welche identisch erfüllt werden müssen, wenn zwischen den n Grössen u eine identische Relation stattfindet.

Man überzeugt sich aber leicht, dass umgekehrt die n Grössen u von einander functional abhängen werden, wenn bloss $p+1$ jener Bedingungsgleichungen werden erfüllt sein.

Setzen wir nämlich voraus, dass die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ in Bezug auf die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ von einander unabhängig sind, dass somit die Functionaldeterminante

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

identisch nicht verschwindet, denken uns daher mittelst der gegebenen Ausdrücke von $u_1, \ldots u_{n-1}$ die Grössen $x_1, \ldots x_{n-1}$ durch $u_1, \ldots u_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n+p}$ ausgedrückt und die Werte in den Ausdruck von u_n eingesetzt, so erscheint u_n in der Form:

(24) $$u_n = f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}).$$

Differentiirt man nun u_n partiell nach x_{n+k}, wo $k = 0, 1, 2 \ldots p$ ist, so findet man das Gleichungssystem:

(25) $$\frac{\partial u_n}{\partial x_{n+k}} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_{n+k}} + \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots p]$$

Nun erhält man aber, wenn (24) partiell nach x_h differentiirt wird, wo $h = 1, 2, \ldots, n-1$ ist, das System von $n-1$ anderen Gleichungen:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \qquad [h = 1, 2, \ldots n-1]$$

welche, nach $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ aufgelöst, geben:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \div \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)$$

$$[i = 1, 2, \ldots n-1]$$

Substituirt man die zuletzt gefundenen Werte in (25) hinein, und führt auf gleiche Benennung zurück, so erhält man:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_{n+k}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$
$$- \frac{\partial u_n}{\partial x_{n+k}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

oder, wie leicht zu sehen:

(26) $$-\frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial u_n}{\partial x_{n+k}}\right)$$

$$[k = 0, 1, 2 \ldots p]$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass die $n-1$ Grössen $u_1, \ldots u_{n-1}$ in Bezug auf die $n-1$ Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ von einander unabhängig sind, so folgt aus der letzten Formel, dass wenn $(p+1)$ Gleichungen:

(27) $$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial u_n}{\partial x_{n+k}}\right) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2 \ldots p]$$

identisch erfüllt sind, dass dann

(28) $$\frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} = 0, \qquad [k = 0, 1, 2 \ldots p]$$

somit u_n bloss eine Function von $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sein wird.

Sind die $n-1$ Grössen $u_1 \ldots u_{n-1}$ in Bezug auf $x_1 \ldots x_{n-1}$ von einander abhängig, so muss man statt der letzten $n-1$ Grössen eine andere Combination aus den $n+p$ Grössen x wählen, in Bezug auf welche die ersten Grössen unabhängig sind, und das bewiesene Theorem wäre noch giltig. Wären aber $n-1$ Grössen u in Bezug auf jede Combination von je $n-1$ Grössen x von einander abhängig, so brauchte man die functionale Abhängigkeit der Grössen u nicht zu beweisen, indem sie evident existirte. Somit haben wir folgenden Lehrsatz:

„Zum Stattfinden einer functionalen Abhängigkeit zwischen n Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, welche gegebene Functionen von $n+p$ anderen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ sind, ist notwendig und hinreichend, dass folgende $p+1$ Bedingungsgleichungen:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_{n+k}}\right) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2 \ldots p]$$

identisch erfüllt werden.“

5.

Um nun die willkürlichen Functionen $c_1, \ldots c_p$ der Grössen $x_2, \ldots, x_n$ in der angezeigten Weise zu bestimmen, differentiiren wir die Gleichungen (18) nach allen darin enthaltenen Variabelen in der Voraussetzung, dass auch $x_2, \ldots, x_n$, sowie $c_1, \ldots, c_p$ veränderlich sind. Wir erhalten:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_1} dx_1 + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} dy_k + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i = dc_l \quad [l = 1, 2, \ldots p].$$

Vergleicht man aber diese Gleichungen mit denen des Systems (13), welchen sie aequivalent sein sollen, setzt also darin

$$dy_k = A_{1k} dx_1 + \sum_{i=2}^{i=n} A_{ik} dx_i,$$

so findet man zur Bestimmung von c_l:

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \frac{\partial u_l}{\partial y_k}\right) dx_1 + \sum_{i=2}^{i=n} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} + \frac{\partial u_l}{\partial y_k}\right) dx_i = dc_l,$$

oder, weil der Coefficient von dx_1 nach (9) identisch gleich Null ist, endlich:

$$(29) \qquad dc_l = \sum_{i=2}^{i=n} B_{il} dx_i, \quad [l = 1, 2 \ldots p]$$

wo der Kürze wegen

$$(30)\qquad B_{il} = \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial y_k}$$

gesetzt worden ist.

Die zur Bestimmung der willkürlichen Functionen c_l dienenden Gleichungen (29) sind derselben Art wie die des gegebenen Systems (13). Damit aus ihnen diese willkürlichen Functionen bestimmbar werden, sollen sich die Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_p$ aus den Coefficienten B_{il} mittels der Integralgleichungen (18) transeliminiren lassen; dem bekannten Jacobi'schen Theoreme gemäss, soll daher die aus den Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ und jedem B_{il}, als Function der Grössen $x_1, y_1, \ldots y_p$ betrachtet, gebildete Functionaldeterminante identisch gleich Null sein. Ordnet man die besagte Functionaldeterminante nach den partiellen Differentialquotienten von B_{il}, so findet man für die Bestimmbarkeit der willkürlichen Functionen c_l folgende Bedingungsgleichungen:

$$R_0 \frac{\partial B_{il}}{\partial x_1} + R_1 \frac{\partial B_{il}}{\partial y_1} + R_2 \frac{\partial B_{il}}{\partial y_2} + \ldots + R_p \frac{\partial B_{il}}{\partial y_p} = 0$$

oder, wegen (22):

$$\frac{\partial B_{il}}{\partial x_1} + A_{11} \frac{\partial B_{il}}{\partial y_1} + A_{12} \frac{\partial B_{il}}{\partial y_2} + \ldots + A_{1p} \frac{\partial B_{il}}{\partial y_p} = 0 \quad \begin{bmatrix} i = 2, 3, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, p \end{bmatrix}$$

Es ist aber nach (30):

$$\frac{\partial B_{il}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_1} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k \partial x_1} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_1}$$

und allgemein:

$$\frac{\partial B_{il}}{\partial y_h} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial y_h} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k \partial y_h} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial y_h}.$$

Demzufolge geht obige Bedingungsgleichung über in:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_1} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k \partial x_1} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_1} \\
&+ A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_1} + \sum_{k-1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k \partial y_1} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial y_1} \right) \\
&+ A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial y_1} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial y_k \partial y_2} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial y_2} \right) \\
&+ \cdot \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ A_{1p} \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial y_p} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \frac{\partial^2 u_l}{\partial u_k \partial y_p} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial u_l}{\partial y_k} \frac{\partial A_{ik}}{\partial y_p} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Vereinigt man die in derselben Colonne stehenden Glieder zu einem Ausdrucke und berücksichtigt die Formeln (20), so lässt sich vorliegende Gleichung auch so schreiben:

$$-\sum_{h=1}^{h=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}\frac{\partial A_{1h}}{\partial x_i}-\sum_{=1}^{k=p}A_{ik}\sum_{h=1}^{h=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}\frac{\partial A_{1h}}{\partial y_k}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_k}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\partial u_l}{\partial y_k}\sum_{h=1}^{h=p}A_{1h}\frac{\partial A_{ik}}{\partial y_h}=0,$$

oder, wenn man im dritten Gliede h statt k setzt und im vierten die Zeiger h, k unter einander vertauscht; und alle Glieder unter dasselbe Summenzeichen bringt:

$$(31)\quad \sum_{h=1}^{h=p}\left\{\frac{\partial A_{ih}}{\partial x_1}-\frac{\partial A_{1h}}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{k=p}\left(A_{1k}\frac{\partial A_{ih}}{\partial y_k}-A_{ik}\frac{\partial A_{1h}}{\partial y_k}\right)\right\}\frac{\partial u_l}{\partial y_h}=0.$$

$$\begin{bmatrix} i=2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ p \end{bmatrix}.$$

Die Bedingungsgleichungen (31) sind also erfüllt, wenn die Coefficienten A_{ik} den Bedingungsgleichungen (16) genügen, und daher findet man in diesem Falle zur Bestimmung der willkürlichen Functionen $c_1, \ldots, c_p$ ein System p totaler Differentialgleichungen (29) zwischen $p+n-1$ veränderlichen $c_1, \ldots, c_p, x_2, \ldots, x_n$, welche ganz derselben Art sind wie die des gegebenen Systems (13). Auch sieht man leicht ein, dass das System (29) in Form von p Urgleichungen integrirbar ist, wenn das gegebene System es ist, was schon daraus unmittelbar folgt, dass das System (29) aus dem gegebenen (13) entspringt durch Einführung der Veränderlichen $c_1, c_2, \ldots, c_p$ mittels der Gleichungen (18) statt der Veränderlichen $y_1, \ldots, y_p$, und die Vertauschung der Veränderlichen die Natur der Gleichungen unverändert lässt. Auch könnte man die Bedingungsgleichungen für die Integrirbarkeit des Systems (29) in Form von p Urgleichungen aufstellen, und würde sich auf die aus dem vorhergehenden ersichtliche Art überzeugen, dass selbe stets erfüllt werden, wenn die unter (16) erfüllt sind.

6.

Die Integration des Systems (13) ist hiemit zurückgeführt auf die Integration des Systems, welches bei derselben Anzahl von Gleichungen eine Variabele weniger enthält. Verfährt man ebenso mit dem Systeme (29) und jedem der nach und nach enthaltenen, so kommt man schliesslich auf ein L a g r a n g e'sches System von p Differentialgleichungen zwischen $p+1$ Variabelen, dessen vollständiges Integral aus p endlichen Gleichen besteht. — Hieraus folgt nun unmittelbar,

dass die Bedingungsgleichungen (16) notwendig und ausreichend sind für die Integrirbarkeit des Systems (13) in Form von p Urgleichungen. Setzt man jetzt iu (16) x_{n+l} statt y_l so findet man die Bedingungsgleichungen hiefür, dass das System linearer partiellen Differentialgleichungen (7) p verschiedene gemeinsame Lösungen besitzt. — Es bleibt übrig nachzuweisen die Identität dieser Bedingungsgleichungen mit den Jacobi'schen.

Bezeichnet man die erste Seite der Gleichung (7) mit $\Delta_i V$, und bildet den Ausdruck $(\Delta_s\Delta_r - \Delta_r\Delta_s)V$ für zwei der Gleichungen (7), so findet man:

$$(\Delta_s\Delta_r - \Delta_r\Delta_s)V = \sum_{k=1}^{k=p} Y_{r,s}^{(k)} \frac{\partial V}{\partial X_{n+k}}$$

wo

$$Y_{r,s}^{(k)} = \Delta_s A_{rk} - \Delta_r A_{sk}.$$

Nun ist

$$\Delta_s A_{rk} = \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_s} + \sum_{l=1}^{l=p} A_{sl} \frac{\partial A_{lk}}{\partial x_{n+l}}, \quad \Delta_r A_{sk} = \frac{\partial A_{sk}}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{l=p} A_{rl} \frac{\partial A_{sk}}{\partial x_{n+l}},$$

somit

$$(24) \quad Y_{r,s}^{(k)} = \frac{\partial A_{rk}}{\partial x_s} - \frac{\partial A_{sk}}{\partial x_r} + \sum_{l=1}^{l=p}\left(A_{sl}\frac{\partial A_{rk}}{\partial x_{n+l}} - A_{rl}\frac{\partial A_{sk}}{\partial x_{n-l}}\right).$$

Die Bedingung $Y_{r,s}^{(k)} = 0$ ist daher identisch mit (16), was zu beweisen war.

Wie wol die in dieser Abhandlung gegebene Integrationsmethode des Systems linearer partieller Differentialgleichungen in praktischer Hinsicht der Jacobi'schen offenbar nachsteht, so empfiehlt sie sich vorzüglich durch strenge und naturgemässe Ableitung der Bedingungsgleichungen, unter welchen das System ein Jacobi'sches ist.

Warschau, den 6. Mai 1870.

XV.

Beitrag zur Theorie der singulären Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Ladislaus Zajączkowski.

Boole hat in seinem ausgezeichneten Werke über Differentialgleichungen (Treatise on differential equations. Supplementary volume p. 23—31.) folgendes Theorem bewiesen:

„Ist $u = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \psi(x, y) \tag{1}$$

und geht diese Differentialgleichung in folgende

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \tag{2}$$

über, wenn statt der Veränderlichen y, x die Veränderlichen u, x eingeführt werden, so wird $u = 0$ eine singuläre Lösung sein, wenn für $u = 0$ nicht nur die Function $f(x, u)$ verschwindet, sondern auch das in Bezug auf u genommene (x als constant vorausgesetzt) Integral

$$\int_0^u \frac{du}{f(x, u)} = 0 \tag{3}$$

ist“; sowie umgekehrt:

„Ist $u = 0$ eine singuläre Lösung der Differentialgleichung (1), und bringt man diese Differentialgleichung mittelst der Einführung der Veränderlichen u, x statt der Veränderlichen y, x auf die Form (2), so wird für $u = 0$ das Integral (3) verschwinden.“

Auf dieselbe Art wie Boole dieses Theorem beweist, kann folgendes dem vorliegenden analoge bewiesen werden:

„Ist $u = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{1}{y'} = \varphi(x, y) \tag{4}$$

und geht diese Differentialgleichung in folgende:

$$\frac{du}{dy} = f(y, u) \tag{5}$$

über, wenn statt der Veränderlichen x, y die Veränderlichen u, y eingeführt werden, so ist dazu, dass $u = 0$ eine singuläre Lösung ist, notwendig und hinreichend, dass für $u = 0$ nicht allein die Function $f(y, u)$ verschwindet, sondern auch das in Bezug auf u genommene (y als constant vorausgesetzt) Integral

$$\int_0^u \frac{du}{f(y, u)} = 0 \tag{6}$$

wird.“

Die Bedingungsgleichungen (3), (6), welche dem Grundgedanken nach von Euler (Institutiones calculi integralis vol. I. problema 71.) herrühren und auch aus Cauchy's 2ten Theorem (Moigne Leçons de calcul differentiel et de calcul intégral vol. II. p. 447.) abgeleitet werden können, kann man durch gleichbedeutende, von jeglicher Integration freie und auch insofern bequemere ersetzen, was, meines Wissens, bisher nicht bemerkt worden ist.

Der bekannten Formel:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0) f[x_0 + \vartheta(X - x_0)]$$

wo ϑ ein positiver echter Bruch ist, gemäss, hat man

$$\int_0^u \frac{du}{f(x, u)} = \frac{u}{f(x, \vartheta u)}$$

Da nun für eine singuläre Lösung $u = 0$ die erste Seite vorliegender Gleichung verschwindet, so muss auch

$$\int^{u=0} \frac{u}{f(x, \vartheta u)} = 0,$$

somit

$$\Big|^{u=0} \frac{f(x, \vartheta u)}{u} = \infty$$

sein.

Es nimmt aber der unter dem Substitutionszeichen stehende Bruch für $u = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, daher ist nach der bekannten Regel:

$$\Big|^{u=0} \frac{f(x, \vartheta u)}{u} = \Big|^{u=0} \frac{\partial f(x, \vartheta u)}{\partial u}$$

Berücksichtigt man dies, so folgt aus der vorhergehenden Formel, dass für eine singuläre Lösung

$$\Big|^{u=0} \frac{\partial f(x, \vartheta u)}{\partial u} = \infty$$

oder

$$\Big|^{u=0} \frac{\partial \frac{du}{dx}}{\partial u} = \infty \tag{7}$$

sein muss. Wie man leicht sieht, ist die Bedingungsgleichung (7) vollkommen gleichbedeutend mit der Bedingungsgleichung (3).

Ebenso kann die Bedingungsgleichung (6) durch folgende

$$\Big|^{u=0} \frac{\partial \frac{du}{dy}}{\partial u} = \infty \tag{8}$$

vollständig ersetzt werden. Die Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ in (7) und (8) haben beziehungsweise die durch (2) und (5) gegebenen Werte.

Darauf gestützt kann man einen ebenso strengen als einfachen Beweis dafür geben, dass die den bekannten Laplace'schen Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty, \qquad \frac{\partial \frac{1}{y'}}{\partial x} = \infty \tag{9}$$

entspringende Lösung der Differentialgleichung (1) oder (4) wirklich singulär ist.

Sei $u = 0$ die der ersten Bedingungsgleichung (9) entspringende Lösung der Differentialgleichung (1), und differentiirt man selbe in der Voraussetzung, dass y von x abhängt, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'$$

wo $\frac{du}{dx}$ und y' beziehungsweise die durch (2) und (1) dargestellten Functionen bedeuten. Hieraus folgt:

$$y' = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Differentiirt man diesen Ausdruck partiell nach y, so ergibt sich

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial \frac{du}{dx}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] - \left[\frac{du}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

oder nach Verrichtung einer leichten Reduction:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial \frac{du}{dx}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\, l\, \frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

Da nun für $u = 0$ die erste Seite unendlich ist, so muss es auch die zweite sein. Es kann aber $\frac{\partial u}{\partial y}$ nicht Null, somit $l \frac{\partial u}{\partial y}$ nicht unendlich sein, weil die der Bedingungsgleichung $\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$ entspringende Lösung mindestens die Veränderliche y enthält, somit muss

$$\frac{\partial \frac{du}{dx}}{\partial u} = \infty$$

und daher $u = 0$ eine singuläre Lösung sein.

Sei jetzt $u = 0$ die der zweiten Laplace'schen Bedingungsgleichung (9) entspringende Lösung der Differentialgleichung (4), und differentiirt man selbe in der Voraussetzung, dass x von y abhängt, so findet man

$$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{y'}$$

wo $\frac{du}{dy}$ und $\frac{1}{y'}$, beziehungsweise die durch (5) und (4) dargestellten Functionen bedeuten. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{y'} = \frac{\frac{du}{dy} - \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Differentiirt man diesen Ausdruck partiell nach x, so ergibt sich

$$\frac{\partial \cdot \frac{1}{y'}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial \frac{du}{dy}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] - \left[\frac{du}{dy} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

oder wenn eine ähnliche Reduction wie zuvor verrichtet wird:

$$\frac{\partial \frac{1}{y'}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{du}{dy}}{\partial u} - \frac{d}{dy}\, l\, \frac{\partial u}{\partial x} \tag{11}$$

Da die der zweiten Laplace'schen Bedingungsgleichung $\frac{\partial \frac{1}{y'}}{\partial x} = \infty$ entspringende Lösung $u = 0$ notwendig die Veränderliche x enthalten muss, so kann $\frac{\partial u}{\partial x}$ nicht Null, somit $l\frac{\partial u}{\partial x}$ nicht unendlich sein, also wenn für $u = 0$ die erste Seite der Formel (11) unendlich wird, so muss auch

$$\frac{\partial \frac{du}{dy}}{\partial u} = \infty$$

somit $u = 0$ eine singuläre Lösung sein.

Warschau, am 10. Juni 1870.

XVI.

Eigenschaften der aus rationalen ganzen Functionen dritten Grades entspringenden Curven.

Von

Herrn *Ludwig Stoeckly*
in Grenchen in der Schweiz, Canton Solothurn.

Die benannten algebraischen Functionen lassen sich immer auf folgende Form bringen:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Jede aus einer solchen Function entspringende Curve hat, wie bereits bekannt, einen Wendepunkt und erstreckt sich mit zwei Aesten in's Unendliche. Die Curve kann die Abscissenaxe dreimal, muss sie aber wenigstens einmal schneiden; es hängt dies von den Coefficienten a, b und der Constanten c ab. Ob die fortgleitende Ordinate, y, der Curve je in den Zustand des Maximums kommt, hängt allein von a und b ab, und ist dasselbe der Fall, so ist immer zugleich auch ein Minimum vorhanden. Nehmen wir, um einen bestimmten Anknüpfungspunkt für unsere Untersuchung zu haben, den Fall an: 1) der Coefficient a und das bekannte Glied c seien negativ; 2) es sei $\frac{1}{9}a^2 > \frac{1}{3}b$. Zufolge der ersten Bedingung hat dann die Curve zu den gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten eine Lage, wie ungefähr Fig. 1. es darstellt, und laut der zweiten Bedingung hat die Curve auch ein Maximum und Minimum. Wir haben ferner angenommen, die Grössen a, b und c seien so beschaffen, dass die Linie die Abscissenaxe dreimal durchschneidet, so dass also die auf Null gebrachte Function drei reelle Wurzeln hat. Es hat dies übrigens keinen Einfluss bei der

folgenden Untersuchung und es könnten ebenso gut zwei Wurzeln der Gleichung imaginär sein. Unsere zu untersuchende Function hat also jetzt folgende Form:

$$y = f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c \qquad (1)$$

Daraus folgt nun ferner:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 2ax + b \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 2a.$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt:

$$x = \tfrac{1}{3}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2 - \tfrac{1}{3}b}$$

und setzen wir $f''(x) = 0$, so hat man:

$$x = \tfrac{1}{3}a.$$

Nun sei in Fig. 1. $M'B = y'$ die Ordinate des Maximums, $M''D = y''$ die des Minimums und $M'''C = y'''$ diejenige des Wendepunktes. Die den Ordinaten y', y'' und y''' entsprechenden Abscissen AB, AD und AC seien x', x'' und x'''. Mit Benutzung des Vorhergegangenen ergibt sich dann, nachdem wir noch der Einfachheit wegen $\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2 - \tfrac{1}{3}b} = m$ gesetzt haben:

$$x' = \tfrac{1}{3}a - m, \qquad x'' = \tfrac{1}{3}a + m, \qquad x''' = \tfrac{1}{3}a.$$

Setzen wir in $f(x)$ nach einander für x die Werte der Abscissen x', x'' und x''', so erhalten wir die dazu gehörigen Ordinaten, nämlich:

$$\begin{aligned} y' &= (\tfrac{1}{3}a - m)^3 - a(\tfrac{1}{3}a - m)^2 + b(\tfrac{1}{3}a - m) - c \\ y'' &= (\tfrac{1}{3}a + m)^3 - a(\tfrac{1}{2}a + m)^2 + b(\tfrac{1}{3}a - m) - c \\ y''' &= (\tfrac{1}{3}a)^3 - a(\tfrac{1}{3}a)^2 + b(\tfrac{1}{3}a) - c \end{aligned}$$

In jeder Function von der Form der Gleichung (1) ist also die Abscisse des Wendepunktes, $\tfrac{1}{3}a$, immer gleich dem dritten Teil des Coefficienten von x^2 mit entgegengesetztem Vorzeichen. Während die Abscisse des Wendepunktes nur von a abhängig, sind dagegen die Abscissen der Maximums- und Minimumsordinaten von a und b zugleich abhängig. Die erstere ist $\tfrac{1}{3}a - m$, die letztere $\tfrac{1}{3}a + m$. Beide Ordinaten y' und y'' stehen also gleich weit von y''' ab, d. h. es ist immer

$$CB = CD = m = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2 - \tfrac{1}{3}b},$$

aber diese Entfernung ist um so kleiner, je grösser $\tfrac{1}{2}b$ im Verhältniss zu $\tfrac{1}{9}a^2$ ist. Wird aber $\tfrac{1}{3}b = \tfrac{1}{9}a^2$, so wird $m = 0$ und die Punkte M' und M'' fallen mit M''' zusammen, weil nicht nur ihre Abscissen beide $= x''' = \tfrac{1}{3}a$, sondern auch ihre Ordinaten beide

$$= y''' = (\tfrac{1}{3}a)^3 - a(\tfrac{1}{3}a)^2 + b(\tfrac{1}{3}a) - c$$

werden. Wenn also $\frac{1}{3}b = \frac{1}{9}a^2$ oder $> \frac{1}{9}a^2$ ist, in welch letzterem Falle m imaginär wird, so hat die Curve gar keinen Maximums- und Minimumspunkt mehr, sondern einzig noch einen Wendepunkt. Es geht dies auch aus dem Verhalten des ersten Differentialquotienten hervor. Setzen wir nämlich in $f'(x)$ statt x den Wert $\frac{1}{3}a \pm h$, wobei h eine hinreichend kleine Grösse bedeutet, so wird:

$$f'(\tfrac{1}{3}a + h) = 3h^2 - \tfrac{1}{3}a^2 + b \quad \text{und} \quad f'(\tfrac{1}{3}a - h) = 3h^2 - \tfrac{1}{3}a^2 + b.$$

Da aber, wie wir oben angenommen,

$$\tfrac{1}{3}b = \tfrac{1}{9}a^2, \quad \text{also} \quad b = \tfrac{1}{3}a^2,$$

so wird:

$$f'(\tfrac{1}{3}a + h) = 3h^2 \quad \text{und} \quad f'(\tfrac{1}{3}a - h) = 3h^2.$$

Es ändert also $f'(x)$ das Vorzeichen nicht und es findet deshalb weder Maximum noch Minimum statt. Eben so wenig ist dies der Fall, wenn $\frac{1}{3}b > \frac{1}{9}a^2$ und also m imaginär wird. — So viel über die Abhängigkeit der Abscissen x', x'' und x''' von den Grössen a und b. Die zugehörigen Ordinaten y', y'' und y''' sind, wie leicht aus ihren Werten zu sehen, nicht allein von a und b, sondern von a, b und c zugleich abhängig. Ohne nun die dabei Statt findenden Beziehungen näher zu erörtern, was nicht im Zwecke unserer Untersuchung liegt, kehren wir wieder zu unsern 3 Punkten $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ und $M'''(x''', y''')$ zurück, welche die aus $f(x)$ entspringende Linie unter den oben angegebenen Bedingungen immer haben muss. Legen wir nun, wie in Fig. 1 angedeutet, durch die Punkte M' und M'' eine Gerade u, so ist deren Gleichung:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \tag{2}$$

Setzen wir für die in dieser Gleichung vorkommenden bestimmten Coordinaten ihre aus $f(x)$ oben abgeleiteten Werte, und für die laufende Abscisse x den Wert $x''' = \frac{1}{3}a$, so folgt:

$$y - (\tfrac{1}{3}a - m)^3 + a(\tfrac{1}{3}a - m)^2 - b(\tfrac{1}{3}a - m) + c$$
$$= \frac{(\tfrac{1}{3}a - m)^3 - (\tfrac{1}{3}a + m)^3 - a(\tfrac{1}{3}a - m)^2 + a(\tfrac{1}{3}a + m)^2 - 2bm}{(\tfrac{1}{3}a - m) - (\tfrac{1}{3}a + m)} [\tfrac{1}{3}a - (\tfrac{1}{3}a - m)]$$

Nach gehöriger Reduction und Transformation folgt ferner:

$$y = (\tfrac{1}{3}a)^3 - a(\tfrac{1}{3}a)^2 + b(\tfrac{1}{3}a) - c = y'''.$$

Setzt man also in Gleichung (2) die laufende Abscisse $x = x'''$, so erhält man für die entsprechende Ordinate y den Wert y'''. Es geht

also die durch die Punkte $M'(x',y')$ und $M''(x'',y'')$ gelegte Gerade u durch den Punkt $M'''(x''',y''')$, oder, mit andern Worten: Besitzt eine aus einer vollständigen Function dritten Grades hervorgehende Curve nebst dem Wendepunkt auch ein Maximum und Minimum, so liegen die der Curve angehörigen Endpunkte der Maximums- und Minimumsordinate mit dem Wendepunkt in einer Geraden. Der Wendepunkt liegt auf der Abscissenaxe wenn $y''' = 0$ ist. Setzen wir also

$$y''' = -\frac{2}{27}a^3 + \tfrac{1}{3}ab - c = 0,$$

so geht die neue Abscissenaxe, die wir in Fig. 2 mit u_1 bezeichnet haben, durch den Wendepunkt M'''. Die neue Abscissenaxe u_1 denken wir uns parallel zur alten gelegt und den Anfangspunkt A_1 so gewählt, dass die Abscissen der drei Punkte M', M'' und M''' dieselben bleiben. Die auf die neue Abscissenaxe u_1 bezogene Gleichung derselben Curve heisst dann:

$$y = x^3 - ax^2 + bx - c' \qquad (3)$$

In dieser neuen Gleichung muss $c' = c + y'''$ sein, weil $AA' = y'''$. Dass die Coefficienten a und b der neuen Gleichung dieselben sein müssen wie in Gleichung (1) folgt daraus, dass die Abscisse x''', die von a allein abhängt, sowie die Abscissen x' und x'', die von a und b zugleich abhängen, sich nicht geändert haben. Die Ordinaten unserer drei Punkte haben aber bei dieser Verschiebung ihre Werte geändert. Die Ordinate y''' ist nach unserer Voraussetzung Null geworden und die Ordinate des Maximums hat um y''' ab, die des Minimums um y''' zu genommen. Bezeichnen wir die neue Ordinate des Punktes M' mit Y' und die des Punktes M'' mit Y''. so ist offenbar:

$$Y' = BM' - BE = y' - y''' \quad \text{und}$$
$$Y'' = DM'' + DF = y'' + (-y''') = y'' - y'''.$$

Es lassen sich also die neuen Ordinaten aus den alten berechnen, und man hat nicht nötig die Gleichung (3) zu benutzen; es ist jedoch dabei wol zu beachten, dass bei den alten Ordinaten y'' und y''' entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so dass y''' mit entgegengesetztem Vorzeichen zu y'' addirt werden muss, damit letztere Ordinate um y''' grösser wird, Wir erhalten:

(4)

$$Y' = (\tfrac{1}{3}a - m)^3 - a(\tfrac{1}{3}a - m)^2 + b(\tfrac{1}{3}a - m) - c - [(\tfrac{1}{3}a)^3 - a(\tfrac{1}{3}a)^2 + b(\tfrac{1}{3}a) - c]$$

(5)

$$Y''' = (\tfrac{1}{3}a + m)^3 - a(\tfrac{1}{3}a + m)^2 + b(\tfrac{1}{3}a + m) - c - [(\tfrac{1}{3}a)^3 - a(\tfrac{1}{3}a)^2 + b(\tfrac{1}{3}a) - c]$$

Wird entwickelt und reducirt, so folgt:

$$Y' = \tfrac{1}{3}a^2m - bm - m^3 \quad \text{und} \quad Y'' = -(\tfrac{1}{3}a^2m - bm - m^3).$$

Es ist also $Y' = -Y''$ oder in Worten: Geht die Abscissenaxe durch den Wendepunkt, so sind Maximums- und Minimumsordinate quantitativ gleich. Dass man durch Gleichung (3) zum gleichen Resultate kommen muss, lehrt der blosse Anblick der Formeln (4) und (5), da für die neue Abscissenaxe u_1 sich in diesen Formeln nichts ändert als c, das in c' übergeht, welches bei der Reduction aber sogleich wegfällt. Wie schon oben bemerkt, geht aber die Abscissenaxe immer nur dann durch den Wendepunkt, wenn

$$y''' \text{ oder } \tfrac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3 - c = 0$$

ist. Dies ist z. B. der Fall in

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15,$$

indem hier wirklich

$$\tfrac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3 - c = -69 + 54 + 15 = 0.$$

Es sind nun ferner die rechtwinkligen Dreiecke $M'EM'''$ und $M''FM'''$ in Fig. 2. congruent. Denn es ist, wie soeben bewiesen wurde,

$$M'E = M''F \quad \text{und} \quad M'''E = M'''F = m = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2 - \tfrac{1}{3}b}.$$

Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt, dass auch

$$M'''M' = M'''M''$$

sein muss und wir gelangen so zu dem Satze:

Eine Gerade, welche die Endpunkte der Maximum- und Minimumcoordinaten verbindet, geht durch den Wendepunkt und wird in diesem halbirt.

Um nun zu untersuchen, ob auch jede andere Gerade, die, durch M''' gehend, zwei Curvenpunkte verbindet, in M''' halbirt werde, verfahren wir auf folgende Weise. Sei r eine beliebige Grösse, jedoch grösser oder kleiner als m, und setzen wir in Gleichung (1) statt x die Werte $\tfrac{1}{3}a - r$ und $\tfrac{1}{3}a + r$, entsprechend den Abscissen AG und AH (in Fig. 2), so gelangen wir zu zwei neuen Punkten N' und N'', die, jenachdem $r >$ oder $< m$, entweder beide ausserhalb oder beide innerhalb der Maximum- und Minimumcoordinate liegen. Nehmen wir, übereinstimmend mit Fig. 2., das Erstere an und bezeichnen wir die diesen Abscissen entsprechenden (und auf den Anfangspunkt A bezogenen) Ordinaten mit n' und n''. Legen wir nun durch die bei-

den Punkte N' $(\frac{1}{3}a-r, n')$ und N'' $(\frac{1}{3}a+r, n'')$ eine Gerade, so ist deren Gleichung:

$$y-n' = \frac{n'-n''}{(\frac{1}{3}a-r)-(\frac{1}{3}a+r)}[x-(\frac{1}{3}a-r)]$$

oder, indem man für die Ordinaten die aus Gleichung (1) resultirenden Werte setzt:

$$y-(\tfrac{1}{3}a-r)^3+a(\tfrac{1}{3}a-r)^2-b(\tfrac{1}{3}a-r)+c$$

$$=\frac{(\frac{1}{3}a-r)^3-a(\frac{1}{3}a-r)^2+b(\frac{1}{3}a-r)-c-(\frac{1}{3}a+r)^3+a(\frac{1}{3}a+r)^2-b(\frac{1}{3}a+r)+c}{(\frac{1}{3}a-r)-(\frac{1}{3}a+r)}$$

$$\times[x-\tfrac{1}{3}a+r]$$

Verfährt man hier wieder wie oben bei Gleichung (2), indem man für x den Wert $x''' = \frac{1}{3}a$ setzt, so wird nach gehöriger Reduction:

$$y = (\tfrac{1}{3}a)^3-a(\tfrac{1}{3}a)^2+b(\tfrac{1}{3}a)-c = y'''$$

und die Gerade $N'N''$ geht also auch durch M'''. Welchen reellen Wert man nun auch der Grösse r geben mag, so führen $f(\frac{1}{3}a-r)$ und $f(\frac{1}{3}a+r)$ immer zu zwei neuen entsprechenden Curvenpunkten, deren Verbindungslinie durch M''' geht. Da nun ferner in Fig. 2.

$$KM''' = M''L = r,$$

so sind die rechtwinkligen Dreiecke $N'KM'''$ und $N''LM'''$ congruent und daher

$$M'''N' = M'''N''.$$

Dies findet für jede andere durch M''' gehende Linie ebenfalls statt, und zwar auch bei Curven dritten Grades, die kein Maximum und Minimum besitzen, indem diese Punkte hierbei keine Ausnahmestellung gegenüber den anderen Curvenpunkten einnehmen. Wir haben also ganz allgemein die Beziehung:

Jede Gerade, die zwei Punkte einer ebenen Curve dritten Grades verbindet und durch den Wendepunkt geht, wird in diesem halbirt.

Geht daher die Abscissenaxe selbst durch den Wendepunkt, so wird auch die zwischen den Curvenpunkten p und q liegende Strecke derselben in M''' halbirt, so dass

$$M'''p = M'''q.$$

Ist also die Wendepunktsabscisse eine Wurzel einer Gleichung 3ten Grades, so ist diese Wurzel zugleich das arithmetische Mittel der beiden andern, wenn solche reell und nicht imaginär sind. Wegen

der beständigen Congruenz der Dreiecke $N'KM'''$ und $N''LM'''$ beschreiben die Endpunkte der Linie $N'N''$ zwei congruente Curvenäste. Denken wir uns durch die Endpunkte der Linie $N'N''$ zwei Tangenten an die Curve gelegt, so sind die Abscissen ihrer Berührungspunkte $(\frac{1}{3}a-r)$ und $(\frac{1}{3}a+r)$. Setzen wir diese Werte an die Stelle von x in $f'(x)$, so folgt:

$$\text{Für den Punkt } N'\text{: } \frac{\partial y}{\partial x} = 3(\tfrac{1}{3}a-r)^2 - 2a(\tfrac{1}{3}a-r) + b = 3r^2 - \tfrac{1}{3}a^2 + b$$

$$\text{Für den Punkt } N''\text{: } \frac{\partial y}{\partial x} = 3(\tfrac{1}{3}a+r)^2 - 2a(\tfrac{1}{3}a+r) + b = 3r^2 - \tfrac{1}{3}a^2 + b$$

Wir haben also ferner den Satz:

Die trig. Tangenten zweier entsprechenden (durch eine durch den Wendepunkt gehende Gerade verbundenen) Curvenpunkte sind immer gleich gross.

Fassen wir die Sache rein analytisch auf, so können wir jetzt den Satz aufstellen:

Ist $f(x)$ eine beliebige Function dritten Grades und $\frac{1}{3}a$ eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, sowie auch eine solche der Gleichung $f''(x)=0$, so gibt $f(x)$ sowohl, als auch $f'(x)$ und $f''(x)$, für $x=\frac{1}{3}a+r$ und $x=\frac{1}{3}a-r$ quantitativ gleiche Werte, die in $f(x)$ und $f''(x)$ entgegengesetzte, in $f'(x)$ aber gleiche Vorzeichen haben, was man auch statt r für einen Wert setzen mag.

Für $f(x)$ und $f'(x)$ wurde vorstehender Satz bewiesen, und dass er auch für $f''(x)$ richtig ist, ergibt sich durch eine leichte Probe, geht aber auch schon daraus hervor, dass $\frac{1}{3}a$ die Wurzel von $f''(x)=0$, und dass $f''(x)=0$ eine Function ersten Grades ist.

Man kann den Wendepunkt M''' einer Curve dritten Grades nicht unpassend auch Mittelpunkt der Curve dritten Grades, die durch ihn gezogenen Sehnen aber Durchmesser der Curve dritten Grades nennen. Jeder beliebige Durchmesser ab (Fig. 3.) kann dann als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen werden, und immer gibt die Curve für gleichweit von M''' sich erstreckende Abscissen quantitativ gleiche Ordinaten, wegen der fortwährenden Congruenz der Dreiecke α und β. Nimmt man ferner einen solchen Durchmesser, deren die Curve unendlich viele hat, als Abscissenaxe an, so sind immer, wenn $f(x)=0$ gesetzt wird, alle drei Wurzeln dieser Gleichung reell.

Sei ef in Fig. 3. die Tangente der Curve in M''', so ist das mit

der Curve zusammenfallende Linienelement dieser Tangente der **kleinste Durchmesser** derselben, und die übrigen Durchmesser, die beiden Aeste der Curve mit ihren Enden beschreibend, werden immer grösser und der letzte derselben, der eine zu unserer ursprünglich angenommenen Abscissenaxe senkrechte Lage besitzt, wie cd, ist unendlich gross. Jede in dem vollkommenen ebenen Winkel φ liegende durch M''' gehende Gerade hat nur diesen einen Punkt M''' mit der Curve 3ter Ordnung gemein. Von der Grösse dieses Winkels φ hängt auch die absolute Grösse der Summe der Maximums- und Minimumsordinate (die Grösse der Linie $M'm$) ab und die daherigen Beziehungen sind leicht zu entwickeln. Für $\varphi = 90^0$ z. B. läuft ef parallel mit der Abscissenaxe und es ist $f'(\frac{1}{3}a) = 0$, was, wie schon früher gezeigt, dann eintritt, wenn $\frac{1}{3}b = \frac{1}{9}a^2$. Für diesen Fall ist die Linie $M'm = 0$ und ebenso für alle jene Curven 3ten Grades, die aus $f(x)$ entspringen unter der Bedingung: $\frac{1}{3}b > \frac{1}{9}a^2$.

Folgendes verdient noch einer kurzen Erwähnung. Sei in Fig. 3. Aa eine Wurzel von $f(x) = 0$, und ab ein durch M''' gehender Durchmesser der Curve, sowie bh die Ordinate des Curvenpunktes b, so hat man offenbar: $ag:ah = aM''':ab$, d. h. es muss $ag = \frac{1}{2}ah$ und ebenso $gM''' = \frac{1}{2}hb$ sein. Dies gilt für alle **reellen** Wurzeln von $f(x) = 0$. Wir sind somit berechtigt den Satz aufzustellen:

Jede Gerade, die den Wendepunkt einer Curve 3ten Grades mit einem zweiten Punkte dieser Curve verbindet, dessen Ordinate das Doppelte der Wendepunktsordinate beträgt, geht durch einen reellen Wurzelpunkt dieser Curve.

Soll eine Curve 3ten Grades construirt werden, so genügt es, den Wendepunkt und den einen Ort durch Rechnung zu bestimmen, was mit Hülfe der erwähnten Eigenschaften dieser Curven hinreichend klar sein dürfte.

XVII.

Die rationalen Dreiecke.

Vollständig entwickelt und mit Ausscheidung aller Wiederholungen 3 systematische Tafeln gebracht

von

Heinrich Rath,
Mathematiklehrer am Realgymnasium in Kaaden.

Vorwort.

Mit der vorliegenden Schrift hatte ich mir die Aufgabe gestellt, ein historisch merkwürdiges und ziemlich umfassendes Problem der rationalen Analysis gründlich und bis in seine Einzelnheiten hinaus zu lösen. So weit auch die rationale Analysis im Allgemeinen entwickelt ist; eine vollständig durchgeführte Specialarbeit besitzen wir noch nicht. Und damit fehlt dieser mathematischen Disciplin die eigentliche Anwendung. Denn es kann nicht genügen, die verschiedenen Probleme nur mit einigen Zügen rational zu machen; es müssen auch einzelne Aufgaben durchgearbeitet werden. Und gerade hier zeigen sich erst die zahlreichen und eigentümlichen Schwierigkeiten der rationalen Analysis, die manchmal selbst des sorgfältigsten Scharfsinns spotten. Das mag denn auch die Ursache sein, warum bisher die Detailarbeiten hinter den grossen Bahnbrechern in dieser Wissenschaft so kümmerlich zurückgeblieben sind.

Zwar in Bezug auf die rationalen rechtwinkligen Dreiecke hat es nicht an Versuchen zu einer befriedigenden Lösung gefehlt, und die Schrift von C. A. W. Berkhan: „Die merkwürdigsten Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen“ darf hier immerhin mit Aner-

kennung genannt werden. Aber wenn man alle diese Arbeiten mit den Leistungen der alten Griechen vergleicht, so müssen wir gestehen, dass wir hierin nicht um einen Schritt vorwärts gekommen sind, nur die Sätze der höheren Zahlenlehre über die Hypotenusenzahl ausgenommen, obwol uns die indischen Formeln schon lange zu Gebote stehen. Denn schon Pythagoras hat die erste Gruppe meiner pythagorischen Primtafel geliefert, Platon alle ersten Gruppendreiecke derselben; und dennoch findet sich in unserer mathematischen Literatur keine Spur eines Systems der pythagorischen Dreiecke. Diesen Mangel scheint auch Berkhan gefühlt zu haben, da er sich, obwol vergeblich, um eine Systemalisirung dieser Dreiecke bemüht hat und dann bekennt, dass die Frage nach einer sichern und bequemen Berechnung noch zu erledigen ist. Ja die Versuche so vieler und darunter selbst grosser Mathematiker, wie Euler, zu besonderen Lösungen des pythagorischen Problems zeigen erst recht schlagend, dass der Wert der indischen Formeln, der hauptsächlich in ihrer Vollständigkeit liegt, bisher nicht klar erkannt worden ist, eben weil die meisten jener Lösungen unvollständig sind. Und doch ist die Vollständigkeit der Lösungen die Hauptsache bei der rationalen Analysis. Die Erkenntniss von der Natürlichkeit und Vollständigkeit der indischen Formeln ist erst durch meinen 4. Satz, dass jedes rationale Primdreieck nur Eine gerade Seitenzahl hat, gründlich überzeugend möglich geworden, und die Einfachheit, mit der sich jene Formeln von diesem Satze ab ergeben, dürfte wohl allerseits befriedigen.

Ueber die rationalen Dreiecke im Allgemeinen, von denen die pythagorischen nur eine Specialität bilden, ist mir weder eine besondere Abhandlung, noch sonst ein nennenswertes Eingehen auf dieselben bekannt geworden. Diese Vernachlässigung des allgemeinen Problems, besonders im Gegenhalt zu der Bevorzugung des speciellen, ist um so weniger zu rechtfertigen, als sämmtliche rationale Dreiecke viele interessante Eigenschaften gemein haben, und als ferner ohne allgemeine Behandlung eine erschöpfende Lösung auch der Details nicht möglich ist. Deshalb ist auch bisher eine ganze Gattung rationaler Dreiecke unbekannt geblieben, jene nämlich, welche von 4 Bestimmungszahlen abhängig sind, und für die ich in meiner III. Tafel ein System angedeutet habe.

Ein Hauptgrund dieser Mängel liegt in der Vernachlässigung der primären Lösung, ohne die weder Einfachheit noch Bestimmtheit in diese Materie kommt. Denn im wahren Grunde gibt es nur rationale Primdreiecke, da es natürlich ist, jedes Dreieck durch seine kleinsten Seitenzahlen auszudrücken. Nur dadurch wird es möglich, die störenden Wiederholungen auszuscheiden, ohne die keine Sicherheit und

Eleganz in die Berechnung kommt. So liefern auch die indischen Formeln nicht alle Ableitungen der pythagorischen Dreiecke mit Nichtquadratzahlen, sondern ausnahmslos nur jene mit dem Factor 2; z. B.

2.3, 2.4, 2.5

nicht aber:

3.3, 3.4, 3.5

5.3, 5.4, 5.5

u. s. w.

Schliesslich gebe ich der Hoffnung noch Ausdruck, dass diese Schrift die Verwandtschaft und den Zusammenhang der Regeln des Pythagoras und Platon mit den unbestimmten Gleichungen des Diophantus und seinen Sätzen über das rechtwinklige Dreieck neu anregen und dadurch mehr Licht in den mathematischen Entwicklungsgang der Griechen bringen werde. Denn jene Regeln gehören gleichfalls der unbestimmten Analysis an, nämlich der unbestimmten rationalen Analysis, und ihnen gegenüber steht die Arbeit des Diophant nicht mehr als ein Unicum ohne jede vorausgegangene Spur da, wie es in der Geschichte der Mathematik gemeinhin heisst.

Kaaden im November 1870.

Heinrich Rath.

I. Allgemeine Eigenschaften der rationalen Primdreiecke.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks commensurabel, und man misst sie durch die grösste gemeinsame Längeneinheit, so werden die Seitenmasszahlen im Allgemeinen relative Primzahlen, während sie einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, oder Brüche werden, wenn man mit einem aliquoten Teil, oder mit einem Vielfachen jener Längeneinheit misst. Solche Dreiecke mit ganzen, relativ primären Seitenzahlen kann man Primdreiecke nennen. Jedes seitencommensurable Dreieck lässt sich als ein Primdreieck ausdrücken, wenn man der Messung die grösste Masseinheit zu Grunde legt. Tritt zu den relativ primären Seitenmassen noch eine Inhaltszahl, so hat man ein rationales Primdreieck.

1. Ein Dreieck mit drei ganzen, relativ primären Seitenzahlen und einer rationalen Inhaltszahl heisst ein rationales Primdreieck. Ist dasselbe rechtwinklig, so heisst es ein pythagorisches Primdreieck.

Alle ähnlichen rationalen Dreiecke lassen sich numerisch als ein und dasselbe Primdreieck darstellen, indem man jedes mit seiner grössten Längeneinheit misst; und von jedem rationalen Primdreieck lassen sich alle möglichen, ihm ähnliche rationale Dreiecke ableiten, indem man die Seiten mit einer Zahl und die Fläche mit dem Quadrate dieser Zahl multiplicirt und dividirt. Zwei rationale Dreiecke unterscheiden sich also nur durch ihr Seitenverhältniss. Mithin repräsentirt die vollständige Gruppe der rationalen Primdreiecke alle möglichen rationalen Dreiecke, weshalb sich die vorliegende Aufgabe auf Herstellung aller rationalen Primdreiecke reducirt.

Sind a, b, c die Seitenmasse und α, β, γ die Masszahlen der durch den inneren Berührungskreis bewirkten „Seitenteile“, so folgt:

$$a = \beta + \gamma, \quad b = \alpha + \gamma, \quad c = \alpha + \beta$$

$$a + b = \alpha + \beta + 2\gamma = c + 2\gamma > c$$

$$a + c = b + 2\beta > b, \quad b + c = a + 2\alpha > a$$

$$\frac{a+b+c}{2} = \alpha + \beta + \gamma, \quad \frac{-a+b+c}{2} = \alpha$$

$$\frac{a-b+c}{2} = \beta \qquad \frac{a+b-c}{2} = \gamma$$

$$i = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$i = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma}$$

Welche drei Zahlen man auch für α, β, γ setzt, immer wird die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite. Die Seitenteilmasse sind also unabhängiger, als die Seitenzahlen, weshalb man am besten jene zur Bestimmung der rationalen Dreiecke benutzt.

Setzt man $a = b = c$, so wird die Inhaltszahl irrational:

$$i = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \alpha^2\sqrt{3}$$

2. Kein rationales Dreieck ist gleichseitig.

Mithin kann es nur gleichschenklige und ungleichseitige rationale Dreiecke geben.

Setzt man für a, b, c drei ungerade Zahlen, oder nur Eine, so wird die Umfangszahl u und jeder der vier Zähler in

$$\frac{a+b+c}{2}, \quad \frac{-a+b+c}{2}, \quad \frac{a-b+c}{2}, \quad \frac{a+b-c}{2}$$

eine ungerade Zahl, was gibt

$$\alpha = \frac{2x+1}{2}, \qquad \beta = \frac{2y+1}{2}, \qquad \gamma = \frac{2z+1}{2}$$

$$\begin{aligned} 16i^2 &= [2(x+y+z)+3](2x+1)(2y+1)(2z+1) \\ &= [2s+3](4A+2s+1) \\ &= (2s+3)4A+4s^2+6s+2s+3 \\ &= 4B+3 = 4N-1 \\ 4i &= \sqrt{4N-1} \end{aligned}$$

Erhebt man aber eine gerade und eine ungerade Zahl aufs Quadrat, so folgt

$$(2m)^2 = 4m^2$$
$$(2n+1)^2 = 4(n^2+n)+1 + 4p+1$$

d. h. nur eine 4fache Zahl, sowie eine solche ungerade Zahl, welche um 1 grösser als eine 4fache Zahl ist, kann eine Quadratzahl sein. Desshab muss

$$\sqrt{4N-1}$$

eine irrationale Zahl sein.

Will man dieses auch umgekehrt beweisen, in der Voraussetzung, dass die ungerade Zahl $4N-1$ doch eine Quadratzahl von der Form $4p+1$ enthalten möchte, so folgt

$$4N-1 = 4p+1, \quad 4N = 4p+2, \quad 2N = 2p+1$$

ein Widerspruch, da die gerade Zahl $2N$ einer ungeraden Zahl nicht gleicht.

Daraus folgt nun zunächst der zahlentheoretische Satz:

3. **Multiplicirt man die Summe dreier ungerader Zahlen mit dem Producte dieser drei Zahlen, so ist die zweite Wurzel aus dem ganzen Product irrational.**

Und weiter folgt daraus, dass Dreiecke mit drei ungeraden Seitenzahlen, oder nur mit Einer ungeraden Seitenzahl irrational sind, dass mithin die rationalen Dreiecke nur Ein gerades Seitenmass, oder 3 gerade Seitenmasse haben müssen, so dass für die rationalen Prim-Dreiecke nur Ein gerades Seitenmass möglich ist. Daraus ergeben sich eine gerade Umfangs- und Flächenzahl, sowie ganze Seitenteilzahlen.

4. Jedes rationale Primdreieck hat nur Eine gerade Seitenzahl, gerade Umfangs- und Flächenzahlen, sowie ganze Seitenteilzahlen.

Anm. Es gibt also kein rationales Dreieck mit ganzen Seitenzahlen, das nicht auch eine ganze, und zwar eine gerade Inhaltszahl hat.

Bezeichnet man eine Dreieckshöhe durch h und die von ihr bewirkten Seitenabschnitte auf a durch x und $a \mp x$, so folgt

$$a.h = 2i, \qquad h = \frac{2i}{a}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a \mp x)^2$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 - x^2 \pm 2ax$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{\pm 2a}$$

Weil aber in rationalen Primdreiecken i, a, b, c ganze Zahlen sind, so ergeben sich auch für h, x, $a \mp x$ rationale Zahlen. Dasselbe folgt für den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises:

$$(a+b+c)\varrho = 2i, \quad \varrho = \frac{2i}{a+b+c} = \frac{i}{\alpha+\beta+\gamma}$$

5. In jedem rationalen Dreieck sind die Höhen, sowie die von den Höhen bewirkten Seitenabschnitte und der Radius des innern Berührungskreises unter sich und zu den Seiten commensurabel.

Um nun alle rationalen Dreiecke zu erhalten, würde man zunächst die Inhaltsformel des Dreiecks aus den Seitenteilmassen rational zu machen und alle Primdreiecke herzustellen haben. Weil sich aber die pythagorischen Dreiecke einfacher berechnen lassen, und dann zur Analyse des allgemeinen Problems wertvolle Anhaltspunkte bieten, wie auch deren Eigenschaften bei der speciellen Lösung deutlicher hervortreten, so löse ich zunächst das pythagorische Problem.

II. Entwicklung aller pythagorischen Primdreiecke.

Ist c die Hypotenusenzahl, so folgt für $a = b$

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

6. Alle pythagorischen Dreiecke sind ungleichseitig.

Nach Satz 4 folgt aus $i = 2n$

hat ein wenigstens dop-

Katheten- sowie die

und eine ungerade

durch b, so sind

gesetzt. geben

Primzahlen,

soll. Man er-

weil sie sich

Primanegupta aus

die vorstehende

da kein solches

hat und

sind. Diese

einfachsten

pythagorischen

im V. Band

nachgewiesen hat.

Seitenzahl-

ständigkeit

und dürfte

gleichwohl nur

roh, ohne System und mit Wiederholungen, das sich erst durch weitere Betrachtungen als ein sehr fein gegliedertes erweist.

Setzt man nämlich, um die Differenz m^2-n^2 zu beseitigen, da $m>n$ bleiben muss,

$$m=n+d$$

so folgt

$$\begin{aligned} a &= d(2n+d) \\ b &= 2n(n+d) \\ c &= b+d^2 = a+2n^2 \end{aligned}$$

Da nun für Primdreiecke m und n relative Primzahlen sein müssen, so müssen es auch n und d sein; und wenn d eine gerade Zahl wäre, so würden a, b und c gerade Zahlen zu einem Nichtprimdreieck, weshalb d nur eine gerade Zahl sein darf. Wählt man daher d zur Gruppenzahl, so bekommt man nur so viele Gruppen, als es ungerade Zahlen gibt. Setzt man nun für n nur solche ganze Zahlen, welche mit der jedesmaligen Gruppenzahl d keinen Factor gemein haben, so kann in derselben Gruppe kein Dreieck zweimal vorkommen, weil mit n alle Seitenzahlen wachsen; und für zwei gleiche Dreiecke in verschiedenen Gruppen, $a=a_1$, $b=b_1$, folgt

$$c=c_1, \quad b+d^2=b_1+d_1{}^2=b+d_1{}^2, \quad d=d_1$$
$$a+2n^2=a_1+2n_1{}^2=a+2n_1{}^2, \quad n=n_1$$

d. h. jedes Dreieck kommt nur in Einer Gruppe, $d=d_1$, und da nur Einmal vor, $n=n_1$.

Nennt man nun die so geordneten Dreiecke die pythagorische Primtafel, so erhält man für dieselbe das Bildungsgesetz:

8. Die pythagorische Primtafel enthält so viele Gruppen, als es ungerade Zahlen gibt, und jede Gruppe enthält so viele Dreiecke, als es zur Gruppenzahl relative Primzahlen gibt.

Diese Tafel ist also in doppelter Beziehung offen und kann nicht erschöpft werden.

In der 1. Gruppe für $d=1$ erhält man für $a=2n+1$ alle ungeraden Zahlen von 3 an, während c stets um 1 grösser als b ist (Regel des Pythagoras); und in allen ersten Gruppendreiecken für $n=1$ ist c um 2 grösser als a (Regel des Platon). Nur in der 1. Gruppe ist durchaus $a<b$,

$$2n+1<2n^2+2n$$

Lässt man in derselben Gruppe n in $n+1$ übergehen, um aus einem Dreieck das nächstfolgende zu entwickeln, so ergibt sich

$$a_1 = d(2(n+1)+d) = a+2d$$
$$b_1 = 2(n+1)(n+1+d) = b+2(d+1)+4n$$
$$c_1 = b_1+d^2$$

Darnach wird die Berechnung der Seitenmasse eine sehr einfache und sichere, indem man nur zu jedem a die Constante $2d$ und zu jedem b die Constante $2(d+1)$, sowie die stets um 4 wachsende Grösse $4n$ zählen darf, um das nächste a und b zu erhalten. Dabei erhält man in den höheren Gruppen von $d=3$ an auch Nichtprimdreiecke, die man schliesslich streicht. Mithin bilden in jeder Gruppe die a arithmetische Reihen der ersten, die b und c solche der zweiten Ordnung, die jedoch in den höheren Gruppen durch die ausfallenden Nichtprimdreiecke unterbrochen sind.

Will man auch die Seitenteilmasse der Tafel einverleiben, deren kleinstes γ dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises gleicht, so folgt

$$\gamma = \frac{a+b-c}{2}, \qquad \beta = \frac{a-b+c}{2}, \qquad \alpha = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$\gamma = \varrho = dn, \qquad \beta = d(n+d), \qquad \alpha = n(2n+d)$$

$$i = \frac{ab}{2} = \frac{d(2n+d)2n(n+d)}{2} = \beta.\alpha$$

Da d und n relative Primzahlen sind, so ist in den Hypotenusenteilmassen α und β jeder Factor zu jedem der 3 andern Factoren relativ primär, desgleichen in

$$a = d(2n+d) \quad \text{und} \quad b = 2n(n+d)$$

Denn hätten $2n+d$ und $n+d$ einen Factor gemein, so müsse dieser auch in n und d liegen:

$$\begin{array}{rl} 2n+d = & fp \\ -n-d = & -fp_1 \\ \hline n = & f(p-p_1) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} d = & fp_1-n \\ = & fp_1-fp+fp_1 \\ = & f(2p_1-p) \end{array}$$

Mithin sind α und β, a und b, sowie a und c, b und c je zwei relative Primzahlen.

9. In jedem pythagorischen Primdreieck sind relativ primär je zwei Seitenmasse, sowie die Teilmasse der Hypotenuse.

Alle durch 3 und 5 nicht teilbaren Quadratzahlen

$$(3p \mp 1)^2, \qquad (5p \mp 1)^2, \qquad (5p \mp 2)^2$$

haben die Form

$$3p+1, \qquad 5p \mp 1$$

Enthält nun von den Bestimmungszahlen m und n der indischen Formeln eine den Factor 3 oder 5, so kommt derselbe in b, während a und c davon frei bleiben; sind aber m und n von 3 und 5 frei, so kommt 3 als Factor doch in a und 5 in a oder c; denn es ist

1) $m^2 = 3p+1, \quad n^2 = 3q+1, \quad a = m^2 - n^2 = 3(p-q)$

2) $m^2 = 5p+1, \quad n^2 = 5q+1, \quad a = 5(p-q)$
$\qquad\qquad\qquad\quad = 5q-1, \quad c = 5(p+q)$

3) $m^2 = 5p-1, \quad n^2 = 5q+1, \quad c = 5(p+q)$
$\qquad\qquad\qquad\quad = 5q-1, \quad a = 5(p-q)$

10. In jedem pythagorischen Primdreieck ist eine Kathetenzahl durch 3, eine durch 4, und von den 3 Seitenzahlen ist eine durch 5, die Flächenzahl durch 6 teilbar.

Anm. Die Masszahlen des ersten pythagorischen Primdreiecks $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $i = 6$ treten also in jedem pythagorischen Primdreieck als Factoren auf.

Die durch 7, 11, etc. nicht teilbaren Quadratzahlen sind mehr als zweiförmig, weshalb diese Primzahlen nicht notwendig in a, b und c liegen müssen.

Die Frage, wie vielen pythagorischen Dreiecken eine Zahl als Seitenmass angehören kann, hat die Mathematiker viel beschäftigt und wurde für die Hypotenuse erst in der neueren Zeit mit Hülfe der höheren Zahlenlehre gelöst. Weil man aber bei diesen Dreiecken die primäre Auffassung zu sehr vernachlässigt hat, so ist keine Klarheit in diese Materie gekommen.

Betrachtet man aber den Ausdruck für

$$a = d(2n+d)$$

so zeigt sich unmittelbar, dass eine ungerade Zahl so vielen pythagorischen Primdreiecken als Kathetenmass angehört, so oft sie in zwei relativ primäre Factoren zerlegt werden kann; der kleine Factor ist die Gruppenzahl d und die halbe Differenz beider Factoren ist die Bestimmungszahl n. Hat man aber n Primzahlen, so lässt sich deren Product P, da hier auch 1. P gebildet werden muss, in 2^{n-1} solche Producte aus zwei Factoren zerlegen, und diese Anzahl behält man auch, wenn von diesen n Primzahlen eine und die andere in einer

höheren Potenz vorkommt, weil ja das Factorenpaar relativ primär sein muss.

Dasselbe Gesetz erhält man auch für $b = 2n(n+d)$, wenn man berücksichtigt, dass $n+d$ eine ungerade Zahl sein muss, wenn $2n$ mehrfach gerade ist, weil sonst d eine gerade Zahl würde, und dass $n+d > n$ bleiben muss.

Für die Hypotenuse erstreckt sich jedoch dieses Gesetz nicht auf alle Primzahlen, sondern nur auf jene, welche selbst Hypotenusenzahlen von der Form m^2+n^2 sind.

Somit existirt für die pythagorischen Primdreiecke das merkwürdige Gesetz:

11. Enthält eine Zahl n verschiedene Grundfactoren, die 1 ausgenommen, so gehört sie 2^{n-1} pythagorischen Primdreiecken als gleichnamiges Seitenmass an. Dieses gilt von jeder ungeraden Zahl als a-Kathete und von jeder mehrfach geraden Zahl als b-Kathete; bei der Hypotenuse aber muss jeder Primfactor wieder eine Hypotenusenzahl sein.

Anm. Die Zahlform m^2+n^2 ist also für relative Primzahlen m und n nur durch sich selbst teilbar.

Jede Hypotenusenzahl hat die Form $4p+1$, aber nicht jede Zahl von dieser Form ist eine Hypotenusenzahl. Die kleinsten Hypotenusen-Primzahlen sind

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97

Erhebt man die vor einer Hypotenusenzahl $4p+1$ kommenden Zahlen von 1 bis $4p$ aufs Quadrat, so lassen sich diese Quadratzahlen in $2p$ Paare so ordnen, dass die Summe jedes Paares durch die betreffende Hypotenusenzahl teilbar ist, und dabei lässt sich jede dieser Quadratzahlen nur mit Einer, nicht auch noch mit einer zweiten paaren. So ist zum Beispiel $4.3+1 = 13$ eine Hypotenusenzahl, und es ist

$$1^2+5^2 = 26 = 2.13 \qquad 6^2+9^2 = 117 = 9.13$$
$$2^2+3^2 = 13 \qquad 8^2+12^2 = 208 = 16.13$$
$$4^2+7^2 = 65 = 5.13 \qquad 10^2+11^2 = 221 = 17.13$$

Für jede andere ungerade Zahl, die keine Hypotenusenzahl ist, trifft dieses Gesetz bei keinem Paar der bezüglichen Quadratzahlen zu.

Addirt man je zwei nächste ganze Quadratzahlen:

$$\begin{array}{r}1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \ldots\\ +2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ \ldots\\ \hline 5,\ 13,\ 5^2,\ 41,\ 61,\ \ldots\end{array}$$

so scheint es, als ob 5^2 in der Summenreihe die einzige Quadratzahl wäre, und Dr. M. Cantor spricht in seinen „mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker" die Ansicht aus, dass dieser Umstand für Pythagoras die Veranlassung zur Erfindung seines berühmten Satzes war. Der obige Schein ist aber falsch. Denn man erhält aus

$$a+1=b, \quad m^2-n^2+1=2mn, \quad m=n+\sqrt{2n^2-1}$$
$$a_1=b_1+1, \quad m_1{}^2-n_1{}^2=2m_1n_1+1, \quad m_1=n_1+\sqrt{2n_1{}^2+1}$$

Setzt man hier in m_1 die $n_1=m$, so folgt

$$m_1=n+\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2(n+\sqrt{2n^2-1})+1}$$
$$=2(n+\sqrt{2n^2-1})+n=2m+n$$

und wenn man in m die $n=m_1=n_1+\sqrt{2n_1{}^2+1}$ setzt, so folgt $m=2m_1+n_1$.

Diese zwei Ausdrücke machen sich also gegenseitig rational. Da nun $n=1$ der kleinste Wert ist, welcher $m=2$ rational gibt, und dieses 2 der kleinste Wert ist, welcher $m_1=5$ rational gibt, und dieses 5 der zweitkleinste Wert ist, welcher wieder m rational gibt, so erkennt man, dass sich diese zwei Formeln gegenseitig erschöpfend rational machen, d. h. dass man hier alle pythagorischen Primdreiecke erhält, deren Kathetenzahlen um 1 differiren.

Weil sich aber die ersten zwei Bestimmungszahlen m_1 und n_1 auf dieselbe Weise aus der Einheit bilden, wie sich m_2 aus m_1 und n_1 bildet:

$$m_1=2.1, \quad n_1=1.1; \quad m_2=2m_1+1.n_1$$

so erhält man

$$m_2=2m_1+1.n_1=m_1{}^2+n_1{}^2=c_1$$

und allgemein

$$m_{2x}=m_x{}^2+n_x{}^2=c_x{}^2$$

d. h. die Hypotenusenzahl c_x ist der Bestimmungszahl m_{2x} gleich. Dieses ersieht man auch aus der nachfolgenden Tabelle, für die aus

$$c_4 = m_4^2 + n_4^2 = (2m_3 + m_2)^2 + m_3^2 + (m_2^2 + n_2^2) - c_2 =$$
$$= 5m_3^2 + 6n_3^2 + (2m_2 + n_2)^2 - c_2 = 6(m_3^2 + n_3^2) - c_2 =$$
$$= 6c_3 - c_2$$

allgemein folgt

$$c_{x+2} = 6c_{x+1} - c_x$$

Verzeichniss derjenigen pythagorischen Primdreiecke, deren Kathetenzahlen um 1 differiren.

$n_{x+1} = m_x,\quad m_{x+1} = 2m_x + n_x,\quad c_x = m_{2x} = 6c_{x-1} - c_{x-2}$							
x	n	m	n	m	a	b	c
1	1	2			3	4	5
2			2	5	21	20	29
3	5	12			119	120	169
4			12	29	697	696	985
5	29	70			4059	4060	5741
6			70	169	23661	23660	33461

Es gibt also in der Eingangs erwähnten Reihe ausser $3^2 + 4^2 = 5^2$ noch mehr solche Beispiele, und wenn Pythagoras diese Reihe gebildet und untersucht hat, so dürfte er im Verein mit seinen vielen strebsamen Schülern sicher auch auf $20^0 + 21^2 = 29^2$ und selbst auf $119^2 + 120^2 = 169^2$ gekommen sein.

Anm. Diese Entwicklung ist ein Beitrag zu der Gleichung $ax^2 + b = c^2$, die noch nicht allgemein rational gelöst ist.

Setzt man in

$$a^2 + (a+1)^2 = c^2, \qquad 2a(a+1) = (c+1)(c-1)$$

die $2a = c+1$ und $a+1 = c-1$, so folgt $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; d. h. nur im ersten pythagorischen Primdreieck ist $2a - (a+1) = (c+1) - (c-1) = 2$; es ist damit aber noch nicht bewiesen, dass dieses Dreieck das Einzige ist, dessen Kathetenzahlen um 1 differiren; denn bei anderen Dreiecken dieser Art sind eben $2a$ und $c+1$ verschiedene Zahlen.

Soll in einem pythagorischen Primdreieck die Summe der Würfel der 3 Seitenzahlen wieder eine Cubikzahl sein, so ist

$$(m^2 - n^2)^3 + (2mn)^3 + (m^2 + n^2)^3 = x^3$$
$$2m^2[m(m^3 + 4n^3) + 3n^4] = x^3$$

Es muss also nach dem 4. Satz x^3 eine gerade Zahl sein, folglich den Factor 8 enthalten. Nun ist der inklammirte Factor stets eine ungerade Zahl, ob m oder n gerade ist; es muss also $2m^2$ den Factor 8 enthalten, mithin m eine gerade Zahl sein. Setzt man deshalb

$$m = 2f, \qquad x = 2fy$$

so folgt:

$$3n^4 = f(y^3 - 16f^3 - 8n^3)$$

Weil aber m und n relative Primzahlen sind, so kann f als Factor von m und von $3n^4$ nur die Werte 1 und 3 haben.

Für $f = 1$ folgt $m = 2$, $n = 1$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ und bei diesem Dreieck ist auch $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Für $f = 3$ wird $m = 6$ und dazu kann n nur die Werte 1 und 5 annehmen, welche aber Dreiecke liefern, welche der Grundgleichung $a^3 + b^3 + c^3 = x^3$ nicht genügen; weshalb nur $f = 1$ sein kann.

> 12. Nur im ersten pythagorischen Primdreieck und seinen Ableitungen ist die Summe der Würfel der Seitenzahlen wieder ein Cubus.

Anm. In der Schrift: „Die merkwürdigsten Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen" von C. A. W. Berkhan heisst der 10. Satz:

> Wenn sich drei Zahlen wie drei pythagorische Zahlen verhalten, so ist die Summe der Würfel jener drei Zahlen wieder eine Cubikzahl.

Dieser Satz gilt also von allen pythagorischen Zahlen, denn wenn sich 3 Zahlen wie 3 pythagorische Zahlen verhalten, so sind sie auch pythagorische Zahlen, d. h. Seitenzahlen eines pythagorischen Dreiecks.

Der Beweis wird mit Hülfe des Schlusses geführt: 3, 4, 5 sind pythagorische Zahlen, und wenn der Satz für $f.3$, $f.4$, $f.5$ zutrifft, so gilt er für alle pythagorischen Zahlen. Dieser Schluss geht viel zu weit, da sich ja die pythagorischen Primdreiecke nur durch ihr Seitenverhältniss unterscheiden.

Die Sache ist vielmehr so. Von so vielen Primdreiecken der Satz gilt, auf so viele Ableitungsgruppen erstreckt er sich; und da der Satz nur von Einem Primdreieck gilt, so hat er auch nur noch für dessen Ableitungen Geltung.

Nach den indischen Formeln ist

$$c+b=(m+n)^2, \qquad c-b=(m-n)^2=d^2$$
$$\frac{c+a}{2}=m^2, \qquad \frac{c-a}{2}=n^2$$

Darnach kann jedes pythagorische Dreieck leicht auf meine Tafel zurückgeführt werden. So ist z. B. 105, 100, 145 die Ableitung mit 5 von 21, 20, 29 und dieses Primdreieck gibt

$$d=\sqrt{c-b}=\sqrt{29-20}=3; \qquad n=\sqrt{\frac{c-a}{2}}=\sqrt{\frac{29-21}{2}}=2$$

es ist also das zweite Dreieck der zweiten Gruppe.

An der rationalen Lösung des pythagorischen Problems haben sich zu verschiedeneu Zeiten viele namhafte Mathematiker versucht; aber die wenigsten Lösungen sind vollständig, und keine davon erreicht die indischen Formeln an Einfachheit und Symmetrie. An der Hand meiner Formeln sind jene Lösungen leicht auf ihre Vollständigkeit zu prüfen.

Von den alten Griechen haben Pythagoras, Platon und Euklid Regeln zur Berechnung pythagorischer Dreiecke gebildet.

Die Regel des Pythagoras lautet:

> Man nehme eine beliebige ungerade Zahl als kleine Kathete an, quadrire dieselbe und subtrahire 1 vom Quadrat, so ist die Hälfte des Restes die grössere Kathete, zu der 1 addirt die Hypotenuse gibt.

Hier ist $b+1=c$, also $d=1$; d. h. diese Regel liefert alle Primdreiecke der ersten Gruppe und gar keine Ableitung. Nur in dieser Gruppe findet man unter a alle ungeraden Zahlen und ist durchaus $a<b$.

Die Regel des Platon lautet:

> Man nehme eine beliebige gerade Zahl zu einer Kathete an, halbire dieselbe, quadrire diese Hälfte und addire 1 zum zum Quadrat, so erhält man die Hypotenuse. Subtrahirt man 1 vom Quadrat, so erhält man die andere Kathete.

Hier sind die Seitenmasse $2p$, p^2-1, p^2+1. Ist nun $p=2q$ eine gerade Zahl, so folgt

$$4q=b, \qquad 4q^2-1=a, \qquad 4q^2+1=c$$
$$2n^2=c-a=2, \qquad n=1$$
$$d^2=c-b=(2q-1)^2, \qquad d=2q-1$$

Ist aber $p = 2q+1$ eine ungerade Zahl, so folgt

$$(2q+1) = a_1, \qquad 4q(q+1) = b_1, \qquad 2[2q(q+1)+1] = c_1$$
$$2q+1 = a, \qquad 2q(q+1) = b, \qquad 2q(q+1)+1 = c$$
$$d^2 = c-b = 1, \qquad d = 1$$
$$2n^2 = c-a = 2q^2, \qquad n = q$$

Folglich liefert die Regel des Platon alle ersten Gruppendreiecke, wenn man von den mehrfach geraden Zahlen ausgeht, und alle Ableitungen mit 2 von der ersten Primgruppe, wenn man von den einfach geraden Zahlen ausgeht.

Euklid hat blos die zwei Regeln des Pythagoras und Platon in eine zusammengefasst, und seine Vorschrift liefert kein neues Primdreieck.

Es ist immerhin merkwürdig, dass diese zwei berühmten Griechen die erste Gruppe und alle ersten Gruppendreiecke meiner Primtafel gefunden haben, gleichsam den linken und obern Streifen eines unendlichen Quadrats.

Pythagoras hat also den nach ihm benannten Satz nicht nur geometrisch bewiesen, er hat den arithmetischen Ausdruck desselben auch sogleich teilweise rational und dadurch diese Wahrheit seinem Volke erst recht zugänglich gemacht, das nun aus der arithmetischen Regel Stoff genug zu geometrischen Versuchen schöpfen konnte. Denn mit irrationalen Dreiecken konnte dieses Volk noch nichts anfangen. Durch diesen grossartigen Complex wurden die wissenschaftliche Geometrie und Arithmetik gleichzeitig geboren und letztere zugleich in die Bahn der unbestimmten Analysis gedrängt. Diese Doppelbehandlung wurde auch von den Griechen ausserhalb der pythagoräischen Geheimschule fortgebildet, wie wir an den Regeln des Platon und Euklid sehen, wenn auch die geometrische Richtung mehr und mehr überwog. Dabei wurden zweifellos auch allgemeine arithmetische Beweise geführt, wenn auch nur mit Worten und ohne algebraische Schrift; denn Platon hat seine Regel, für die ein dringendes Bedürfniss längst nicht mehr vorhanden war, nur aufgestellt, um in Nacheiferung des Pythagoras damit zu zeigen, dass auch er ein ähnliches allgemeines Zahlengesetz erkannt hat, nämlich das Gesetz, wie wir es kurz bezeichnen:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

Und von Pythagoras, der hauptsächlich Arithmetiker war, der aus der harmonischen Proportion die diatonische Tonleiter abgeleitet hat und der, vielleicht vom gleichschenkligen rechtwinkligen Drei-

[illegible] Satz [illegible], selbst bis zum Begriff der Irrationalzahl vorgedrungen ist, wird Niemand behaupten wollen, dass er zu einem allgemeinen geometrischen Konstruktionsverfahren, den er erst schaffen musste, ein Bedürfnis gefühlt hätte, wenn sich dieser Gedanke in der Arithmetik mit einigen entsprechenden Beispielen begnügt hätte. Wir müssen daher annehmen, dass Pythagoras auf irgend eine Weise das allgemeine Gesetz erkannt hat:

$$[illegible]$$

Der [illegible] der Griechen warf sich dann vorzugsweise auf den geometrischen Teil der pythagoreischen Erfindung, während die pythagoreische Zahlenlehre hauptsächlich den arithmetischen Teil ausbildete. Aus dieser Schule ist Diophantus hervorgegangen.

Nur so wird es erklärlich, wie auch Plato, der Erfinder der Kegelschnitte und einer neuen geometrischen Konstruktionsmethode, auf die Auffindung einer solchen Regel Wert legen konnte, warum Euklid seine Regel aus geometrischen Betrachtungen allgemein abgeleitet hat, und wie Diophantus zu seinen Sätzen über das rechtwinklige Dreieck und zu seinen Leistungen in der unbestimmten Analysis gekommen ist. Deshalb wird die mathematische Geschichtsforschung gut tun, wenn sie der Regel des Pythagoras und ihrem Zusammenhang mit den Diophantischen Gleichungen mehr Aufmerksamkeit schenkt. Denn jener Regel gegenüber stehen die Leistungen des Diophant nicht mehr als ein Unikum da.

III. Ableitung rationaler Dreiecke aus pythagorischen.

Haben zwei pythagorische Dreiecke eine gleiche Kathete, so lässt sich daraus durch gehöriges Neben- und Aufeinanderlegen je ein rationales „Summen- und Differenzdreieck“ bilden, deren „Teildreiecke“ ich jene nenne. Diese abgeleiteten Dreiecke haben zwei Hypotenusen und eine algebraische Summenlinie zu Seiten. Jedes Dreieck kann auf diese Weise 3mal dargestellt werden, entsprechend den 3 Höhen.

Da jedes Dreieck eine innere Höhe hat, jene auf die grosse Seite, so kann jedes Dreieck als ein Summendreieck, aber nur ein stumpfwinkliges auch als ein Differenzdreieck dargestellt werden, und zwar letzteres 2mal. Ist das Urdreieck rational, so sind es nach Satz 5 auch die 6 Teildreiecke, von welchem im gleichschenkligen Dreieck je zwei congruent sind.

Mithin kann jedes rationale schiefwinklige Dreieck von pythagorischen Dreiecken abgeleitet werden. Bezeichnet man nach Satz 10 die Flächenzahlen dieser Teildreiecke durch $6i_1$, $6i_2$, so erhält man für das abgeleitete Dreieck

$$i = 6(i_1 \pm i_2)$$

13. Die Flächenzahl jedes rationalen Primdreiecks ist durch 6 teilbar.

Ist das Summendreieck ein pythagorisches, so folgt aus der Aehnlichkeit der Teildreiecke mit dem Urdreieck, dass sie sämmtlich zu einem Primdreieck gehören, aus dem man sie in folgender Weise ableiten kann:

1. Teildreieck:	2. Teildreieck:	Summendreieck:
$a.a$	$b.a$	$c.a$
$a.b$	$b.b$	$c.b$
$a.c$	$b.c$	$c.c$

Aus zwei verschiedenen pythagorischen Primdreiecken, die also verschiedene Seitenverhältnisse haben, lassen sich demnach nur schiefwinklige Summen- und Differenzdreiecke ableiten, und zwar je 4, indem man die Seitenmasse des einen Primdreiecks zuerst mit der einen und dann mit der andern Kathetenzahl des zweiten Primdreiecks multiplizirt und umgekehrt, wodurch man erhält

$a_1\ a_2$,	$b_1\ a_2$,	$c_1\ a_2$;	$a_2\ a_1$,	$b_2\ a_1$,	$c_2\ a_1$
$a_1\ b_2$,	$b_1\ b_2$,	$c_1\ b_2$;	"	"	"
$a_1\ a_2$,	$b_1\ a_2$,	$c_1\ a_2$;	$a_2\ b_1$,	$b_2\ b_1$,	$c_2\ b_1$
$a_1\ b_2$,	$b_1\ b_2$,	$c_1\ b_2$;	"	"	"

Höhe:	Summen- und Differenzdreiecke:		
$a_1 a_2$	$b_1 a_2 \pm a_1 b_2$,	$c_1 a_2$,	$a_1 c_2$
$a_1 b_2$	$b_1 b_2 \pm a_1 a_2$,	$c_1 b_2$,	$a_1 c_2$
$b_1 a_2$	$a_1 a_2 \pm b_1 b_2$,	$c_1 a_2$,	$b_1 c_2$
$b_1 b_2$	$a_1 b_2 \pm b_1 a_2$,	$c_1 b_2$,	$b_1 c_2$

Sind die Summen- und Differenzdreiecke nicht primär, so kann man sie durch Reduction der Seitenmasse als Primdreiecke darstellen. Auch braucht man nur mit den nichtgemeinschaftlichen Factoren der bezüglichen Kathetenzahlen zu multipliciren.

Dass ein rationales schiefwinkliges Primdreieck 3 gebrochene Höhenzahlen haben kann, ersieht man aus dem nachfolgenden Beispiel:

der 3. Potenz in den Zähler des Reductionsbruches. Ist nun l von f frei, so bleibt f^3 in z zu einem Nichtprimdreieck. Ist aber $l = fw$, so folgt

$$\frac{(p+q)pq}{l^2-pq} = \frac{f^3(x+y)xy}{f^2(w^2-xy)} = \frac{f(x+y)xy}{w^2-xy}$$

es muss also w^2-xy den Factor f wenigstens in derselben Potenz enthalten, als er in $f(x+y)$ liegt, wenn die gleichvielfache Bestimmungsternion

$$l = fw, \qquad p = fx, \qquad q = fy$$

ein Primdreieck liefern soll. Dieses Dreieck ergibt sich aber auch aus der relativ primären Ternion

$$l = w, \qquad p = x, \qquad q = y$$

wie man erkennt, wenn die Wiederholungen ausgeschieden werden.

Ausscheidung der Wiederholungen.

Da p und q durch $l^2 > pq$ beschränkt sind, so macht man l zur Gruppenzahl der II. Tafel.

1) Vertauscht man p und q, die im Reductionsbruch ersetzbar sind, so geht β in α_1 und α in β_1 über, während $\gamma_1 = \gamma = z$ bleibt, weshalb man das vorige Dreieck erhält. Diese Versetzung findet aber statt, wenn man in derselben Gruppe für jedes p die q auch $> p$ werden lässt, weil p später die grösseren Werte erhält, zu denen dann q mit den früheren Werten von p tritt. So geben die Bestimmungsternionen

$$h = 6, \ p = 3, \ q = 5; \qquad h = 6, \ p = 5, \ q = 3$$

dasselbe Primdreieck, weshalb $q < p$ bleiben muss und nur für 1 der p gleichen darf, was gleichschenklige Dreiecke liefert.

2) Aus dem Reductionsbruch folgt:

$$\frac{(p+q)pq}{l^2-pq} = \frac{z}{v}, \quad l^2 z = (p+q)pqv + pqz$$

$$= pq(pv+qv+z)$$

$$= pq(\beta+\alpha+\gamma)$$

$$= pq \, . \, s$$

$$l = \sqrt{\frac{pq}{z} \, . \, s}$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{z_1} \, . \, s}$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{p_2 q_2}{z_2} \, . \, s}$$

Hat man also für irgend eine Ternion l, p, q, worin p und q relative Primzahlen sind, die Teilmasse α, β, γ berechnet, so kann man aus letzteren die Ternion wieder bestimmen, indem man von α und β den gemeinschaftlichen Factor $= \nu$, die nichtgemeinsamen Factoren aber bezüglich $= q$ und $= p$, $\gamma = z$ setzt, $s = \alpha + \beta + \gamma$ bildet, das als halbe Umfangszahl bei jedem Dreieck constant ist, und diese Werte in l setzt, das dann eine ganze Zahl wird, wie sie zuvor als solche gewählt wurde.

Ist aber $(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma s$ eine Quadratzahl, wie es für rationale Dreiecke Bedingung ist, so sind es auch alle nachfolgenden Zahlen, wie sie sich der Reiche nach aus der obern entwickeln:

$\frac{\alpha\beta\gamma s}{\gamma_2}$	$\frac{\alpha\beta\gamma s}{\beta^2}$	$\frac{\alpha\beta\gamma s}{\alpha^2}$
$\frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot s$	$\frac{\alpha\gamma}{\beta} \cdot s$	$\frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot s$
$\frac{pq\nu^2}{z} \cdot s$	$\frac{q_1 p_1 \nu_1^2}{z_1} \cdot s$	$\frac{q_2 p_2 \nu_2^2}{z_2} \cdot s$
$\frac{pq}{z} \cdot s$	$\frac{q_1 p_1}{z_1} \cdot s$	$\frac{q_2 p_2}{z_2} \cdot s$

Es sind also bei jedem rationalen Primdreieck l, l_1, l_2 gleichzeitig rationale Zahlen.

Dieses l_1 erhält man, wenn man $\beta = z_1$, von α und γ die kleinere Zahl $= q_1 \nu_1$, die grössere $= p_1 \nu_1$ und davon den gemeinsamen Factor $= \nu_1$, die nichtgemeinsamen Factoren bezüglich $= q_1$ und $= p_1$ und dann p_1, p_1, z_1 nebst s in l_1 setzt.

Für l_2 setzt man $\alpha = z_2$ und mit β, γ verfährt man, wie vorhin.

Man erhält also selbst für relative Primzahlen $p > q$ jedes ungleichseitige Dreieck 3mal, jedes gleichschenklige 2mal.

Da sich bei diesen Wiederholungsberechnungen zwei Teilmasse unter sich wegen ν reduciren, und die übrig gebliebenen Factoren wieder gegen das 3. Teilmass $= z$ im Nenner, so besteht in den drei l der Bruchfactor $\frac{pq}{z}$ aus denselben 3 Zahlen, welche paarweise relativ prim sind, wie auch das folgende Beispiel zeigt.

$$c = \alpha + \beta = 13, \quad b = \alpha + \gamma = 14, \quad a = \beta + \gamma = 15, \quad i = 84$$

$$\alpha = 6, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 8, \quad s = 21$$

$$8 = z, \quad 7 = p\nu, \quad 6 = q\nu, \quad \nu = 1, \quad p = 7, \quad q = 6$$

$$l = \sqrt{\frac{7.6}{8} . 21} = \sqrt{\frac{7.3}{4} . 21} = \frac{21}{2}$$

$$7 = z_1, \quad 8 = p_1 \nu_1, \quad 6 = q_1 \nu_1, \quad \nu_1 = 2, \quad p_1 = 4, \quad q_1 = 3$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{4.3}{7}.21} = 6$$

$$6 = z_2, \quad 8 = p_2 \nu_2, \quad 7 = q_2 \nu_2, \quad \nu_2 = 1, \quad p_2 = 8, \quad q_2 = 7$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{8.7}{6}.21} = \sqrt{\frac{4.7}{3}.21} = 14$$

Dieses Dreieck 13, 14, 15 wird also in der II. Tafel aus der Bestimmungsternion $l = 6$, $p = 4$, $q = 3$ gewonnen; 14, 8, 7 ist eine Wiederholungsternion, und die dritte Ternion $l = \frac{21}{2}$, $p = 7$, $q = 6$ zeigt an, dass $i = 84$ kein Vielfaches von dem bezüglichen $\gamma = z = 8$ ist.

3) Will man schliesslich aus $p = fx$, $q = fy$, worin x und y relativ prim sind, ein Primdreieck entwickeln, so muss f aus dem Zähler des Reductionsbruches verschwinden, also z von f frei sein, was gibt

$$l = \sqrt{\frac{pq}{z}.s} = \sqrt{\frac{fx.fy}{z}.s} = f\sqrt{\frac{xy}{z}.s}$$

d. h. es muss auch l den Factor f enthalten, wie wir schon gesehen haben.

Nichts hindert uns aber, aus α und β den ganzen gemeinsamen Factor $f.\nu$ als ν_1 zu setzen, da wir dadurch dasselbe Dreieck erhalten. Dann ergibt sich

$$\alpha = fx\nu = q_1 \nu_1, \quad \beta = fy\nu = p_1 \nu_1, \quad f\nu = \nu_1, \quad q_1 = x, \quad p_1 = y, \quad z_1 = z$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{z_1}.s} = \sqrt{\frac{xy}{z}.s}$$

welches l_1 gleichzeitig mit l rational und ganz wird, aber nur der $f$te Teil von l ist. Mithin erhält man aus der kleineren Ternion l_1, x, y dasselbe Primdreieck, wie aus fl_1, fx, fy.

15. Alle nicht relativ primären p und q liefern Wiederholungen, indem sie entweder kein Primdreieck, oder das einer kleineren Bestimmungsternion geben.

Anm. Um für ein Primdreieck die gleichvielfachen Wiederholungsternionen zu finden, zerlege man aus den relativ primären Wiederholungsternionen die Differenzen

$$l^2 - pq, \qquad l_1^2 - p_1 q_1, \qquad l_2^2 - p_2 q_2$$

in Factoren und setze davon jene als Ableitungsfactoren, die zu dem reducirten z relativ prim sind. Ist dann ein solcher Factor f so gross, dass fp grösser als das grösste Teilmass wird, so kann derselbe nur eine Ableitung liefern, da von der Entstehung eines neuen Primdreiecks keine Rede sein kann, weshalb dieser Factor zu z nicht relativ prim sein kann.

So erhält man in der 4. Gruppe ($l = 5$) das 6. Dreieck mit

$$\gamma = 84, \quad \beta = 52, \quad \alpha = 39$$

aus den relativ primären Bestimmungsternionen:

$$5,\ 4,\ 3; \quad 35,\ 21,\ 13; \quad 35,\ 28,\ 13$$

aus welchen die Differenzen $l^2 - pq$ sind

$$5^2 - 4.3 = 13; \quad 35^2 - 11.13 = 2^3.7.17; \quad 35^2 - 28.13 = 3.7.41$$

Diese Factoren geben mit dem bezüglichen p

$$13.4; \quad 2.21,\ 4.21; \quad 3.28$$

welche vier Producte nicht grösser als das grösste Teilmass 84 sind, während alle übrigen Factoren grössere Producte liefern, also zu dem reducirten z nicht relativ prim sind.

Dieses Dreieck wird also durch die folgenden 7 Bestimmungsternionen erhalten:

5,	4,	3;	35,	21,	13;	35,	28,	13
13.5,	13.4,	13.3	2.35,	2.21,	2.13	3.35,	3.28,	3.13
			4.35,	4.21,	4.13			

Man hat also zur Herstellung der II. Tafel p und q relativ prim zu wählen. Wegen $l^2 - pq > 0$ kann l nicht < 2 werden und p muss $< l^2$ bleiben. Entwirft man nun eine vollständige Bestimmungsreihe:

$l =$ 2			3									4											
$p =$ 1	2	3	1	2	3	3	4	5	6	7	8	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6	7	7 ...
$q =$ 1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	3	1	2	3	1	1	2 ...

so bekommt die 1. Gruppe 3, die 2. Gruppe 9, die 3. Gruppe 20, die 4. Gruppe 34 provisorische Bestimmungsternionen u. s. w.; es gibt also die 1. Gruppe höchstens 5, die 2. höchstens 17, die 3. höchstens 39, die 4. höchstens 67 Wiederholungsternionen, da jedes erste Gruppendreieck als ein gleichschenkliges nur 1 Wiederholungsternion liefert. Würden also alle 5 Wiederholungsternionen der 1. Gruppe

fallen, so können sie dieselbe doch nicht vollständig tilgen. Wohl aber könnten jene der 1. und 2. Gruppe die 3. vollständig tilgen. Es ist aber nicht wahrscheinlich, dass auf diese Weise eine Gruppe ganz ausfällt, ganz abgesehen davon, dass kein erstes Gruppendreieck für $p = q = 1$ ausfallen kann.

Berechnet man also zuerst für die kleinste Bestimmungsternion das Dreieck, dann sogleich dessen Wiederholungsternion, die natürlich grösser werden muss, und streicht diese Ternion in der provisorischen Reihe, verfährt dann mit den Wiederholungsternionen des zweiten Dreiecks ebenso u. s. w., so ist man von jeder Wiederholung frei.

Mithin erhält man für die II. Tafel das Bildungsgesetz:

16. Die II. Tafel enthält so viele Gruppen, als es von 2 an ganze Zahlen für l gibt. Jede Gruppe ist geschlossen und enthält höchstens $l^2 - 1$ Abteilungen für p, und jede Abteilung enthält höchstens so viele Dreiecke, als es zu p relative Primzahlen für q gibt, die $pq < l^2$ liefern.

Im pythagorischen Dreieck ist

$$\gamma = \varrho, \qquad i = (\alpha + \beta + \gamma)\varrho = \gamma . s$$

und im gleichschenkligen Dreieck ist

$$\alpha = \gamma, \qquad i = \gamma \sqrt{(\beta + 2\gamma)\beta}$$

17. Die II. Tafel enthält alle pythagorischen und alle rationalen gleichschenkligen Primdreiecke.

Drückt man die Seitenmasse durch die Bestimmungszahlen l, p, q aus, so folgt

$$\begin{aligned}
a &= \beta + \gamma = p\nu + z = p(l^2 - pq + (p+q)q) = p(l^2 + q^2) \\
b &= \alpha + \gamma = q\nu + z = q(l^2 - pq + (p+q)p) = q(l^2 + p^2) \\
c &= \alpha + \beta = (p+q)\nu = (p+q)(l^2 - pq) = p(l^2 - q^2) + q(l^2 - p^2)
\end{aligned}$$

An diesen letzten Ausdrücken erkennt man, dass a und b Hypotenusenzahlen sind und dass c algebraische Summenseite ist, was uns auf den III. Abschnitt zurückführt. Man erhält demnach

1. Teildreieck:	2. Teildreieck:	Ableitung:
$p(l^2+q^2)$	$q(l^2+p^2)$	$p(l^2+q^2)$
$p(l^2-q^2)$	$q(l^2-p^2)$	$q(l^2+p^2)$
$p(2lq)$	$q(2lp)$	$p(l^2-q^2)+q(l^2-p^2)$

$2lpq$ Höhe auf die Seite $p(l^2-q^2)+q(l^2-p^2)$

In dieser algebraischen Summenseite c ist wegen $l > q$ der erste Summand $p(l^2-q^2)$ stets positiv und grösser als der zweite Summand $q(l^2-p^2)$ wegen $p > q$. Dieser zweite Summand aber ist positiv für $l > p$, er ist Null für $l = p$ und er ist negativ für $l < p$. Im ersten Falle liegen an der Seite c zwei spitze Winkel, im zweiten Falle ist einer dieser Winkel $= k$ und im dritten Falle ist dieser Winkel stumpf.

Für $p = l$ folgt

$$a = p(p^2+q^2), \qquad b = p(2pq), \qquad c = p(p^2-q^2)$$

was durch p reducirt alle pythagorischen Primdreiecke mit a als Hypotenuse gibt. Dieser Factor p fällt auch durch die Zwischenreduction aus:

$$\frac{(p+q)pq}{l^2-pq} = \frac{(p+q)pq}{p^2-pq} = \frac{(p+q)q}{p-q}$$

18. Die zweite Tafel enthält für $p = l$ alle pythagorischen Primdreiecke mit a als Hypotenuse und b als geradem Kathetenmass; für $p < l$ wird c Summen-, für $p > l$ wird c Differenzseite.

Hat man für $p = l$ ein pythagorisches Dreieck berechnet, so ist wegen a als Hypotenuse α das kleinste Kathetenmass $= \varrho$, also nach Satz 9. die β zu γ relativ prim. Auch ist

$$l^2 = \frac{pq}{z}.s = p^2, \qquad l = p = \frac{qs}{z}$$

Daraus erhält man die Wiederholungsternionen, wenn man zur Unterscheidung von den Masszahlen a, b, c der II. Tafel jene der I. Tafel durch $'a$, $'b$, $'c$ bezeichnet:

1) $q\nu = q_1\nu_1$, $z = p_1\nu_1$, $p\nu = z_1$, $p = \dfrac{qs}{z}$

$$q_1 = \frac{q\nu}{\nu_1}, \quad p_1 = \frac{z}{\nu_1}, \quad l_1^2 = \frac{q\nu z}{p\nu\nu_1^2}.s = \frac{qz}{p\nu_1^2}.s = \frac{qz}{\frac{qs}{z}.\nu_1^2}.s = \left(\frac{z}{\nu_1}\right)^2$$

$l_1 = \dfrac{z}{\nu_1} = p_1$, also nach Satz 18.: $a_1 = {'c} = a$

2) $p\nu = q_2\nu_2$, $z = p_2\nu_2$, $q\nu = z_2$

$\nu_2 = 1$, $\quad q_2 = p\nu$, $\quad p_2 = z < s$

$$l_2^2 = \frac{p\nu z}{q\nu}.s = \frac{pz}{q}.s = \frac{\frac{qs}{z}.z}{q}.s = s^2$$

$l_2 = s > p_2$ und $> p_1 = l_1$, $\quad c_2 = {'c} = a$

19. In der II. Tafel erhält man für jedes pythagorische Primdreieck eine Wiederholungsternion mit $l_1 = p_1$ zu a und eine grössere mit $l_2 > p_2$ und $> l_1$ zu c als Hypotenuse.

Anm. Im zweiten Falle, da $\beta = p\nu$ und $\gamma = z$ relativ prim sind, wird $\nu_2 = 1$; im ersten Falle aber musste ν_1 als solches unbestimmt in Rechnung gezogen werden, da α mit β und mit γ je einen Factor gemein hat, d und n.

Von jedem pythagorischen Primdreieck sind nach den Sätzen 7 und 9 zwei rationale gleichschenklige Primdreiecke ableitbar. Jene mit $2'a$ als Grundlinie haben die Teilmasse $'a$, $'a$, $'c-'a$, und die andern mit $2'b$ als Basis haben die Teilmasse $'b$, $'b$, $'c-'b$.

Da die Flächenzahl jedes solchen gleichschenkligen Dreiecks $= 'a'b$ ist, so erkennt man, dass die Teilmasse $'a$ und $'b$ stets Factoren der Flächenzahl sind (Satz 17); die Teilmasse $'c-'a = 2n^2$, $'c-'b = d^2$ geben aber

$$\frac{i}{'c-'a} = \frac{'a'b}{2n^2} = \frac{'a(d+n)}{n}$$

$$\frac{i}{'c-'b} = \frac{'a'b}{d^2} = \frac{(d+2n)'b}{d}$$

welche Brüche nur für $n = 1$ und für $d = 1$ ganze Zahlen werden. Demnach ist nur bei jenen rationalen gleichschenkligen Primdreiecken jedes Teilmass ein Factor der Flächenzahl, welche von den ersten Gruppendreiecken mit $2a$ und von der ersten Gruppe mit $2b$ als Basis abgeleitet werden. Diese Dreiecke haben demnach auch ein ganzes Wiederholungs-l. Dagegen haben alle gleichschenkligen Dreiecke ein gebrochenes l_1, welche von den ersten Gruppendreiecken mit $2b$, von der ersten Gruppe mit $2a$ und von allen höheren Dreiecken der höheren Gruppen mit $2a$ und $2b$ als Basis abgeleitet werden. Diese letzteren Dreiecke erhält man für $p > q$, wie man aus der nachfolgenden Tabelle ersieht

$q\nu$	$p\nu$	z	s	ν	q	p	$l = \sqrt{\frac{pq}{z}} \cdot s$
$'a$	$'a$	$'c-'a$	$'c+'a$	$'a$	1	1	$\frac{d+n}{n}$
$'b$	$'b$	$'c-'b$	$'c+'b$	$'b$	1	1	$\frac{d+2n}{d}$
$'c-'a$	$'a$	$'a$	$'c+'a$	1	$'c-'a$	$'a$	b
$'c-'b$	$'b$	$'b$	$'c+'b$	1	$'c-'b$	$'b$	$'a$

20. Die II. Tafel enthält $p = q = 1$ nur diejenigen gleichschenkligen Dreiecke, welche von den ersten Gruppendreiecken mit $2a$ und von der ersten Gruppe mit $2b$ als Basis abgeleitet werden. Diese Dreiecke haben ganze Wiederholungs-l. Alle andern gleichschenkligen Dreiecke werden für $p > q$ gewonnen und haben gebrochne l_1.

Anm. So erhält man

1) vom zweiten Dreieck der ersten pythagorischen Gruppe

$$`a = 5, \quad `b = 12, \quad `c = 13$$
$$a = 2\,a = 10, \quad b = c = 13$$
$$l = `b = 12, \quad p = `c - `a = 8, \quad q = `a = 5; \quad l_1 = \frac{d+n}{2} = \frac{3}{2},$$
$$p_1 = q_1 = 1$$

So ist es bei allen von der ersten Gruppe abgeleiteten gleichschenkligen Dreiecken mit $2`a$ als Basis.

2) vom ersten Dreieck der zweiten Gruppe

$$`a = 15, \quad `b = 8, \quad `c = 17$$
$$a = 2`b = 16, \quad b = c = 17$$
$$l = `a = 15, \quad p = `c - `b = 9, \quad q = `b = 8$$
$$l_1 = \frac{d+2n}{d} = \frac{5}{3}, \quad p_1 = q_1 = 1$$

So ist es bei allen von den ersten Gruppendreiecken abgeleiteten gleichschenkligen Dreiecken mit $2`b$ als Basis.

3) vom zweiten Dreieck der zweiten Gruppen

$$`a = 21, \quad `b = 20, \quad `c = 29$$
$$a = 2`a = 42, \quad b = c = 29$$
$$l = `b = 20, \quad p = `a = 21, \quad q = `c - `a = 8$$
$$l_1 = \frac{d+n}{n} = \frac{5}{2}, \quad p_1 = q_1 = 1$$
$$a = 2`b = 40, \quad b = c = 29$$
$$l = `a = 21, \quad p = `b = 20, \quad q = `c - `b = 9$$
$$l_1 = \frac{d+2n}{d} = \frac{7}{3}. \quad p_1 = q_1 = 1$$

So ist es bei allen höheren Dreiecken aller höheren Gruppen.

Bemerkenswert ist hier noch, dass die ersten Gruppendreiecke

der II. Tafel, als gleichschenklige mit $p = q = 1$, abwechselnd von den ersten Gruppendreiecken und von der ersten Gruppe der I. Tafel abgeleitet sind, indem die ersteren mit $2^{\backprime}a$ als Basis für gerade l, die letzteren mit $2^{\backprime}b$ als Basis für ungerade l gewonnen werden.

Für den Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises erhält man

$$i = lzv = (\alpha + \beta + \gamma)\varrho$$
$$\varrho = \frac{lzv}{(p+q)v+z} = \frac{l(p+q)pqv}{(p+q)(l^2 - pq + pq)} = \frac{pqv}{l}$$

Da l zu dem reducirten v relativ primär ist, so wird ϱ nur dann eine ganze Zahl, wenn l in pq liegt.

Dieses ist bei den pythagorischen Dreiecken stets der Fall, da $l = p$ ist, weshalb man $\varrho = qv = \alpha$ erhält, entsprechend dem $\varrho = dn = \gamma$ der I. Tafel.

21. Bei den schiefwinkligen Dreiecken der II. Tafel ist der Radius des eingeschriebenen Kreises nur dann eine ganze Zahl, wenn l in pq liegt.

Bestimmt man die Dreiecke mit gleichen Umfangs- und Flächenzahlen, $u = i$, so ist

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = u = i = (\alpha + \beta + \gamma)\varrho, \quad \varrho = 2$$

d. h. alle Dreiecke mit $\varrho = 2$ haben gleiche Umfangs- und Flächenzahlen; und da $\varrho \cdot \frac{2}{\varrho} = 2$ ist, so ist mit dem Factor $\frac{2}{\varrho}$ von jedem Primdreieck eine Ableitung mit $u = i$ möglich.

Will man von diesen zahllosen Dreiecken jene mit ganzen Seitenmassen bestimmen, so folgt

$$i^2 = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = u^2 = 4(\alpha + \beta + \gamma)^2$$
$$\alpha\beta\gamma = 4(\alpha + \beta + \gamma)$$

was nur bei kleinen Zahlen in wenigen Fällen möglich ist.

Soll ein solches Dreieck gleichschenklig werden, so folgt

$$\alpha = \beta, \quad \alpha^2\gamma = 4(2\alpha + \gamma), \quad \alpha = \frac{2}{\gamma}(2 + \sqrt{2^2 + \gamma^2})$$

Weil es aber nach der pythagorischen Primtafel zu 2^2 keine ganze Quadratzahl gibt, welche α rational macht, so gibt es kein gleichschenkliches Dreieck dieser Art.

Es muss also $\alpha \gtrless \beta \gtrless \gamma$ sein. Setzt man nun das kleinste Teilmass = 3, so können die zwei andern nicht kleiner als 4 und 5 sein, was gibt

$$3.4.5 = 60 > 4(3+4+5) = 48$$

welche Differenz immer grösser wird, je grösser man das kleinste Teilmass wählt. Wohl aber ist

$$2.3.4 = 24 < 4(2+3+4) = 36$$

Mithin kann das kleinste Teilmass nur die Werte 1 und 2 annehmen, und für $\gamma = 1, = 2$ folgt

$$1) \quad \alpha\beta = 4(\alpha+\beta+1), \quad \alpha = \frac{4(\beta+1)}{\beta-4} = 4 + \frac{20}{\beta-4}$$

$$2) \quad 2\alpha\beta = 4(\alpha+\beta+2), \quad \alpha = \frac{2\beta+4}{\beta-2} = 2 + \frac{8}{\beta-2}$$

Weil jedoch 20 nur durch 1, 2, 4; 5, 10, 20, und 8 nur durch 1, 2; 4, 8 teilbar ist, so kann nur sein

$$1) \quad \beta = 5, 6, 8; \quad 9, 14, 24$$

$$2) \quad \beta = 3, 4; \quad 6, 10$$

Daraus ergibt sich der Reihe nach:

γ	β	α	a	b	c	$u = i$	ϱ	l	p	q
1	5	24	6	25	29	60	2	12	24	1
1	6	14	7	15	20	42	2	3	6	1
1	8	9	9	10	17	36	2	4	8	1
2	3	10	5	12	13	30	2	3	3	2
2	4	6	6	8	10	24	2	2	2	1

In den 3 ersten schiefwinkligen Dreiecken ($l = \frac{1}{2}p$) erhält α die 3 Werte, welche β noch annehmen könnte zu Wiederholungen mit $\beta_1 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$; und dasselbe gilt von den letzten 2 pythagorischen Dreiecken ($l = p$).

22. Es gibt nur ungleichseitige rationale Dreiecke mit ganzen Seitenzahlen, welche gleiche Umfangs- und Flächenzahlen haben, und zwar nur fünf: 3 schiefwinklige und 2 pythagorische: das zweite Primdreieck der 1. Gruppe, und vom ersten die Ableitung mit 2.

Sind die Seiten eines Dreiecks arithmetisch proportional, so hat man für b als mittlere

$$2b = a + c,\quad 2(\alpha+\gamma) = 2\beta + \alpha + \gamma,\quad \alpha + \beta = 2\beta,\quad s = 3\beta$$

Setzt man $\beta = z$, $\alpha = p\nu$, $\gamma = q\nu$, so folgt

$$l^2 = \frac{pq}{\beta} \cdot s = 3pq,\quad \frac{(p+q)pq}{l^2 - pq} = \frac{p+q}{2}$$

Da nun für die primäre Entwicklung p unp q relativ primär sein müssen, so kann

$$l = \sqrt{3pq}$$

nur dann rational werden, wenn ein Factor, z. B. p die Form $3x^2$ und q die Form y^2 hat. Dabei fällt die Beschränkung $p > q$ hinweg, weil q niemals den Wert $3x^2$ annehmen, also niemals eine Wertvertauschung zwischen p und q vorkommen kann.

$$l = \sqrt{3pq} = \sqrt{3 \,.\, 3x^2 \,.\, y^2} = 3xy = p \text{ für } y = x = 1$$

Mithin erhält man nur Ein pythagorisches Dreieck.

Setzt man auch noch die Differenz der Teil- und Seitenmasse $= \delta$, so folgt die

Tabelle derjenigen rationalen Primdreiecke, deren Seiten arithmetisch proportional sind.

	p		q	$p+q$	ν	α	β	γ	a	b	c	δ
x	$3x^2$	y	y^2	2		$p\nu$	z	$q\nu$	$\beta+\gamma$	$\alpha+\gamma$	$\alpha+\beta$	
1	3	1	1	4/2	1	3	2	1	3	4	5	1
		2	4	7/2	2	6	7	8	15	14	13	1
		4	16	19/2	2	6	19	32	51	38	25	13
		⋮										
2	12	1	1	13/2	2	24	13	2	15	26	37	11
		5	25	37/2	2	24	37	50	87	74	61	13
		7	49	61/2	2	24	61	98	159	122	85	37
		⋮										
3	27	1	1	28/2	1	27	14	1	15	28	41	13
		2	4	31/2	2	54	31	8	39	62	85	23
		4	16	43/2	2	54	43	32	75	86	97	11
		⋮										

23. Es gibt unendlich viele rationale Primdreiecke mit arithmetisch proportionalen Seiten, unter denen aber nur Ein pythagorisches ist, das Erste.

Anm. An der Spitze dieser Tabelle stehen die zwei merkwürdigsten rationalen Dreiecke

$$3, \quad 4, \quad 5$$
$$13, \quad 14, \quad 15$$

das erste als der Repräsentant aller rechtwinkligen, das zweite als der Repräsentant aller schiefwinkligen rationalen Dreiecke, wofür sie im Altertume gegolten haben. Die Seiten-Inhaltsformel des Dreiecks wurde von den Alten nur durch die Zahlen 13, 14, 15 ausgedrückt.

Drückt man von 3 geometrisch oder harmonisch proportionalen Grössen die mittlere b durch die zwei äussern aus, so folgt

$$1) \quad a, \quad \sqrt{ac}, \quad c$$

$$2) \quad a, \quad \frac{2ac}{a+c}, \quad c; \qquad a(a+c), \quad 2ac, \quad c(a+c)$$

und unter Berücksichtigung des Seitengesetzes

$$1) \quad c < a+b = a+\sqrt{ac} = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}) = a.2{,}615\ldots$$

$$2) \quad c < a+b = a+\frac{2ac}{a+c} = a(1+\sqrt{2}) = a.2{,}413\ldots$$

Setzt man also die grosse Seite $< 2{,}615\ldots$ und bezüglich $< 2{,}413\ldots$ mal der kleinen Seite, so kann man Dreiecke mit geometrisch und harmonisch proportionalen Seiten bilden.

Entwickelt man aber beide Proportionen für relative Primzahlen, so bekommt man

1) 3 ungerade oder 2 gerade Seitenmasse,
2) stets 2 gerade Seitenmasse,

was dem 4. Satz widerspricht.

24. Kein rationales Dreieck hat geometrisch oder harmonisch proportionale Seiten.

2. Entwicklung aller rationalen Dreiecke, deren Flächenzahl von keinem Seitenteilmass ein Vielfaches ist.

Setzt man auch gebrochene $l = \frac{x}{y}$, also x und y relativ prim, so folgt

$$\frac{z}{\nu} = \frac{(p+q)pqy^2}{x^2-pqy^2}, \qquad i = \frac{x}{y}.\nu z = x\nu.\frac{z}{y}$$

Wie x, so kann hier auch der Nenner $\nu = x^2-pqy^2$ den Factor y nicht enthalten. Mithin bleibt y^2 in z, das in i den Factor y verliert, so dass $\gamma = z$ kein Factor von i ist.

Sollen auch $\beta = p\nu$ und $\alpha = q\nu$ nicht in $i = x\nu.\frac{z}{y}$ liegen, so muss

$$z = (p+q)pqy^2$$

von p und q je einen Factor verlieren, die überdies nicht in x liegen dürfen.

Wäre nun auch x^2 von diesen Factoren frei, so könnten dieselben durch die Reduction nicht aus z und i verschwinden. Mithin müssen diese Factoren in x^2, dürfen aber nicht in x liegen, d. h. sie müssen Quadratzahlen sein. Gibt man also p und q quadratische Factoren und legt deren Wurzeln als Factoren in x, so bleibt y ohnedies von diesen Factoren frei, ebenso $p+q$, dieselben fallen also im Zähler und Nenner des Reductionsbruches vollständig aus, und i wird auch von α und β kein Vielfaches.

25. Gibt man den relativen Primzahlen p und q quadratische Factoren >1, legt deren zweite Wurzeln als Factoren in x, wählt zu diesem x die y relativ prim und so, dass $x^2 > pqy^2$ ist, so liefert jede solche Bestimmungs-Quaternion ein rationales, schiefwinkliges, ungleichseitiges Primdreieck, dessen Flächenzahl von keinem Seitenteilmass ein Vielfaches ist.

Da kein Primdreieck dieser Art existiren kann, das den Bedingungen dieses Satzes nicht entspricht, so erhält man durch denselben offenbar alle Dreiecke dieser Art.

Bezeichnet man den mit der Quadratzahl verbundenen Factor in p durch f, in q durch f_1, in x^2 durch f_2^2, so erhält man

$$\frac{(p+q)pqy^2}{x^2-pqy^2} = \frac{(p+q)ff_1y^2}{f_2^2-ff_1y^2}$$

Entwirft man darnach eine III. Tafel, so bekommt dieselbe für die Gruppenzahl p zwei Abteilungen: die erste Abteilung für f enthält für p reine Quadratzahlen, zu denen in der zweiten Abteilung noch nichtquadratische Factoren >1 treten.

Jede Gruppe kann q als reine Quadratzahl und in Verbindung mit einem nichtquadratischen Factor enthalten, wodurch jede Gruppe zwei offene Unterabteilungen erhält.

Will man diese Tafel weit ausführen, so ist zur Verhütung von Wertvertauschungen zwischen p und q gleichfalls eine provisorische Bestimmungsreihe nötig.

Die Wiederholungs-Quaternionen werden wie bei der zweiten Tafel berechnet.

Meine III. Tafel soll den Reichtum dieses Systems nur in einigen Grundzügen andeuten, damit man auch solche bis jetzt unbekannt gewesene rationale Dreiecke zu Gesicht bekommt.

Die Dreiecke mit rein quadratischen Seitenteilmassen

$$\alpha = x^2, \quad \beta = y^2, \quad \gamma = z^2, \quad i = xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

gehören teils der II., teils der III. Tafel an.

$$x^2+y^2+z^2 = w^2, \quad x^2+y^2 = w^2-z^2 = (w+z)(w-z) = \varphi\psi$$

$$\varphi = w+z, \quad \psi = w-z, \quad z = \frac{\varphi-\psi}{2}, \quad w = \frac{\varphi+\psi}{2}$$

Um hier z und w als ganze Zahlen zu bekommen, müssen φ und ψ gleichzeitig gerade oder ungerade Zahlen sein; es muss also $x^2+y^2 = \varphi\psi$ entweder eine wenigstens doppelt gerade, oder eine ungerade Zahl sein; und da zwei ungerade Quadratzahlen stets eine einfach gerade Summe geben

$$(2m+1)^2+(2n+1)^2 = 2[2(m^2+m+n^2+n)+1]$$

so müssen von x und y eine oder beide gerade sein.

Im ersten Fall ergibt sich

$$x^2+y^2 = (2m)^2+(2n+1)^2 = 4(m^2+n^2+n)+1$$

eine ungerade Zahl, welche um 1 grösser ist, als eine mehrfach gerade Zahl.

Multiplicirt man aber zwei gleichartige ungerade Zahlen, d. h. solche, welche beide um 1 grösser sind als zwei einfach gerade, oder als zwei mehrfach gerade Zahlen, so ist das Product um 1 grösser als eine mehrfach gerade Zahl; und multiplicirt man zwei ungleichartige ungerade Zahlen, so wird das Product um 1 grösser als eine einfach gerade Zahl.

Mithin ist $x^2+y^2 = 4s+1$ nur in zwei gleichartig ungerade Factoren φ und ψ zerlegbar, deren Differenz stets eine mehrfach ungerade Zahl ist, so dass

$$\gamma = z^2 = \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)^2 = (2R)^2$$

stets eine gerade Zahl wird, wie von α und β eine.

Im zweiten Falle, wenn x und y gerade Zahlen sind, muss $\gamma = z^2$ eine ungerade Zahl werden, wenn man ein Primdreieck erhalten will.

Daraus erhält man zunächst den zahlentheoretischen Satz:

26. Soll die Summe dreier relativ primärer Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl sein, so darf unter den Summanden nur Eine ungerade Zahl sein.

Geht man nun zur Bestimmung dieser Dreiecke von zwei geraden Quadratzahlen aus, so ist die dritte ungerade Quadratzahl schwerer zu bestimmen, als wenn man von einer geraden und ungeraden Quadratzahl ausgeht. Deshalb setzt man für α allmählich alle ungeraden Quadratzahlen und dazu für β alle geraden Quadratzahlen, welche mit α relativ prim sind, und bestimmt daraus γ so, dass es nicht $< \beta$ wird, weil man sonst eine schon dagewesene Ternion erhält; z. B.

$$1^2 + 4^2 = 17 = 17.1, \quad \frac{17-1}{2} = 8; \quad 1^2, \; 4^2, \; 8^2$$

$$1 + 8^2 = 65 = 65.1, \quad \frac{65-1}{2} = 32; \quad 1^2, \; 8^2, \; 32^2$$

$$= 13.5, \quad \frac{13-5}{2} = 4; \quad 1^2, \; 8^2, \; 4^2$$

welch letzte Ternion eine Wiederholung der ersten ist.

27. Setzt man für α alle ungeraden Quadratzahlen, und zu jedem α für β alle geraden Quadratzahlen, welche mit α relativ prim sind, zerlegt dann $\alpha + \beta$ in ein Product aus zwei solchen Factoren, deren halbe Differenz im Quadrat nicht $< \beta$ ist, so erhält man alle rationalen Primdreiecke mit quadratischen Seitenteilmassen, indem das Quadrat jener halben Differenz zu α und β als drittes Teilmass tritt.

Das kleinste Dreieck dieser Art, welches ich als der III. Tafel angehörig gefunden habe, ist

$$\alpha = 7^2, \quad \beta = 2^8, \quad \gamma = 2^6.19^2, \quad i = 2^7.3^2.7.17.19$$

$$l = \frac{2.7}{19}.3^2.17, \quad l_1 = \frac{7.19}{2}.3^2.17, \quad l_2 = \frac{2.19}{7}.3^2.17$$

Bemerkung der Redaction.

Nach Satz 11. der vorstehenden Abhandlung findet sich die Aufstellung: „Jede Hypotenusenzahl hat die Form $4p+1$, aber nicht jede Zahl von dieser Form ist eine Hypotenusenzahl.“ Hiermit wird als fraglich hingestellt, was sich doch durch ein höchst einfaches Kriterium entscheidet. Da der Verfasser auf Vollständigkeit der Theorie Gewicht legt, so mögen folgende Sätze als Ergänzung in diesem Punkte dienen.

1. Das Product zweier Quadratsummen je zweier ganzen Zahlen ist eine Quadratsumme zweier ganzen Zahlen.

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2) = (xu \mp yv)^2 + (xv \pm yu)^2$$

2. Der Quotient zweier Quadratsummen je zweier ganzen Zahlen ist eine Quadratsumme zweier Rationalzahlen.

$$\frac{x^2+y^2}{u^2+v^2} = \left(\frac{xu \mp yv}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{xv \pm yu}{u^2+v^2}\right)^2$$

3. Ist der Quotient zweier solchen Quadratsummen eine ganze Zahl, so ist er Quadratsumme zweier ganzen Zahlen.

4. Eine Primzahl lässt sich nie auf mehr als eine Art als Quadratsumme ganzer Zahlen darstellen.

5. Jeder Factor einer Quadratsumme zweier relativen Primzahlen ist von der Form $4n+1$ oder $2(4n+1)$.

6. Unter den Werten $x = 1, 2, 3 \ldots p-1$ giebt es nicht mehr als n, welche für den Modul p die Congruenz

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k \equiv 0$$

erfüllen, wenn p Primzahl und nicht Factor von a_n ist.

Diese vorbereitenden Sätze sind leicht zu beweisen und lassen sich, falls sie nicht ohnedas gelehrt werden, als Uebungsaufgaben betrachten. Hier wird es genügen den Beweis für den Hauptsatz zu geben, aus welchem sich die angeregte Frage leicht erledigt.

7. Jede Primzahl $p = 4n+1$ ist eine Quadratsumme zweier relativen Primzahlen.

Sei für den Modul $p = 4n+1$

$$x^2 \equiv r; \quad 0 < r < p; \quad 0 < x < 2n+1$$

dann ist nach dem Fermatschen Satze

$$r^{2n} \equiv x^{p-1} \equiv 1; \quad (-r)^{2n} \equiv 1$$

Wenn nun x alle ganzen Zahlen von 1 bis $2n$ durchläuft, so kann r nicht zweimal denselben Wert annehmen; denn wäre

$$x^2 \equiv r; \qquad x_1^2 \equiv r$$

so hätte man:

$$(x-x_1)(x+x_1) \equiv 0$$

Es giebt also $2n$ verschiedene Werte von r. Die Congruenz $r^{2n} \equiv 1$ kann aber nur $2n$ verschiedene Auflösungen haben, deren eine $-r \equiv p-r$ ist. Folglich giebt es für jedes x eine zweite Zahl y der Art dass

$$x^2 \equiv r; \qquad y^2 \equiv -r; \qquad \text{also} \quad x^2+y^2 = pq$$

ist. Die unbekannte ganze Zahl q kann nach Satz 5. ausser der 2 nur Factoren von der Form $4n+1$ haben und ist stets $< \frac{1}{2}p$. Ist nun p_1 ein solcher Primfactor, so erhält man gleicherweise:

$$x_1^2+y_1^2 = p_1q_1; \qquad x_2^2+y_2^2 = p_2q_2; \quad \text{etc.}$$

wo p_2 Primfactor von q_1, p_3 von q_2, etc. ist. Schliesslich muss $q_k = 1$ werden, und man hat:

$$x_k^2+y_k^2 = p_k$$

Ebenso sind die übrigen Primfactoren von q_{k-1} Quadratsummen je zweier relativen Primzahlen, und der etwaige Factor $2 = 1^2+1^2$, folglich ist nach Satz 1. q_{k-1} und nach Satz 3. auch

$$p_{k-1} = \frac{x_{k-1}^2+y_{k-1}^2}{q_{k-1}}$$

Quadratsumme zweier ganzen Zahlen, und zwar nach Satz 5. relativer Primzahlen. Durch die gleiche Schlussweise kann man successive zeigen, dass p_{k-2}, p_{k-3}, ... p Quadratsummen je zweier relativen Primzahlen sind.

Aus Satz 7. folgt:

8. Jede Zahl ist pythagorische Hypotenusenzahl oder nicht, je nachdem sie von Primfactoren der Form $4n-1$ frei ist oder nicht.

Fragt man weiter nach der Anzahl der verschiedenen Zerlegungen, so lassen sich noch folgende Sätze aufstellen:

9. Eine Potenz einer Primzahl $4n+1$ lässt auf eine und nur auf eine Art als Quadratsumme zweier relativen Primzahlen darstellen.

10. Das Product von m ungleichen Primzahlen von der Form $4n+1$ lässt sich auf 2^{m-1} und nicht mehr verschiedene Arten als Quadratsumme zweier relativen Primzahlen darstellen.

d	n	ρ = γ	β	α	a	b	c	
		d.n	d(d+n)	(d+2n)n	γ+β	γ+α	β+α	β.
1	1	1	2	3	3	4	5	
	2	2	3	10	5	12	13	
	3	3	4	21	7	24	25	
	4	4	5	36	9	40	41	
	5	5	6	55	11	60	61	
	6	6	7	78	13	84	85	
	7	7	8	105	15	112	113	
	8	8	9	136	17	144	145	1
	9	9	10	171	19	180	181	1
	10	10	11	210	21	220	221	2
	11	11	12	253	23	264	265	3
	12	12	13	300	25	312	313	3
	13	13	14	351	27	364	365	4
	14	14	15	406	29	420	421	6
	15	15	16	465	31	480	481	7
	16	16	17	528	33	544	545	8
	17	17	18	595	35	612	613	10
	18	18	19	666	37	684	685	12
	19	19	20	741	39	760	761	14
	20	20	21	820	41	840	841	17
	21	21	22	903	43	924	925	19
	22	22	23	990	45	1012	1013	22
	23	23	24	1081	47	1104	1105	25
	24	24	25	1176	49	1200	1201	29
	25	25	26	1275	51	1300	1301	33
	26	26	27	1378	53	1404	1405	37
	27	27	28	1485	55	1512	1513	41
	28	28	29	1596	57	1623	1625	46
	29	29	30	1711	59	1740	1741	51
	30	30	31	1830	61	1860	1861	56
	⋮							
3	1	3	12	5	15	8	17	
	2	6	15	14	21	20	29	
	4	12	21	44	33	56	65	
	5	15	24	65	39	80	89	1
	7	21	30	119	51	140	149	3
	8	24	33	152	57	176	185	5
	10	30	39	230	69	260	269	8
	11	33	42	275	75	308	317	11
	13	39	48	377	87	416	425	18
	14	42	51	434	93	476	485	22
	16	48	57	560	105	608	617	31
	17	51	60	629	111	680	689	37
	19	57	66	779	123	836	845	51
	20	60	69	860	129	920	929	59
	22	66	75	1034	141	1100	1109	77
	23	69	78	1127	147	1196	1205	87
	25	75	84	1325	159	1400	1409	111
	26	78	87	1430	165	1508	1517	124
	28	84	93	1652	177	1736	1745	153
	29	87	96	1769	183	1856	1865	169
	⋮							

$\varrho = \gamma$	β	α	a	b	c	t
$d.n$	$d(d+n)$	$(d+2n)n$	$\gamma+\beta$	$\gamma+\alpha$	$\beta+\alpha$	$\beta.\alpha$
5	30	7	**35**	**12**	**37**	210
10	35	18	**45**	**28**	**53**	630
15	40	33	**55**	**48**	**73**	1320
20	45	52	**65**	**72**	**97**	2340
30	55	102	**85**	**132**	**157**	5610
35	60	133	**95**	**168**	**193**	7980
40	65	168	**105**	**208**	**233**	10920
45	70	207	**115**	**252**	**277**	14490
55	80	297	**135**	**352**	**377**	23760
60	85	348	**145**	**408**	**433**	29580
65	90	403	**155**	**468**	**493**	36270
70	95	462	**165**	**532**	**557**	43890
80	105	592	**185**	**672**	**697**	62160
85	110	663	**195**	**748**	**773**	72930
90	115	738	**205**	**828**	**853**	84870
7	56	9	**63**	**16**	**65**	504
14	63	22	**77**	**36**	**85**	1386
21	70	39	**91**	**60**	**109**	2730
28	77	60	**105**	**88**	**137**	4620
35	84	85	**119**	**120**	**169**	7140
42	91	114	**133**	**156**	**205**	10374
56	105	184	**161**	**240**	**289**	19320
63	112	225	**175**	**288**	**337**	25200
70	119	270	**189**	**340**	**389**	32130
77	126	319	**203**	**396**	**445**	40194
84	133	372	**217**	**456**	**505**	49476
91	140	429	**231**	**520**	**569**	60060
105	154	555	**259**	**660**	**709**	85470
112	161	624	**273**	**736**	**785**	100464
119	168	697	**287**	**816**	**865**	117096
9	90	11	**99**	**20**	**101**	990
18	99	26	**117**	**44**	**125**	2574
36	117	68	**153**	**104**	**185**	7956
45	126	95	**171**	**140**	**221**	11970
63	144	161	**207**	**224**	**305**	23184
72	153	200	**225**	**272**	**353**	30600
90	171	290	**261**	**380**	**461**	49590
99	180	341	**279**	**440**	**521**	61380
117	198	455	**315**	**572**	**653**	90090
126	207	518	**333**	**644**	**725**	107226
11	132	13	**143**	**24**	**145**	1716
22	143	30	**165**	**52**	**173**	4290
33	154	51	**187**	**84**	**205**	7854
44	165	76	**209**	**120**	**241**	12540
55	176	105	**231**	**160**	**281**	18480
66	187	138	**253**	**204**	**325**	25806
77	198	175	**275**	**252**	**373**	34650
88	209	216	**297**	**304**	**425**	45144
99	220	261	**319**	**360**	**481**	57420
110	231	310	**341**	**420**	**541**	71610

II. Systematische Tafel derjenigen rationalen

Eine

l	p	q	$\frac{(p+q)pq}{l^2-pq}$	ν	γ	β	α	a	b	c	i	ϱ	Wiederholun ternionen.			
					w	$p\nu$	$q\nu$	$\gamma+\beta$	$\gamma+\alpha$	$\beta+\alpha$	$l.\nu.w$	$\frac{\beta.q}{l}$	l_1	p_1	q_1	l_2
2	1	1	$^2/_3$	3	2	3	3	5	5	6	12	$1^1/_2$	4	3	2	.
	2	1	$^6/_2$	1	3	2	1	5	4	3	6	1	3	3	1	6
	3	1	$^{12}/_1$	1	12	3	1	15	13	4	24	$1^1/_2$	8	4	1	8
3	1	1	$^2/_8$	4	1	4	4	5	5	8	12	$1^1/_3$	3	4	1	.
	2	1	$^6/_7$	7	6	14	7	20	13	21	126	$4^2/_3$	9	2	1	9
	3	2	$^{30}/_3$	1	10	3	2	13	12	5	30	2	5	5	1	15
	5	1	$^{30}/_4$	2	15	10	2	25	17	12	90	$3^1/_3$	9	3	2	9
	6	1	$^{42}/_3$	1	14	6	1	20	15	7	42	2	7	14	1	21
	7	1	$^{56}/_2$	1	28	7	1	35	29	8	84	$2^1/_3$	12	4	1	12
	8	1	$^{72}/_1$	1	72	8	1	80	73	9	216	$2^2/_3$	27	9	1	27
4	1	1	$^2/_{15}$	15	2	15	15	17	17	30	120	$3^3/_4$	8	15	2	.
	2	1	$^6/_{14}$	7	3	14	7	17	10	21	84	$3^1/_2$	6	7	3	12
	3	1	$^{12}/_{13}$	13	12	39	13	51	25	52	624	$9^3/_4$	16	13	4	16
	4	1	$^{20}/_{12}$	3	5	12	3	17	8	15	60	3	5	5	3	20
	4	3	$^{84}/_4$	1	21	4	3	25	24	7	84	3	7	7	1	28
	5	1	$^{30}/_{11}$	11	30	55	11	85	41	66	1320	$13^3/_4$	24	11	6	24
	5	2	$^{70}/_6$	3	35	15	6	50	41	21	420	$7^1/_2$	14	7	3	28
	5	3	$^{120}/_1$	1	120	5	3	125	123	8	480	$3^3/_4$	32	24	1	32
	6	1	$^{42}/_{10}$	5	21	30	5	51	26	35	420	$7^1/_2$	14	21	5	28
	7	1	$^{56}/_9$	9	56	63	9	119	65	72	2016	$15^3/_4$	32	9	8	32
	7	2	$^{126}/_2$	1	63	7	2	70	65	9	252	$3^1/_2$	18	9	1	36
	8	1	$^{72}/_8$	1	9	8	1	17	10	9	36	2	$^9/_2$	9	1	36
	9	1	$^{90}/_7$	7	90	63	7	153	97	70	2520	$15^3/_4$	40	10	7	40
	10	1	$^{110}/_6$	3	55	30	3	85	58	33	660	$7^1/_2$	22	55	3	44
	11	1	$^{132}/_5$	5	132	55	5	187	137	60	2640	$13^3/_4$	48	12	5	48
	12	1	$^{156}/_4$	1	39	12	1	51	40	13	156	3	13	39	1	52
	13	1	$^{182}/_3$	3	182	39	3	221	185	42	2184	$9^3/_4$	56	14	3	56
	14	1	$^{210}/_2$	1	105	14	1	119	106	15	420	$3^1/_2$	30	105	1	60
	15	1	$^{240}/_1$	1	240	15	1	255	241	16	960	$3^3/_4$	64	16	1	64

eren Flächenzahl ein Vielfaches von wenigstens
s ist.

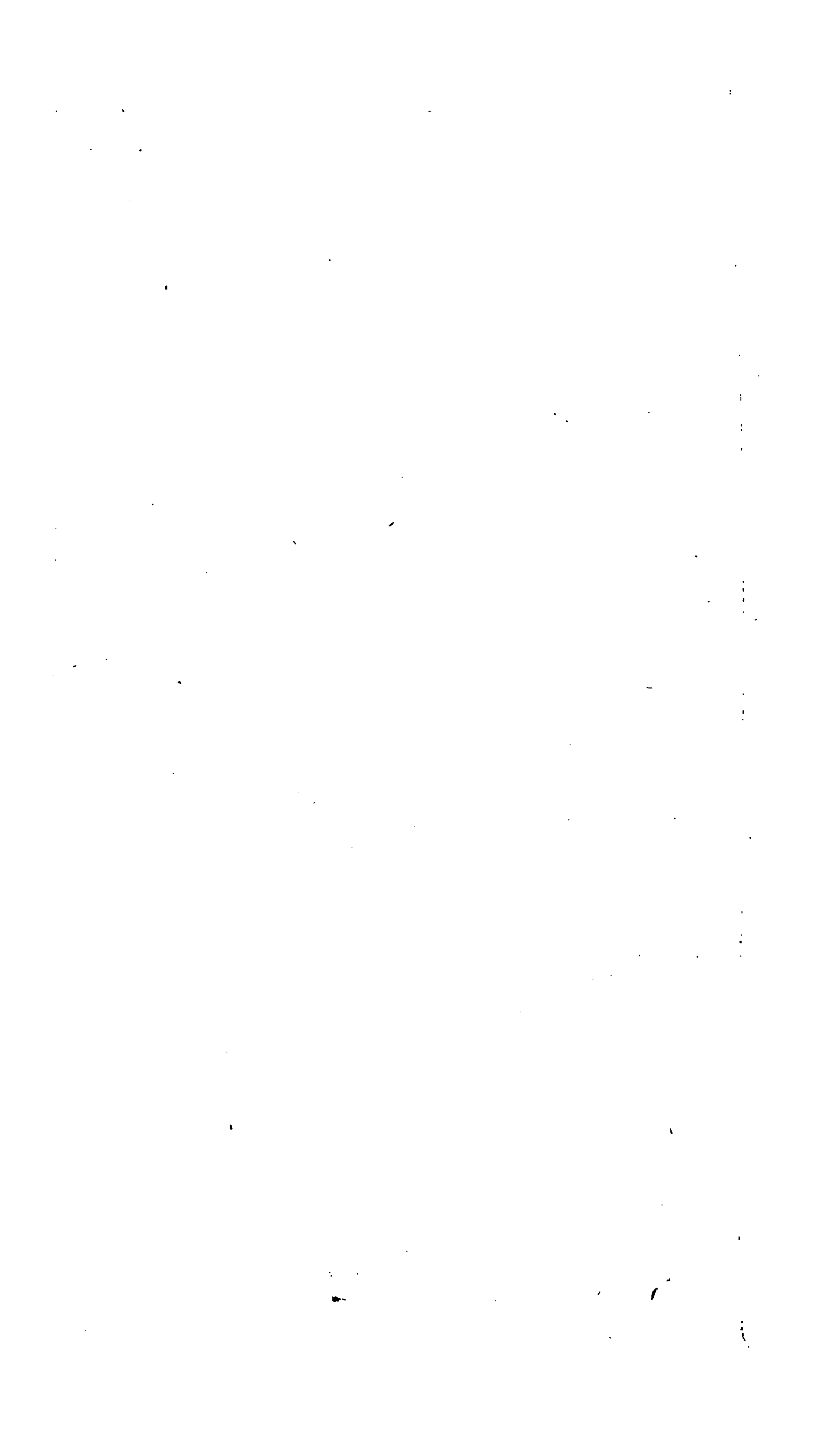
l	$\frac{(p+q)pq}{l^2-pq}$	ν	γ	β	α	a	b	c	i	ϱ	Wiederholungs-ternionen.					
			w	$p\nu$	$q\nu$	$\gamma+\beta$	$\gamma+\alpha$	$\beta+\alpha$	$l.\nu.w$	$\frac{\beta.q}{l}$	l_1	p_1	q_1	l_2	p_2	q_2
1	$^{2}/_{24}$	12	1	12	12	13	13	24	60	$2^{2}/_{5}$	5	12	1	.	.	.
1	$^{6}/_{23}$	23	6	46	23	52	29	69	690	$9^{1}/_{5}$	15	23	3	15	23	6
1	$^{12}/_{22}$	11	6	33	11	39	17	44	330	$6^{3}/_{5}$	10	11	2	10	11	6
2	$^{30}/_{19}$	19	30	57	38	87	68	95	2850	$22^{4}/_{5}$	25	19	10	25	19	15
1	$^{20}/_{21}$	21	20	84	21	104	41	105	2100	$16^{4}/_{5}$	25	21	5	25	21	20
3	$^{84}/_{13}$	13	84	52	39	136	123	91	5460	$31^{1}/_{5}$	35	21	13	35	28	13
2	$^{70}/_{15}$	3	14	15	6	29	20	21	210	6	7	7	3	35	15	14
4	$^{180}/_{5}$	1	36	5	4	41	40	9	180	4	9	9	1	45	36	5
1	$^{42}/_{19}$	19	42	114	19	156	61	133	3990	$22^{4}/_{5}$	35	19	7	35	42	19
1	$^{56}/_{18}$	9	28	63	9	91	37	72	1260	$12^{3}/_{5}$	20	9	4	20	28	9
2	$^{126}/_{11}$	11	126	77	22	203	148	99	6930	$30^{4}/_{5}$	45	18	11	45	63	11
3	$^{210}/_{4}$	2	105	14	6	119	111	20	1050	$8^{2}/_{5}$	25	15	2	25	35	2
1	$^{72}/_{17}$	17	72	136	17	208	89	153	6120	$27^{1}/_{5}$	45	17	9	45	72	17
3	$^{264}/_{1}$	1	264	8	3	272	267	11	1320	$4^{4}/_{5}$	55	33	1	55	88	1
1	$^{90}/_{16}$	8	45	72	8	117	53	80	1800	$14^{2}/_{5}$	25	8	5	25	45	8
2	$^{198}/_{7}$	7	198	63	14	261	212	77	6930	$25^{1}/_{5}$	55	22	7	55	99	7
1	$^{110}/_{15}$	3	22	30	3	52	25	33	330	6	11	22	3	55	15	11
1	$^{132}/_{14}$	7	66	77	7	143	73	84	2310	$15^{2}/_{5}$	30	7	6	30	66	7
2	$^{286}/_{3}$	3	286	33	6	319	292	39	4290	$13^{1}/_{5}$	65	26	3	65	143	3
1	$^{182}/_{12}$	6	91	78	6	169	97	84	2730	$15^{3}/_{5}$	35	7	6	35	91	6
1	$^{210}/_{11}$	11	210	154	11	364	221	165	11550	$30^{4}/_{5}$	75	15	11	75	210	11
1	$^{240}/_{10}$	1	24	15	1	39	25	16	120	3	8	24	1	40	8	5
1	$^{272}/_{9}$	9	272	144	9	416	281	153	12240	$28^{4}/_{5}$	85	17	9	85	272	9
1	$^{306}/_{8}$	4	153	68	4	221	157	72	3060	$13^{3}/_{5}$	45	9	4	45	153	4
1	$^{342}/_{7}$	7	342	126	7	468	349	133	11970	$25^{1}/_{5}$	95	19	7	95	342	7
1	$^{380}/_{6}$	3	190	57	3	247	193	60	2850	$11^{2}/_{5}$	50	10	3	50	190	3
1	$^{420}/_{5}$	1	84	20	1	104	85	21	420	4	21	84	1	105	21	5
1	$^{462}/_{4}$	2	231	42	2	273	233	44	2310	$8^{2}/_{5}$	55	11	2	55	231	2
1	$^{506}/_{3}$	3	506	66	3	572	509	69	7590	$13^{1}/_{5}$	115	23	3	115	506	3
1	$^{552}/_{2}$	1	276	23	1	299	277	24	1380	$4^{3}/_{5}$	60	12	1	60	276	1
1	$^{600}/_{1}$	1	600	24	1	624	601	25	3000	$4^{4}/_{5}$	125	25	1	125	600	1



hl von keinem

α	i
qv	$xv\cdot\frac{z}{y}$
$^{3}.3^{3}$	$2^{4}.3^{2}.5.7.13$
$^{5}.3^{3}$	$2^{6}.3^{2}.5.11.13$
$^{3}.3^{4}$	$2^{4}.3^{3}.7.11.13$
$2^{3}.5^{3}$	$2^{4}.3.5^{2}.7.29$
$2^{4}.5^{2}.7$	$2^{5}.3.5.7.11.29$
$2^{3}.3^{2}.5^{2}$	$2^{4}.3^{2}.5.7.11.29$
$2^{7}.3$	$2^{5}.3^{2}.5^{3}.7$
$2^{9}.3$	$2^{7}.3^{2}.5^{3}.11$
$2^{7}.3^{2}$	$2^{5}.3^{3}.5^{2}.7.11$
$3^{3}.23$	$2^{2}.3^{2}.5.11.23.31$
$2.3^{3}.47$	$2^{2}.3^{2}.5.13.31.47$
$2.3^{3}.11$	$2^{2}.3^{2}.7.11.13.31$
$2^{2}.3^{2}.5.11$	$2^{3}.3.5^{2}.7^{2}.11.13$
$2^{2}.3^{2}.5.41$	$2^{3}.3.5^{2}.7^{2}.17.41$

1c.
ind,



XVIII.

Ueber einige Probleme aus der Theorie der Centralbewegungen.

Von

Herrn Dr. *Ludwig Matthiessen*

in Husum.

Es mögen die phoronomischen Relationen zweier Kugeln untersucht werden, welche von den Ruhelagen A und B ausgehend sich gegeneinander bewegen in Folge gegenseitiger Anziehung nach gewissen Functionen ihrer jedesmaligen Entfernungen von einander.

Bezeichnet f die Anziehung zweier auf Punkte reducirten Masseneinheiten in der Einheit der Entfernungen, so ist die gegenseitige Wirkung zweier homogener Kugeln, deren Massen M und N sind, in der Entfernung u allgemein gleich $-MNf.F(u)$, wenn dieselbe eine Function der Entfernung und nicht etwa der Geschwindigkeit v oder der Zeit t sein soll. Der Wert der Grösse f, mit welcher die Materie des Weltalls begabt ist, lässt sich aus dem dritten Kepler'schen Gesetze

$$\frac{T^2}{U^3} = \frac{4\pi^2}{(M_1+N_1)f}$$

berechnen, wo M_1 und N_1 beziehungsweise die Massen der Sonne und eines Planeten bezeichnen. Jene auf die beiden Massen M und N anziehend wirkende Kraft $MNf.F(u)$ teilt diesen aber in jedem Momente Geschwindigkeit mit, die den Massen umgekehrt proportional sind, woraus folgt, dass, wenn zwei Körper ohne Anfangsgeschwindig-

keit ihrer gegenseitigen Anziehungskraft überlassen bleiben, sie in gleichen Zeiten Räume durchlaufen, welche ihren Massen umgekehrt proportional sind. Dabei ist der durchlaufene Weg die gerade Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte. Die Gleichung der Trajectorie ist nämlich

$$\int \varphi \partial u = \frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{u^2} + \left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{u}\right)}{\partial \vartheta}\right\}^2\right] = -\frac{v^2}{2}$$

und $c = u_0 v_0 \sin\alpha$ der in der Zeiteinheit beschriebene Sector der Bahn. Da aber $v_0 = 0$ ist, so ist es auch c, mithin für jeden endlichen Wert der Geschwindigkeit v

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{u}\right)}{\partial\vartheta} = \infty, \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{u} = \infty \, . \, \vartheta$$

also muss für jeden endlichen Wert von u die Amplitude ϑ gleich Null sein, eine Eigenschaft, die nur der Geraden zukommt.

Sind die Massen M und N für sich in Punkten concentrirt, so werden sie also auch in demjenigen Punkte zusammentreffen, der ihre ursprüngliche Entfernung U_0 in zwei Teile teilt, die den resp. Massen umgekehrt proportional sind.

Untersucht man nun die relative Bewegung der einen Kugel von der Masse N gegen die andere als fest betrachtete, so lässt sich dieselbe auf die absolute zurückführen, indem man an der bewegten eine beschleunigende Kraft angebracht denkt, welche der von der als beweglich gedachten Kugel ausgehenden Kraft gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Die beschleunigenden Kräfte, welche die Kugeln M und N angreifen, sind bezüglich $-f.N.F(u)$ und $-f.M F(u)$. Damit also auf die oben angedeutete Art die relative Bewegung nicht geändert werde, hat man anzunehmen, dass die Kugel N von einer der Summe

$$-\{f.M.F(u) + f.N.F(u)\} = -f(M+N)\,F(u)$$

gleichen Kraft gegen die als fest gedachte Kugel M getrieben werde. Oder: man sucht die bewegende Kraft der Kugel N, welche gleich der Summe

$$-\left\{f.M.N.F(u) + f.\frac{N}{M}\cdot M.\,N.F(u)\right\} = -f\{MN + N^2\}\,F(u)$$

ist. Dividirt man dieselbe durch die Masse N, so erhält man wiede dieselbe beschleunigende Kraft $-f(M+N).F(u)$.

Da keine andern Kräfte als die anziehenden auf die Massen wirken, so ist die Gleichung der Bewegung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(M+N)F(u) = -f.\mu.F(u)$$

woraus sich die allgemeine Lösung des vorgestellten Problems unter Voraussetzung eines festen Mittelpunktes der Anziehung herleiten lässt.

Wir werden dann die Anwendung derselben auf specielle Fälle folgen lassen.

Setzt man in der obigen Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = v$, so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial u}.v$$

folglich

$$\frac{\partial v}{\partial u}.v = -f.\mu.F(u); \quad \frac{v^2}{2} = -f\mu.\int F(u)\,\partial u + \frac{C}{2};$$

$$v^2 = -2f\mu\int F(u)\,\partial u + C.$$

Setzen wir für v seinen Wert $\frac{\partial u}{\partial t}$ ein und berücksichtigen, dass für $t=0$ auch $v=0$ sein soll, so ist, indem v das negative Vorzeichen erhält:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{-2f.\mu\int_{u_0}^{u} F(u)\,\partial u} \qquad (1)$$

und

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{\partial u}{\sqrt{-2\mu f\int_{u_0}^{u} F(u)\,\partial u}} \qquad (2)$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Elemente der Bewegung in jedem Punkte des durchlaufenen Weges $u_0 - u = x$.

Sind ferner die Halbmesser der Kugeln R und r, so ist im Augenblicke dcs Zusammenstosses derselben

$$v_1{}^2 = -2f\mu\int_{u_0}^{R+r} F(u)\,\partial u \qquad (3)$$

und die während der Bewegung verflossene Zeit

$$t_1 = -\int_{u_0}^{R+r} \frac{\partial u}{\sqrt{-2f\mu\int F(u)\,\partial u}} \tag{4}$$

Sind die Massen der Kugeln punktuell, so sind R und r gleich Null, und

$$v_{11}^2 = -2f\mu\int_{u_0}^{0} F(u)\,\partial u = 2f\mu\int_{0}^{u_0} F(u)\,\partial u \tag{5}$$

$$T = \int_{0}^{u_0} \frac{\partial u}{\sqrt{2f\mu\int_{u}^{u_0} F(u)\,\partial u}} \tag{6}$$

Die Gleichung (2) lässt sich auch schreiben $t = \chi(u)$, und es wird hiernach auch möglich sein u und v als Functionen der Zeit t auszudrücken. Es ist nämlich

$$t = \chi(0) + \frac{u}{1}\cdot\chi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\chi''(0) + \dots \tag{7}$$

Durch Umkehrung dieser Reihe und Differentiirung in Bezug auf t resultirt

$$u = \psi(t); \qquad v = \psi'(t) \tag{8}$$

1. Wenn sich die Kugel N unter dem Einflusse einer Centralkraft bewegt, welche der Entfernung ihres Mittelpunktes vom Centrum direct proportional wirkt, so ist $-f.\mu.u$ an die Stelle von $-f.\mu.F(u)$ zu setzen. Die Gleichungen der Bewegung nehmen alsdann folgende Form an.

$$v^2 = -2f\mu\int_{u_0}^{u} u\,\partial u = \mu.f.(u_0^2 - u^2)$$

$$v_{11}^2 = \mu.f.u_0^2; \qquad v_{11} = -u_0\sqrt{\mu.f}$$

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{\partial u}{\sqrt{f.\mu(u_0^2-u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu.f}}\arccos\frac{u}{u_0};$$

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu f}}; \quad u = u_0\cos(t\sqrt{\mu f}); \quad v = -\sqrt{\mu f}\,u_0\sin(t\sqrt{\mu f}).$$

Wäre die Centralkraft repulsiv, so müsste man $f.\mu u$ satt $-f\mu.u$ setzen.

Man erhält alsdann Exponentialfunctionen statt der goniometrischen, nämlich

$$u = u_0 \cos(t\sqrt{\mu f} \cdot \sqrt{-1}) = \frac{u_0}{2}\left\{e^{t\sqrt{\mu f}} + e^{-t\sqrt{\mu f}}\right\}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0\sqrt{\mu f}}{2}\left\{e^{t\sqrt{\mu f}} - e^{-t\sqrt{\mu f}}\right\}$$

Beide Grössen nähern sich für $t = \infty$ selbst der Unendlichkeit und zugleich ist

$$\text{Lim}\left(\frac{v}{u}\right) = \sqrt{\mu f}$$

d. h. die erlangte Geschwindigkeit wird den durchlaufenen Räumen zuletzt proportional.

2. Sei $F(u) = s - mu$, so nimmt die beschleunigende Kraft den Wert $-f\mu(s - mu)$ an. Sie wirkt attractiv, so lange $s - mu$ positiv, und repulsiv, wenn $s - mu$ negativ ist. Zunächst ist

$$v^2 = -2\mu f \int_{u_0}^{u} (s - mu)\partial u = \mu . f . m \left\{\left(\frac{2s}{m}u_0 - u_0^2\right) - \frac{2su}{m} + u^2\right\}$$

$$v_{11}^2 = \mu . f . m \left\{\frac{2s}{m}u_0 - u_0^2\right\}$$

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{\partial u}{\sqrt{\mu f m}\sqrt{\left(\frac{2s}{m}u_0 - u_0^2\right) - \left(\frac{2s}{m}u - n^2\right)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\mu f m}} \log\text{nat} \frac{u - \frac{s}{m} + \sqrt{\left(\frac{2s}{m}u_0 - u_0^2\right) - \left(\frac{2s}{m}u - u^2\right)}}{u_0 - \frac{s}{m}}$$

Für $u = 0$ resultirt aus dieser Gleichung

$$T = -\frac{1}{\sqrt{f\mu . m}} \log\text{nat} \frac{-s + \sqrt{2sm - mu_0) u_0}}{mu_0 - s}$$

Untersuchen wir die Fälle, in denen s und m specielle Werte erhalten.

a) Sei $m = 1$ und $s = u_0$ d. h. die beschleunigende Kraft wirke proportional dem durchlaufenen Wege. Dann ist, so bald Bewegung eingetreten ist, in jedem Momente

$$v^2 = \mu f(u_0^2 - 2u_0 u + u^2)$$
$$v = -\sqrt{\mu f}(u_0 - u)$$

Bei Voraussetzung einer anziehenden Kraft ist $u < u_0$, also v negativ; für eine Repulsivkraft ist $u > u_0$, also v positiv. Im ersteren Falle um $u = 0$ ist $v_{u} = -u_0 \sqrt{\frac{\mu f}{2}}$, im entgegengesetzten Falle nähert sich v dem Werte $+\infty$. Zugleich ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu . f}} \log \operatorname{nat} \frac{0}{0}:$$

also unbestimmt d. h. es tritt entweder gar keine Bewegung ein, oder nach einem unendlich kleinen Impulse durchläuft die Kugel den Raum u_0 in der Zeit, welche der Wert von t nach den gewöhnlichen Regeln annimmt. Dieser ist aber Null, folglich $T = \infty$. Es darf hieraus indess nicht gefolgert werden, dass auch für jeden Teil des Weges von B bis A in unendlich langer Zeit durchlaufen werde. Setzen wir nämlich für u den Ausdruck $u_0 - x$, wo x die Entfernung der bewegten Kugel von B bezeichnet, so ist $\partial u = -\partial x$ um die Zeit, welche die bewegte Kugel gebraucht, um den noch übrigen Teil u des Weges zu durchlaufen

$$t_1 = -\int_{u_0}^{x} \frac{\partial x}{\sqrt{\mu f . x}} = \frac{1}{\sqrt{\mu f}} \log \operatorname{nat} \frac{u_0}{x}$$

woraus noch folgt

$$x = u_0 e^{-\sqrt{\mu f} . t_1}$$

b) Sei $m = 1$ und $s = \frac{u_0}{2}$, also $F(u) = \frac{u_0}{2} - u$, d. h. die beschleunigende Kraft von 0 bis $\frac{u_0}{2}$ attractiv von $\frac{u_0}{2}$ bis u_0 repulsiv, so wird sich der Körper immer mehr entfernen, die Zeit t aber imaginär werden für u gleich Null. Es ist nämlich

$$v^2 = -2\mu f \int_{u_0}^{u} \left(\frac{u_0}{2} - u\right) \partial u = \mu f(u^2 - u_0 u)$$

also muss $u > u_0$ sein für ein reelles v; auch ist

$$T = \frac{1}{\sqrt{\mu f}} \log \operatorname{nat}(-1) = \pm \frac{\pi \sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}}$$

c) Angenommen es sei $m = -1$ und s gleich $-s$, also $F(u)$ gleich $u - s$ d. h. die beschleunigende Kraft von 0 bis s repulsiv, von s bis u_0 attractiv, so wird sich die bewegliche Kugel anfangs von B aus gegen A hinbewegen, und je nach dem Werte von s den Punkt A erreichen oder nicht, darauf aber um den Punkt s oscillatorische Bewegungen machen. Es ist nun

$$v^2 = -2\mu f \int_{u_0}^{u} (u-s)\,\partial u = \mu f \{ (u_0 - 2s) u_0 - (u - 2s) u \}$$

und

$$t = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \log\mathrm{nat} \frac{u - s + \sqrt{(2su_0 - u_0^2) - (2su - u^2)}}{u_0 - s}$$

Für $u = 0$ wird

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \log\mathrm{nat} \frac{-s + \sqrt{(2s - u_0) u_0}}{u_0 - s}$$

Für $s = \frac{1}{2} u_0$

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \log\mathrm{nat}(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{\mu f}}$$

Für $s = 0$

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \log\mathrm{nat} \sqrt{-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu f}}$$

in Uebereinstimmung mit den sub 1) gefundenen Formeln.

Untersuchen wir weiter, innerhalb welcher Grenzen T einen reellen Wert annimmt. Zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = u_0$ geht der Ausdruck $\sqrt{2su_0 - u_0^2}$ vom Imaginären ins Reelle über.

Für jeden reellen Wert von T muss nun entweder

$$\frac{-s + \sqrt{2su_0 - u_0^2}}{\mu_0 - s} = \pm 1$$

oder einen Wert von der Form $-x + yi$ annehmen. Es ist aber

$$\log\mathrm{nat}(-x + yi) = \tfrac{1}{2} \log\mathrm{nat}(x^2 + y^2) - i \arctan \frac{y}{x}$$

nach der Formel

$$f(-x + yi) = \tfrac{1}{2} \{ f(-x + yi) + f(-x - yi) \} - \tfrac{1}{2} \{ f(-x + yi) - f(-x - yi) \} \sqrt{-1}$$

Da nun

$$(-s)^2 + \sqrt{-2su_0 + u_0^2}^2 = (u_0 - s)^2$$

ist, so ist auch, indem man

$$-s:(u_0 - s) = -x \quad \text{und} \quad \sqrt{-2su_0 + u_0^2}:(u_0 - s) = y \text{ setzt,}$$

$$\text{lognat}(x^2 + y^2) = \text{lognat}\,1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

Folglich erhält man für jeden negativen Wert von $2su_0 - u_0^2$ oder für $s = O$ bis $\frac{1}{2}u_0$

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}}\left\{\pm n\pi i - i \arctan\frac{\sqrt{-2su_0 + u_0^2}}{s}\right\}$$

oder wenn man von allen Werten des lognat(+1) nur den reellen Wert Null annimmt, da $\arctan Z < \frac{\pi}{2}$ sein muss

$$T = \frac{1}{\sqrt{\mu f}} \arctan\frac{\sqrt{-2su_0 + u_0^2}}{s}$$

Beispiel: Sei $s = \frac{u_0}{4}$; dann ist

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \text{lognat}\frac{-1 + \sqrt{-8}}{3} = \frac{1}{\sqrt{f\mu}} \arctan\sqrt{8}$$

Setzt man $s > \frac{1}{2}u$, z. B. gleich $\frac{3}{4}u_0$, so erhält man eine complexe Function, deren reeller Teil die Zeit bedeutet, während welcher sich die Kugel N gegen A hinbewegt. Es ist bei obiger Annahme für $u = 0$

$$T = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \text{lognat}(-3 + \sqrt{8}) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}}\{\text{lognat}(3 - \sqrt{8}) + \text{lognat}(-1)\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu f}}\{\text{lognat}(3 - \sqrt{8})\sqrt{-1}\} + \frac{\pi}{\sqrt{\mu f}}$$

Es bewegt sich also nur während der Zeit $\frac{\pi}{\sqrt{\mu f}}$ in der Richtung nach A, und kehrt alsdann um ohne A zu erreichen.

Um den Wert von u zu bestimmen, der diesem Werte $\frac{\pi}{\sqrt{\mu f}}$ angehört, suchen wir das Max. des reellen Wertes von t für $s = \frac{3}{4}u_0$. Für dieses ist v gleich Null; also

$$u_0^2 - 3u_0u + 2u^2 = 0$$

$$(u_0 - u)(u_0 - 2u) = 0$$

Unter den Wurzeln dieser Gleichung hat nur $M = \frac{1}{2}u_0$ Gültigkeit. Es ascillirt mithin die beweglich gedachte Kugel zwischen $\frac{1}{2}u_0$ und u_0 hin und zurück um den Mittelpunkt $\frac{3}{4}u_0$. Allgemein ist

$$u = s - (u_0 - s) = 2s - u_0 \quad \text{und allemal} \quad t_1 = \pi : \sqrt{\mu f}.$$

Wir wollen endlich noch v als Function von t ausdrücken unter der Voraussetzung $F(u) = u - \frac{1}{2}u_0$. Es war

$$v^2 = \mu f.(u_0 - u)u, \qquad t = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\mu f}} \log\text{nat} \frac{2u - u_0 + 2\sqrt{u^2 - u_0 u}}{u_0}$$

Substituirt man aus der ersten Gleichung den Wert u in die zweite, so resultirt

$$16\frac{v^2}{\mu f} = -u_0^2 (e^{t\sqrt{-\mu f}} - e^{-t\sqrt{-\mu f}})^2$$

folglich

$$v = -\tfrac{1}{2}u_0 \sqrt{\mu f} \sin(t\sqrt{f\mu})$$

$$\mu = \int_0^t v\,\partial t = u_0 \cos(t\sqrt{f\mu})$$

ebenfalls in Uebereinstimmung mit den sub 1. gefundenen Werten.

3. Wenn sich die beiden Kugeln im umgekehrten Verhältnisse des Cubus ihrer Entfernungen von einander anziehen, so lassen sich die Gesetze ihrer Bewegung auf folgende Art bestimmen. Es ist $F(u) = 1 : u^3$ und mithin

$$v^2 = \mu f\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)$$

Beim Zusammenstoss der beiden Kugeln ist

$$v^2 = \mu f\left(\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)$$

Für $R + r = u$ ist $v =$ Null d. h. es tritt überhaupt keine Bewegung ein, wie vorauszusehen war. Für $R + r = u = 0$ ist aber $v = \infty$. Die Zeit wird ausgedrückt durch das Integral

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{u_0\, u\, \partial u}{\sqrt{\mu f}.\sqrt{u_0^2 - u^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{\mu f}}\sqrt{u_0^2 - u^2}$$

und u als Function der Zeit

$$u = \sqrt{u_0^2 - \frac{\mu f t^2}{u_0^2}}$$

Für $u = 0$ wird $T = u_0^2 : \sqrt{\mu f}$.

Man kann auch v als Function der Zeit t ausdrücken, indem man u nach t differentiirt. Ausserdem findet man leicht

$$v = \frac{\mu f t}{u_0^2 u}, \quad v u = \frac{\mu f t}{u_0^2} = \frac{\sqrt{\mu f} . t}{T}$$

d. h. es ist das Product aus der Entfernung der bewegten Kugel von A und der Geschwindigkeit in jedem Augenblicke der verflossenen Zeit proportional.

4. Es möge endlich der Fall untersucht werden, wo

$$F(u) = a + \frac{1}{u^2} \text{ ist.}$$

Zunächst ist

$$v^2 = \frac{2\mu f a}{u} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{a u_0^2 - 1}{a u_0} u - u^2 \right\}$$

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{u}\, \partial u}{\sqrt{2\mu f a} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{a u_0^2 - 1}{a u_0} u - u^2}}$$

Ist $a = 0$, so vereinfachen sich die Formeln sehr; es wird

$$v^2 = 2\mu f \left(\frac{u_0 - u}{u_0 u} \right)$$

$$t = \frac{\sqrt{u_0^3}}{\sqrt{2\mu f}} \left\{ \sqrt{\frac{u}{u_0}} \sqrt{1 - \frac{u}{u_0}} + \tfrac{1}{2} \arccos \frac{2u - u_0}{u_0} \right\}$$

Soll für irgend einen Wert von t der zugehörige Wert von u oder v berechnet werden, so muss man diese transcendente Gleichung auflösen, was am bequemsten geschieht, indem man einen Hülfswinkel verwendet. Man setze

$$u = u_0 - x, \quad \text{und} \quad \arccos \frac{2u - u_0}{u_0} = \omega \quad \text{oder} \quad \cos \omega = \frac{u_0 - 2x}{u_0}$$

Hieraus folgt

$$t = \frac{\sqrt{u_0}}{\sqrt{2\mu f}} \left\{ \sqrt{u_0 x - x^2} + \frac{u_0}{2} \arccos \frac{u_0 - 2x}{u_0} \right\}$$

Demnächst ist $\sqrt{u_0 x - x^2} = \frac{u_0}{2} \sin \omega$

$$t = \frac{u_0}{2} \sqrt{\frac{u_0}{\mu f}} \{ \sin \omega + \omega \}$$

$$\omega + \sin \omega = t \sqrt{\frac{8 \mu f}{u_0^3}} = mt = y_,$$

Wir wollen hier noch eine Methode angeben, wie diese Gleichung nach ω aufgelöst werden kann. Betrachten wir die Grössen ω und $mt = (y_,)$ als die Coordinaten einer ebenen Curve. Um dieselbe zu construiren, seien (s. Fig.) OX und OY die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, ferner $OO_,$ die Einheit der Längen, und $O_, X_,$ parallel OX gezogen. Ueber dieser Linie construire man eine Cykloide $O_, G O_{,,}$ und ebenso nach der entgegengesetzten Seite die Cykloide $O_, G_, O_{,,,}$. Alsdann halbire den Winkel XOY durch SOT. Sei ferner OM die Abscisse eines gesuchten Punktes der Curve, construire den Kreis $MP' = OO_,$, ziehe $P'n$ parallel OX und verlängere MN um $P'n$ bis P, so ist dies ein Punkt der Curve $TOPS$... Ist G der Scheitel der Cykloide, so ist $OS' = SS' = \pi$. Die gedachte Curve verläuft, wie klar ist, zu beiden Seiten der TOS symmetrisch und es braucht mithin nur die Lösung der Aufgabe gefunden zu werden zwischen den Grenzen $\omega = O$ und π oder $y_,$ zwischen den Werten O und π, was dasselbe ist. Sei also $\pi > y_, > O$ und OU gleich $y_,$, so ziehe $UV \parallel OX$; wenn diese Linie die Curve in P_0 schneidet, ist UP_0 gleich ω, ein Wurzelwert der gegebenen Gleichung. Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = 1 + \cos \omega, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} = - \sin \omega$$

Mithin verläuft die Curve von O bis S gegen OS stets concav, weil innerhalb dieser Grenzen der zweite Differentialquotient nicht gleich Null wird.

Die Wendepunkte sind nur bei T, O, S u. s. w. allgemein für

$$\arcsin \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} = O, \quad \text{oder} \quad \omega = \pm n\pi$$

Die Tangente des Punktes O ist $1 + \cos O$ oder 2. Die Tangenten der Punkte S, T u. s. w. aber gleich Null.

Ist ferner $2\pi > y_{\prime\prime} > \pi$ z. B. gleich pm, so ist $\omega_{\prime\prime} = Om$, also wenn $y_{\prime}$ und $\omega_{\prime}$ die Coordinaten des homologen Punktes P bezeichnen, wird Om aus $OM(\omega_{\prime})$ gefunden nach den Gleichungen:

$$PM + pm = y_{\prime} + y_{\prime\prime} = 2\pi, \qquad y_{\prime} = 2\pi - y_{\prime\prime}$$
$$OM + Om = \omega_{\prime} + \omega_{\prime\prime} = 2\pi, \qquad \omega_{\prime} = 2\pi - \omega_{\prime\prime}$$

Statt also die Gleichung $\omega_{\prime\prime} + \sin\omega_{\prime\prime} = y_{\prime\prime}$ aufzulösen, schreibe man wegen $-\sin\omega_{\prime\prime} = \sin(2\pi - \omega_{\prime\prime})$ die gleichwertige

$$(2\pi - \omega_{\prime\prime}) + \sin(2\pi - \omega_{\prime\prime}) = 2\pi - y_{\prime\prime}$$

oder

$$\omega_{\prime} + \sin\omega_{\prime} = y_{\prime}$$

wo $\omega_{\prime}$ und $y_{\prime}$ wiederum zwischen den Gränzen O und π liegen.

Für $3\pi > y > 2\pi$ subtrahire man beiderseits 2π. Dann ist

$$(\omega - 2\pi) + \sin\omega = (\omega - 2\pi) + \sin(\omega - 2\pi) = y - 2\pi$$

Für $2n\pi > y > (2n-1)\pi$ findet man ω durch Auflösung der Gleichung

$$(2n\pi - \omega) + \sin(2n\pi - \omega) = 2n\pi - y$$

Für $(2n+1)\pi > y > 2n\pi$ lässt sich die Gleichung reduciren auf die Form

$$(\omega - 2n\pi) + \sin(\omega - 2n\pi) = y - 2n\pi$$

Sei OA die Tangente des Punktes O und $UA = \xi$. Errichte in A die Senkrechte $AP'' = \eta$, lege in P'' die Tangente BP'' und bezeichne AB mit ξ', errichte $BP''' = \eta_{\prime}$ u. s. f. Dann ist der gesuchte Wurzelwert für $\pi > y > O$

$$\omega = \xi + \xi' + \xi'' + \ldots.$$

Wenn $y_{\prime} - (\omega + \sin\omega) = f(\omega)$ gesetzt wird, so ist $-(1 + \cos\omega) = f'(\omega)$ und

$$\xi = \frac{y_{\prime}}{f'(O)}, \quad \xi' = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad \xi'' = \frac{f(\xi + \xi')}{f'(\xi + \xi')}; \quad \text{u. s. w.}$$

Der erste Näherungswert ist also stets $\frac{y_{\prime}}{2}$. Aus geometrischen Gründen und wegen der Natur dieser involutorischen Reihe folgt aber auch, dass wenn man im Stande ist, einen beliebigen Näherungswert von ω z. B. ω_n anzugeben, sein muss:

$$\omega = \omega_n + \frac{f(\omega_n)}{f'(\omega_n)} + \frac{f(\omega_n + B)}{f'(\omega_n + B)} + \frac{f(\omega_n + B + C)}{f'(\omega_n + B + C)} + \cdots$$

wo das zweite Glied der Reihe mit B, das dritte mit C u. s. f. be-

zeichnet wird. Das Verfahren fällt mit der Newton'schen Methode nahe zusammen. Man kann sich der angegebenen Methode auch mit Vorteil zur Lösung des allgemeinern Kepler'schen Problemes bedienen, nur muss man dann erst die Gleichung

$$\omega - \varepsilon \sin \omega = y_{,}$$

für n ungerade von $n\pi$ subtrahiren, wenn $n\pi > y > (n-1)\pi$, und $n\pi$ von ihr subtrahiren, wenn $(n+1)\pi > y > n\pi$ ist. Im ersteren Falle hat man

$$(n\pi - \omega) + \varepsilon \sin(n\pi - \omega) = n\pi - y_{,}$$

im andern

$$(\omega - n\pi) + \varepsilon \sin(\omega - n\pi) = y_{,} - n\pi$$

Setzen wir $\omega - n\pi = \omega_{,}$ und $y_{,} - n\pi = \eta$, so ist

$$\omega_{,} + \varepsilon \sin \omega_{,} = \eta$$

Ferner ist

$$\omega_{,} = \frac{\eta}{f'(O)} + \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} + \cdots$$

wo $f'(O) = 1 + \varepsilon$ ist. Da nun bei den Planeten ε sehr klein ist, so ist wegen der starken Convergenz der Reihe nahezu

$$\omega_{,} = \frac{\eta}{1+\varepsilon} = \eta - \varepsilon\eta$$

$$\omega = y_{,} + \varepsilon \sin y_{,}$$

Oft ist es bequemer die Umkehrungsformel von Lagrange zu benutzen, indess für ε nahe $\geqq 1$ ist dieselbe gänzlich unbrauchbar.

Die angegebene Formel gibt daher die vollständige Lösung des Problemes $\omega + \varepsilon \sin \omega = y$ für $\varepsilon \gtrless 1$. Die Gleichung hat nur einen Wurzelwert, so lange $\varepsilon \leqq 1$ ist. Ist aber $\varepsilon > 1$, so kann sie unendlich viele Werte haben. Ist allgemein

$$n\pi > \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} > y_{,}$$

so hat die Gleichung höchstens $2n-1$, mindestens $2n-3$ Wurzeln. Für $\varepsilon = \infty$ wird $n\pi > \varepsilon$, also $n = \infty$. Die übrigen Wurzeln lassen sich auf ähnliche Art finden, wie die erste.

XIX.

Propriété des Déterminants.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Théorème.** Lorsque, dans un déterminant, tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale sont égaux à zéro, le déterminant se réduit à son terme principal.

Considérons, par exemple, le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix};$$

tous les élements, moins un, étant nuls dans la première colonne, on a

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \Delta_1;$$

donc le déterminant Δ_1 tous les éléments, moins un, de la première colonne étant aussi égaux à zéro, il vient de même

$$\Delta_1 = b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix};$$

mais

$$\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix} = c_3 d_4;$$

par suite on obtient

$$\Delta_1 = b_2 c_3 d_4\,;$$

donc on a

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

2. **Théorème.** Lorsque, dans un déterminant, tous les éléments de la diagonale et ceux de la première ligne sont égaux entre eux et que, en même temps, tous les éléments situés au-dessous de la diagonale sont égaux et de signes contraires à ceux de la diagonale, le double du déterminant est égal au double élément de la diagonale, élevé à une puissance marquée par l'ordre du déterminant.

Soit le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -a & a & b & b \\ -a & -a & a & d \\ -a & -a & -a & a \end{vmatrix}$$

qui remplit ces conditions. Conservons la première ligne puis ajoutons cette ligne à chacune des trois suivantes; le déterminant ne change ni de valeur ni de signe et il vient encore

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 2a & a+b & a+c \\ 0 & 0 & 2a & a+d \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}$$

Dans ce déterminant tous les éléments situés au-dessour de la diagonale sont égaux à zéro; par suite le déterminant se réduit à son terme principal; donc il vient

$$2\Delta = 2a.2a.2a.2a = (2a)^4$$

3. **Corollaire.** On en déduit que

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^2,\quad 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^3,\quad 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & -1 & 1 & c \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^4, \text{ etc.}$$

où a, b, c, … sont des quantités arbitraires.

On *a* de même

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2, \quad \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3, \quad \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a & b \\ -2 & -2 & 2 & c \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^4, \ldots$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3^2, \quad \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & a \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3^3, \quad \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & a & b \\ -3 & -3 & 3 & c \\ -3 & -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3^4, \ldots$$

et ainsi de suite.

XX.

Surface des quadrilatères exprimée en déterminants.

Par

Georges Dostor.

---

1. Expression en déterminant de la surface du quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets. Considérons le quadrilatère *ABCD*, dont nous désignerons la surface par Q; et soient x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des quatre sommets consécutifs *A*, *B*, *C*, *D*, qu'on rencontre en parcourant le périmètre dans le sens des x positifs. Menons la diagonale *BD*, qui décompose le quadrilatère dans les deux triangles *BCD* et *ABD*.

On sait que

$$2BCD = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - (x_1 y_3 - y_1 x_3),$$

$$2ABD = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (x_1 y_3 - y_1 x_3);$$

il vient, par suite, en ajoutant:

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

or il est aisé de voir qu'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

mais ces deux déterminants ne diffèrent que par leurs premières colonnes; on obtiendra donc leur somme en ajoutant les premières colonnes, élément à élément et en conservant les autres colonnes telles quelles. On trouve ainsi

$$\text{(I)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_2 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

pour la surface du quadrilatère.

2. **Autre forme de cette surface.** Si, dans le déterminant précédent, nous retranchons les deux premières lignes des deux dernières, nous obtenons aussi

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

ou

$$\text{(II)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} x_2 - x & y_2 - y \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

3. **Surface d'un quadrilatère quelconque** $ABCD$, **en valeur des quatre côtés consécutifs** $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ **et des deux diagonales** $AC=m$, $BD=n$. Elevons au carré les deux membres de l'égalité

$$2Q = -\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix};$$

nous obtenons, en multipliant chaque ligne par 2,

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2(x-x_2)^2+2(y-y_2)^2 & 2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1) \\ 2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1) & 2(x_3-x_1)^2+2(y_3-y_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Or il est évident que

$$2(x-x_2)^2+2(y-y_2)^2 = 2n^2, \quad 2(x_3-x_1)^2+2(y_3-y_1)^2 = 2m^2;$$

de plus on a

$$2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1)$$
$$= -2(xx_1+yy_1)+2(x_1x_2+y_1y_2)-2(x_2x_3+y_2y_3)+2(x_3x+y_3y);$$

mais les égalités

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = a^2, \quad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = b^2,$$
$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 = c^2, \quad (x_3-x)^2+(y_3-y)^2 = d^2$$

donnent

$$-2(xx_1+yy_1) = +a^2-(x^2+y^2)-(x_1^2+y_1^2),$$
$$+2(x_1x_2+y_1y_2) = -b^2+(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2),$$
$$-2(x_2x_3+y_2y_3) = +c^2-(x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2),$$
$$+2(x_3x+y_3y) = -d^2+(x_3^2+y_3^2)+(x^2+y^2),$$

de sorte qu'on trouve, en ajoutant,

$$2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1) = a^2-b^2+c^2-d^2$$

La surface du quadrilatère sera donc

$$16Q^2 = \begin{vmatrix} 2n^2 & a^2-b^2+c^2-d^2 \\ a^2-b^2+c^2-d^2 & 2m^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\text{(III)} \qquad 16Q^2 = \begin{vmatrix} 2mn & a^2-b^2+c^2-d^2 \\ a^2-b^2+c^2-d^2 & 2mn \end{vmatrix}.$$

Cette expression revient à celle

$$\text{(IV)} \qquad 16\,Q^2 = 4\,m^2 n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

que nous avons déjà donnée dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, T. VIII, 1848, page 69.

4. **Expression en déterminant de la surface du quadrilatère inscriptible en valeur des quatre côtés.** Si le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, on aura $mn = ac + bd$ et la formule (IV) donnera

$$\begin{aligned} 16\,Q^2 &= 4(ac+bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2 \\ &= (2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2) \\ &= [(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2] \\ &= (b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d). \end{aligned}$$

Or le produit des deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

étant

$$\Delta\delta = \begin{vmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d & a+b-c+d & a+b+c-d \\ b-a+c+d & -b+a+d+c & -b-a-d+c & -b-a+d-c \\ c+d-a+b & -c-d-a+b & -c+d+a+b & -c+d-a-b \\ d+c+b-a & -d-c+b-a & -d+c-b-a & -d+c+b+a \end{vmatrix},$$

si l'on y divise les quatres lignes par les quantités respectives

$$b+c+d-a, \quad c+d+a-b, \quad d+a+b-c, \quad a+b+c-d,$$

on verra que

$$\Delta\delta = 16\,Q^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

mais on a évidemment

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\delta;$$

donc il vient $16\,Q^2 = -\Delta$, ou bien

$$\text{(V)} \qquad 16\,Q^2 = -\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

5. **Surface du quadrilatère inscrit dans la parabole $y^2 = 2px$, en valeur des coordonnées des quatre sommets.** Dans la formule (I) posons

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p}, \quad x_3 = \frac{y_3^2}{2p},$$

elle devient

$$2Q = \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 & y \\ 0 & 1 & y_1^2 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2^2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3^2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 & y \\ 0 & 1 & y_1^2 & y_1 \\ 0 & 0 & y_2^2 - y^2 & y_2 - y \\ 0 & 0 & y_3^2 - y_1^2 & y_3^2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir le second déterminant, dans le premier nous avons retranché les deux premières lignes des deux dernières; or ce second déterminant revient à

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1^2 & y_1 \\ 0 & y_2^2 - y^2 & y_2 - y \\ 0 & y_3^2 - y_1^2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2^2 - y^2 & y_2 - y \\ y_3^2 - y_1^2 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (y_2 - y)(y_3 - y_1)\begin{vmatrix} y_2 + y & 1 \\ y_3 + y_1 & 1 \end{vmatrix};$$

donc nous avons

$$\text{(VI)} \qquad 2Q = \frac{(y - y_2)(y_1 - y_3)(y - y_1 + y_2 - y_3)}{2p}.$$

XXI.

Propriété du tétraèdre.

Par

Georges Dostor.

Théorème. Dans tout tétraèdre, les faces sont entre elles comme les sinus des trièdres supplementaires des trièdres opposés.

Soit le tétraèdre $SABC$. Posons les arêtes

$$SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c,$$

et les arêtes opposées

$$BC = a', \quad CA = b', \quad AB = c'.$$

Nous désignons les faces par les mêmes lettres que les trièdres opposés que nous représenterons par les lettres de leur sommet, et nous indiquerons chaque dièdre par la lettre qui exprime la longueur de son arête.

Si sur chaque face nous projetons les trois autres faces, nous obtenons les quatre équations

$$\begin{aligned}
&S - A\cos a' - B\cos b' - C\cos c' = 0,\\
&A - B\cos c - C\cos b - S\cos a' = 0,\\
&B - C\cos a - S\cos b' - A\cos c = 0,\\
&C - S\cos c' - A\cos b - B\cos a = 0
\end{aligned}$$

que nous pouvons mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&S + 0 + A(-\cos a') + \cos b'(-B) + \cos c'(-C) = 0,\\
&0 + A + S(-\cos a') + \cos c\,(-B) + \cos b\,(-C) = 0,\\
&-S\cos b' - A\cos c + 0\,(-\cos a') - (-B) + \cos a\,(-C) = 0,\\
&-S\cos c' - A\cos b + 0\,(-\cos a') + \cos a\,(-B) - (-C) = 0.
\end{aligned}$$

Entre ces quatre équations éliminons les trois quantités $-\cos a'$, $-B$ et $-C$, nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} S+0 & A & \cos b' & \cos c' \\ 0+A & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b'-A\cos c & 0 & -1 & \cos a \\ -S\cos c'-A\cos b & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, par la décomposition du premièr membre en deux déterminants, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} S & A & \cos b' & \cos c' \\ 0 & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b' & 0 & -1 & \cos a \\ -S\cos c' & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A & \cos b' & \cos c' \\ A & S & \cos c & \cos b \\ -A\cos c & 0 & -1 & \cos a \\ -A\cos b & 0 & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ces deux déterminants nous pouvons interverter l'ordre des deux premières colonnes, après avoir divisé les premières colonnes respectivement par S et A; il nous vient, en intervertissent aussi les deux premières lignes dans le premier déterminant résultant,

$$-S \begin{vmatrix} S & 0 & \cos c & \cos b \\ A & -1 & \cos b' & \cos c' \\ 0 & \cos b' & -1 & \cos a \\ 0 & \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A \begin{vmatrix} A & 0 & \cos b' & \cos c' \\ S & -1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \cos c & -1 & \cos a \\ 0 & \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons suivant les éléments de la première colonne chacun de ces deux déterminants que nous représenterons par Δ_s et Δ_a; nous aurons

$$-S.\Delta_s = -S^2 \begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + S.A \begin{vmatrix} 0 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix},$$

$$A.\Delta_a = A^2 \begin{vmatrix} -1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} - S.A \begin{vmatrix} 0 & \cos b' & \cos c' \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix};$$

or le facteur de $+S.A$ ne diffère de celui de $-S.A$ que par le changement des lignes en colonnes et vice versâ, par suite ils sont égaux. On a donc l'égalité

$$-S^2 \begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A^2 \begin{vmatrix} -1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais le coefficient de S^2 est la carré du sinus du trièdre supplémen-

taire du trièdre A. En désignant ce sinus par la notation $\sin(A')$, **on** peut ainsi écrire

$$S^2 \sin^2(A') - A^2 \sin^2(S') = 0.$$

Donc on a

$$\frac{S}{\sin(S')} = \frac{A}{\sin(A')} = \frac{B}{\sin(B')} = \frac{C}{\sin(C')}.$$

XXII.

Propriétés du sinus des trièdres.

Par

Georges Dostor.

---

1. Considérons le trièdre $OXYZ$, dont nous poserons les trois faces

$$YOZ = \lambda, \quad ZOX = \mu, \quad XOY = \nu$$

et dont nous désignerons les trois dièdres OX, OY, OZ par les lettres correspondantes X, Y, Z.

Nous représenterons par λ', μ', ν' les inclinaisons respectives des arêtes OX, OY, OZ sur les plans des faces opposées YOZ, ZOX, XOY.

Si Δ désigne le sinus du trièdre $OXYZ$, et que l'on pose

$$\lambda + \mu + \nu = 2\varphi, \quad X + Y + Z - \pi = 2S,$$

on sait que

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

ou bien

$$\text{(I)} \qquad \Delta = 2\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\mu)\sin(\varphi-\nu)}.$$

On en déduit

$$\text{(II)} \qquad \Delta = \frac{4\sin S\sin(X-S)\sin(Y-S)\sin(Z-S)}{\sin X\sin Y\sin Z},$$

et, parsuite,

$$\text{(III)} \quad \Delta = \sin\mu\sin\nu\sin X = \sin\nu\sin\lambda\sin Y = \sin\lambda\sin\mu\sin Z,$$

puis

$$\text{(IV)} \qquad \Delta = \sin\lambda\sin\lambda' = \sin\mu\sin\mu' = \sin\nu\sin\nu'.$$

Par le sommet O menons une droite quelconque OD; représentons par α, β, γ les angles que fait cette droite avec les trois arètes OX, OY, OZ et par α', β', γ' les inclinaisons de la même droite sur les plans des trois faces opposées YOZ, ZOX, XOY.

Prenons les arètes OX, OY, OZ pour axes de coordonnées et soient x, y, z les coordonnées du point M de la droite OD dont la distance OM à l'origine est égale à l'unité. Projetons sur OD la distance OM et la ligne brisée $x+y+z$; nous obtenons l'équation

$$\text{(1)} \qquad 1 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Par le sommet O élevons sur le plan XOY la perpendiculaire OP dans le sens des z positifs et projetons sur cette ligne la longueur OM et la ligne brisée $x+y+z$; il nous vient

$$\cos DOP = x\cos XOP + y\cos YOP + z\cos ZOP,$$

or il est aisé de voir qu'on a l'angle

$$DOP = \frac{\pi}{2} - \gamma', \quad XOP = \frac{\pi}{2}, \quad YOP = \frac{\pi}{2}, \quad ZOP = \frac{\pi}{2} - \nu';$$

par suite on a $\sin\gamma' = z\sin\nu'$, et en multipliant par $\sin\nu$,

$$\sin\nu\sin\gamma' = z\sin\nu\sin\nu';$$

mais, d'après (IV), $\sin\nu\sin\nu'$ est le sinus du trièdre $OXYZ$ et $\sin\nu \sin\gamma'$ est le sinus du trièdre $ODXY$, sinus que nous désignerons par Δ_{xy}. Nous trouvons ainsi que

$$\text{(2)} \qquad \Delta x = \frac{\Delta_{yz}}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_{zx}}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la relation (1) nous obtiendrons la relation assez remarquable

$$\text{(V)} \qquad \varDelta = \cos\alpha\,\varDelta_{yz} + \cos\beta\,\varDelta_{zx} + \cos\gamma\,\varDelta_{xy}.$$

On verrait de même qu'on a

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \cos\alpha.\varDelta = \varDelta_{yz} + \cos\nu\,\varDelta_{zx} + \cos\mu\,\varDelta_{xy}, \\ \cos\beta.\varDelta = \cos\nu\,\varDelta_{yz} + \varDelta_{zx} + \cos\lambda\,\varDelta_{xy}, \\ \cos\gamma.\varDelta = \cos\mu\,\varDelta_{yz} + \cos\lambda\,\varDelta_{zx} + \varDelta_{xy}. \end{cases}$$

3. Multiplions les quatre relations (V) et (VI) respectivement par $\varDelta$, $\varDelta yz$, $\varDelta zx$, $\varDelta xy$ et ajoutons les égalités résultantes, nous obtiendrons, après réduction,

$$\text{(VII)} \qquad \varDelta^2 = \varDelta^2_{yz} + \varDelta^2_{zx} + \varDelta^2_{xy} + 2\cos\lambda\,\varDelta_{zy}\,\varDelta_{xy} + 2\cos\mu\,\varDelta_{xy}\,\varDelta_{yz} + 2\cos\nu\,\varDelta_{xz}\,\varDelta_{yz}.$$

Si nous avions multiplié les quatre équations (V) et (VI) respectivement par $-\varDelta$, $-\varDelta_{yz}$, $\varDelta_{zx}$, $\varDelta_{xy}$, et que nous eussions ajouté les résultats, nous aurions trouvé

$$\text{(VIII)} \qquad \varDelta^2_{yz} = \varDelta^2 + \varDelta^2_{zx} + \varDelta^2_{xy} + 2\cos\lambda\,\varDelta_{zx}\,\varDelta_{xy} - 2\cos\beta\,\varDelta\,.\,\varDelta_{zx} - 2\cos\gamma\,\varDelta\,.\,\varDelta_{xy}.$$

On verrait de même que

$$\text{(IX)} \qquad \begin{aligned} \varDelta^2_{zx} &= \varDelta^2 + \varDelta^2_{xy} + \varDelta^2_{yz} + 2\cos\mu\,\varDelta_{xy}\,\varDelta_{yz} - 2\cos\gamma\varDelta\,.\,\varDelta_{xy} - 2\cos\alpha\varDelta\,.\,\varDelta_{yz}, \\ \varDelta^2_{xy} &= \varDelta^2 + \varDelta^2_{yz} + \varDelta^2_{zx} + 2\cos\nu\,\varDelta_{yz}\,\varDelta_{zx} - 2\cos\alpha\varDelta\,.\,\varDelta_{yz} - 2\cos\beta\varDelta\,.\,\varDelta_{zx}. \end{aligned}$$

4. Si l'on multiplie (V) par $2\varDelta$ et que l'on ajoute le résultat à (VIII), on obtient encore

$$\text{(X)} \qquad \varDelta^2 + \varDelta^2_{yz} - 2\cos\alpha\,\varDelta\,.\,\varDelta_{yz} = \varDelta^2_{zx} + \varDelta^2_{xy} + 2\cos\lambda\,\varDelta_{zx}\,\varDelta_{xy}.$$

On trouverait d'une manière analogue que

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} \varDelta^2 + \varDelta^2_{zx} - 2\cos\beta\,\varDelta\,.\,\varDelta_{zx} = \varDelta^2_{xy} + \varDelta^2_{yz} + 2\cos\mu\,\varDelta_{xy}\,\varDelta_{yz} \\ \varDelta^2 + \varDelta^2_{xy} - 2\cos\gamma\,\varDelta\,.\,\varDelta_{xy} = \varDelta^2_{yz} + \varDelta^2_{zx} + 2\cos\nu\,\varDelta_{yz}\,\varDelta_{zx}. \end{cases}$$

XXIII.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Fortsetzung von N. XIII.

Von

R. Hoppe.

---

5. Bedingungen eines orthogonalen Flächensystems, dessen eine Flächenschar einem ebenen System von Geraden und parallelen Trajectorien entspricht.

Die in Gl. (67) dargestellte Fläche aus der in Rede stehenden Schar variire mit einem dritten Parameter w so, dass sie von den Flächen $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ rechtwinklig geschnitten wird. Da die ihren Krümmungslinien u und v zugehörigen Werte bei orthogonalem Fortrücken im allgemeinen mit w variiren müssen, so ist statt u zu setzen h Function von (u, w); v kommt nicht vor, dagegen ist jetzt λ Function von (v, w). Ferner betrachten wir k als Function von (h, w), und μ, π sowie die Grössen

$$S = \int \frac{\partial \pi}{\partial \mu} \partial \cos \lambda, \quad T = \int \frac{\partial \pi}{\partial \mu} \partial \sin \lambda$$

als Functionen von (λ, w). Endlich sind statt x, y, z die auf ein mit w variirendes Axensystem bezüglichen Coordinaten x_1, y_1, z_1 zu setzen, auf welche dann nach (68) x, y, z mittels der Relationen

$$\begin{aligned}
x &= x_1 \cos\beta + \{ y_1 \cos\alpha + (z_1 + \varkappa) \sin\alpha \} \sin\beta \\
y &= -x_1 \sin\beta + \{ y_1 \cos\alpha + (z_1 + \varkappa) \sin\alpha \} \cos\beta \\
z &= - y_1 \sin\alpha + (z_1 + \varkappa) \cos\alpha
\end{aligned}$$

zurückgeführt werden. Die Flächengleichungen sind nun:

$$x_1 = \frac{\varrho}{\zeta}\xi + \frac{\partial k}{\partial h}\cos\lambda - S$$

$$y_1 = \frac{\varrho}{\zeta}\eta + \frac{\partial k}{\partial h}\sin\lambda - T$$

$$z_1 = \frac{\varrho}{\zeta}$$

und zwar ist

$$2\zeta = 1 + (h+\mu)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\right)^2; \qquad \varrho = -(h+\mu)\frac{\partial k}{\partial h} + k + \pi$$

$$\xi = (h+\mu)\cos\lambda - \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\sin\lambda; \quad \eta = (h+\mu)\sin\lambda + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\cos\lambda.$$

α, β, $\varkappa$ sind Functionen von w.

Zunächst sind die Bedingungsgleichungen der Orthogonalität

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

auf x_1, y_1, z_1 zu reduciren. Dividirt man sie bzhw. durch $\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial x_1}{\partial h}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial w} + [y_1\cos\alpha + (z_1+\varkappa)\sin\alpha]\beta'\right\} \\ + \frac{\partial y_1}{\partial h}\left\{\frac{\partial y_1}{\partial w} + (z_1+\varkappa)\alpha' - x_1\beta'\cos\alpha\right\} \\ + \frac{\partial z_1}{\partial h}\left\{\frac{\partial z_1}{\partial w} - x_1\beta'\sin\alpha - y_1\alpha' + \varkappa'\right\} \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial x_1}{\partial w} + [y_1\cos\alpha + (z_1+\varkappa)\sin\alpha]\beta'\right\} \\ + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial y_1}{\partial w} + (z_1+\varkappa)\alpha' - x_1\beta'\cos\alpha\right\} \\ + \frac{\partial z_1}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial z_1}{\partial w} - x_1\beta'\sin\alpha - y_1\alpha' + \varkappa'\right\} \end{aligned}$$

Die Differentiation ergibt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial h} = \left(\frac{\varrho}{\zeta} + \frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\left(\cos\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\xi\right)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial h} = \left(\frac{\varrho}{\zeta} + \frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\left(\sin\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\eta\right)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial h} = \left(\frac{\varrho}{\zeta} + \frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\left(-\frac{h+\mu}{\zeta}\right)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = \left\{\frac{\varrho}{\zeta}\left(h+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial h} - \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right\}\left(-\sin\lambda - \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = \left\{\frac{\varrho}{\zeta}\left(h+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial h} - \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right\}\left(\cos\lambda - \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = \left\{\frac{\varrho}{\zeta}\left(h+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial \pi}{\partial \mu}\right\}\left(-\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial w} &= \frac{\partial x_1}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial k}{\partial w} + \left(\cos\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\xi\right)\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w}\\ &+ \left\{\frac{\varrho}{\zeta}\left(\cos\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\xi\right) - \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial k}{\partial h}\right\}\frac{\mu}{\partial w} - \frac{\varrho}{\zeta}\left(\sin\lambda + \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w}\\ &+ \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial\pi}{\partial w} - \frac{\partial S}{\partial w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial w} &= \frac{\partial y_1}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial k}{\partial w} + \left(\sin\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\eta\right)\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w}\\ &+ \left\{\frac{\varrho}{\zeta}\left(\sin\lambda - \frac{h+\mu}{\zeta}\eta\right) - \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial k}{\partial h}\right\}\frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\varrho}{\zeta}\left(\cos\lambda - \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w}\\ &+ \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial\pi}{\partial w} - \frac{\partial T}{\partial w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial w} &= \frac{\partial z_1}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial z_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial k}{\partial w} - \frac{h+\mu}{\zeta}\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w}\\ &- \frac{1}{\zeta}\left(\frac{h+\mu}{\zeta}\varrho + \frac{\partial k}{\partial h}\right)\frac{\partial\mu}{\partial w} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\pi}{\partial w}\end{aligned}$$

Die vorstehenden gemeinsamen Factoren, welche die zweimal drei ersten Ausdrücke zeigen, gehen durch Division weg, und die Gl. (72) werden nach Multiplication mit ζ:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\varrho + \zeta\frac{\partial^2 k}{\partial h^2}\right)\frac{\partial h}{\partial w} + \zeta\frac{\partial^2 k}{\partial h\,\partial w} - (h+\mu)\left(\frac{\partial k}{\partial w} + \frac{\partial \pi}{\partial w}\right) + (k+\pi)\frac{\partial\mu}{\partial w} \qquad (73)\\ &+ \{(h+\mu)\xi - \zeta\cos\lambda\}\frac{\partial S}{\partial w} + \{(h+\mu)\eta - \zeta\sin\lambda\}\frac{\partial T}{\partial w} - (h+\mu)\varkappa'\\ &+ \{(k+\pi+\varkappa\zeta)\sin\lambda - (h+\mu)(\varkappa\eta + T)\}\,\alpha'\\ &+ \{(k+\pi+\varkappa\zeta)\cos\lambda - (h+\mu)(\varkappa\xi + S\}\,\beta'\sin\alpha\\ &+ \{(k+\pi)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + [\zeta\sin\lambda - (h+\mu)\eta]S + [(h+\mu)\xi - \zeta\cos\lambda]T\}\,\beta'\cos\alpha\end{aligned}$$

(74)

$$0 = \left\{\varrho\left(h+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)+\zeta\left(\frac{\partial k}{\partial h}-\frac{\partial\pi}{\partial\mu}\right)\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\varrho\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w}+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial k}{\partial h}\frac{\partial\mu}{\partial w}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial k}{\partial w}-\frac{\partial\pi}{\partial w}\right)+\left(\xi\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}+\zeta\sin\lambda\right)\frac{\partial S}{\partial w}+\left(\eta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}-\zeta\cos\lambda\right)\frac{\partial T}{\partial w}-\varkappa'\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$$

$$+\left\{\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial k}{\partial h}\sin\lambda-\varkappa\eta-T\right)+(\varrho+\varkappa\zeta)\cos\lambda\right\}\alpha'$$

$$+\left\{\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial k}{\partial h}\cos\lambda-\varkappa\xi-S\right)-(\varrho+\varkappa\zeta)\sin\lambda\right\}\beta'\sin\alpha$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}-\zeta\right)\frac{\partial k}{\partial h}-(h+\mu)\varrho+\left(\zeta\cos\lambda-\eta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)S+\left(\zeta\sin\lambda\right.\right.$$

$$\left.\left.+\xi\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)T\right\}\beta'\cos\alpha$$

Der Kürze wegen ist hier $\frac{\partial\pi}{\partial\mu}$ statt $\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}:\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ geschrieben.

6. Reduction im besondern Falle.

Um den in N. XIII. erwähnten Fall, wo x_1, y_1, z_1, also auch x, y, z in Constante oder in Functionen von w übergehen, auszuschliessen, behandeln wir diejenigen Flächen, bei welchen er allein eintreten kann, d. i. wo k ganze Function 2. Grades von h ist, besonders, und setzen

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\varepsilon}{2}h^2+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 \\ \pi &= \sigma-\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\mu^2+\frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right)+\varepsilon_1\mu-\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi\cos\lambda+P\sin\lambda &= \int\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\,\partial\cos\lambda \\ \Pi\sin\lambda-P\cos\lambda &= \int\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\,\partial\sin\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

und $\varkappa+\varepsilon$ statt $\varkappa$: dann wird

$$\varrho = \sigma-\varepsilon\zeta$$

$$S = (\Pi-\varepsilon\mu+\varepsilon_1)\cos\lambda+\left(P+\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\sin\lambda$$

$$T = (\Pi-\varepsilon\mu+\varepsilon_1)\sin\lambda-\left(P+\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)\cos\lambda$$

$$x_1 = \frac{\sigma\xi}{\zeta} - \Pi\cos\lambda - P\sin\lambda$$

$$y_1 = \frac{\sigma\eta}{\zeta} - \Pi\sin\lambda + P\cos\lambda$$

$$z_1 = \frac{\sigma}{\zeta} + \varkappa$$

Wir haben jetzt bloss den Wert $\sigma = 0$, wo x_1, y_1, z_1 Functionen von w allein werden, auszuschliessen. Diese Werte von x_1, y_1, z_1 sind unabhängig von ε, ε_1, ε_2 und gehen aus den allgemeinen hervor, wenn ε, ε_1, ε_2, das ist wenn k verschwindet. Setzt man also in den Bedingungsgleichungen (72) $k = 0$, so resultiren diejenigen, welche dem Werte (75) entsprechen, nämlich:

$$0 = \sigma\frac{\partial h}{\partial w} - (h+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial w} + \varkappa'\right) + \sigma\frac{\partial\mu}{\partial w} + \{(h+\mu)^2 - \zeta\}\frac{\partial\Pi}{\partial w} \tag{77}$$
$$-(h+\mu)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial P}{\partial w} + \{\sigma + \varkappa[\zeta - (h+\mu)^2] - (h+\mu)\Pi\}(\alpha'\sin\lambda + \beta'\sin\alpha\cos\lambda)$$
$$-(h+\mu)\left(\varkappa\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - P\right)(\alpha'\cos\lambda - \beta'\sin\alpha\sin\lambda)$$
$$+\left\{\sigma\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + [\zeta - (h+\mu)^2]P - (h+\mu)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\Pi\right\}\beta'\cos\alpha$$

$$0 = \left\{\sigma\left(h+\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right) - \zeta\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial w} + \sigma\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w} - \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial w} + \varkappa'\right)$$
$$+(h+\mu)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial\Pi}{\partial w} + \left\{\zeta - \left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\frac{\partial P}{\partial w} - \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\{\varkappa(h+\mu) + \Pi\}(\alpha'\sin\lambda$$
$$+\beta'\sin\alpha\cos\lambda)$$
$$+\left\{\sigma + \varkappa\left(\zeta - \frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}P\right\}(\alpha'\cos\lambda - \beta'\sin\alpha\sin\lambda)$$
$$+\left\{-(h+\mu)\sigma + \left(\zeta - \frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right)\Pi - (h+\mu)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}P\right\}\beta'\cos\alpha$$

Die erstere hat nach Division durch σ, welches nicht constant null sein soll, in Bezug auf die von u abhängigen Grössen die Form:

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\delta}{2}h^2 + \delta_1 h + \delta_2 \tag{78}$$

Setzt man für v einen Specialwert, so werden δ, δ_1, δ_2 reine Functionen von w. Führt man diesen Ausdruck in die allgemeine Gleichung (77) ein, so haben beide Gleichungen die Form $Ah^2 + Bh + C = 0$, und die 6 Coefficienten müssen einzeln verschwinden. Es ist jedoch einfacher, sie bzhw. auf die Form

$$A\,\{\zeta-(h+\mu)^2\}+B(h+\mu)+C=0$$
$$D\,\{\zeta-\left(\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right)^2\}+E(h+\mu)+F=0$$

zu bringen, indem man nur zu schreiben hat:

$$\frac{\partial h}{\partial w}=-\delta\,\{\zeta-(h+\mu)^2\}+(\delta_1-\delta\mu)(h+\mu)+\delta_2-\delta_1\mu + \frac{\delta}{2}\left(1+\mu^2+\frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right)$$

Dann zerfallen die zwei Gleichungen in die sechs folgenden:

$$0=\delta\sigma+\frac{\partial\Pi}{\partial w}-\varkappa(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda)-P\beta'\cos\alpha \tag{79}$$

$$0=(\delta\mu-\delta_1)\,\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial w}+\varkappa'+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial P}{\partial w}+\Pi(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda) + \left(\varkappa\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}-P\right)(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda)+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\Pi\beta'\cos\alpha \tag{80}$$

$$0=\left\{\frac{\delta}{2}\left(1+\mu^2+\frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right)-\delta_1\mu+\delta_2\right\}\sigma+\sigma\frac{\partial\mu}{\partial w} +\sigma(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda)+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sigma\beta'\cos\alpha \tag{81}$$

$$0=-\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\frac{\partial P}{\partial w}+\varkappa(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda)+\Pi\beta'\cos\alpha \tag{82}$$

$$0=\sigma\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial\Pi}{\partial w}-\varkappa\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda) -\left(\sigma+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}P\right)\beta'\cos\alpha \tag{83}$$

$$0=\left(\sigma\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\sigma\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w}-\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial w}+\varkappa'\right) -\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\Pi(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda)+\left(\sigma+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}P\right)(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda) \tag{84}$$

Eliminirt man $\frac{\partial\Pi}{\partial w}$ zwischen (79) und (83) und $\frac{\partial P}{\partial w}$ zwischen (80) und (82), so kommt nach Division durch σ:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w}=\delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}+\beta'\cos\alpha \tag{85}$$

$$0=(\delta\mu-\delta_1)\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial w}+\varkappa'+\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\Pi(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda) -P(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda) \tag{86}$$

Dies mit $\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ multiplicirt und zu (84) addirt giebt nach Division durch σ:

$$0=\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial w}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda\,\partial w}+\delta\mu-\delta_1+\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda \tag{87}$$

Dies ist aber nur die Derivation der Gleichung

$$0=\frac{\partial\mu}{\partial w}+\frac{\delta}{2}\left(1+\mu^2+\frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right)-(\delta_1\mu+\delta_2)+\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha \tag{88}$$
$$+\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda$$

welche nach Division durch σ aus (81) hervorgeht. Demnach ist (84) Folge der übrigen Gleichungen.

Differentiirt man die Gl. (76) nach λ, so kommt:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda}\cos\lambda+\frac{\partial P}{\partial\lambda}\sin\lambda-\Pi\sin\lambda+P\cos\lambda=-\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\sin\lambda$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda}\sin\lambda-\frac{\partial P}{\partial\lambda}\cos\lambda+\Pi\cos\lambda+P\sin\lambda=\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\cos\lambda$$

woraus:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda}=-P;\quad \frac{\partial P}{\partial\lambda}=\Pi-\frac{\partial\sigma}{\partial\mu} \tag{89}$$

Differentiirt man hiernach die Gl. (86) so kommt:

$$0=\delta\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}-\frac{\partial P}{\partial w}+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}-\Pi\right)\beta'\cos\alpha-\varkappa(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda)$$

das ist durch (85) identisch mit (82), und giebt aufs neue differentiirt:

$$0=\delta\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial\Pi}{\partial w}+\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+P\right)\beta'\cos\alpha$$
$$+\varkappa(\alpha'\sin\lambda+\beta'\sin\alpha\cos\lambda)$$

und nach Addition zu (79):

$$0=\delta\left(\sigma+\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\beta'\cos\alpha \tag{90}$$

Differentiirt man ferner Gl. (86) nach λ, so kommt:

$$0=\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda\,\partial w}+\left(\delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}+\beta'\cos\alpha\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}+\left\{\delta\left(\mu+\frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\right)-\delta_1\right\}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}$$
$$+(\alpha'\cos\lambda-\beta'\sin\alpha\sin\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}+\delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\sigma$$

Subtrahirt man hiervon die mit $\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$ multiplicirte Gl. (90), so findet man nach Division durch $\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}$ die Gl. (87). Dies ist das dritte identische Resultat. Folglich bleiben von den sechs Gleichungen nur drei zu erfüllen; zusammen mit (78) sind es die folgenden vier:

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\delta}{2}h^2 + \delta_1 h + \delta_2 \tag{78}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w} = \delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \beta'\cos\alpha \tag{85}$$

$$0 = \frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\delta}{2}\left(1 + \mu^2 + \frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right) - \delta_1\mu + \delta_2 + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\beta'\cos\alpha \tag{88}$$
$$+ \alpha'\cos\lambda - \beta'\sin\alpha\sin\lambda$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\beta'\cos\alpha + \delta\left(\sigma + \frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}\right) \tag{90}$$

welche die 4 Functionen h, λ, μ, σ bestimmen.

Betrachtet man jetzt μ und σ als Functionen von (v, w) und bezeichnet die Differentiation für constantes v durch Klammern, so ist nach (85)

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial w}\right) = \frac{\partial\mu}{\partial w} + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \beta'\cos\alpha\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\left(\delta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + \beta'\cos\alpha\right)$$

und die Gl. (88) (90) gehen über in

$$0 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial w}\right) + \frac{\delta}{2}\left(1 + \mu^2 - \frac{\partial\mu^2}{\partial\lambda^2}\right) - \delta_1\mu + \delta_2 + \alpha'\cos\lambda - \beta'\sin\alpha\sin\lambda$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right) + \delta\left(\sigma + \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\right)$$

Mit ersterer verbinden wir die partielle Derivation der Gl. (88) nach λ, welche auf dieselbe Form gebracht lautet:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right) + (\delta\mu - \delta_1)\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} - (\alpha'\sin\lambda + \beta'\sin\alpha\cos\lambda)$$

Addirt man sie nach Multiplication mit i zu (91), so kommt:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial w}\left[\mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right]\right) + \frac{\delta}{2}\left[\mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right]^2 - \delta_1\left[\mu + i\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\right] + \delta_2 + \frac{\delta}{2}$$
$$+ (\alpha' - i\beta'\sin\alpha)e^{-i\lambda} \tag{92}$$

Sei

$$\partial w = \frac{\partial w_1}{\gamma_1 \delta}; \quad \mu + i\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \gamma - \vartheta + \frac{2}{\delta}\frac{\partial \varrho}{\varrho \partial w} \tag{93}$$

wo ϑ eine von w allein abhängige Speciallösung der Gl. (78) bezeichnet, so dass man hat:

$$\vartheta' = \frac{\delta \vartheta^2}{2} + \delta_1 \vartheta + \delta_2 \tag{94}$$

Dies in Gl. (92) eingeführt giebt:

$$0 = \gamma' + \frac{\delta}{2}(1 + \gamma^2 - 2\gamma\vartheta) - \delta_1\gamma + 2\gamma_1\left(\frac{\gamma_1'}{\gamma_1} + \delta\gamma - \delta\vartheta - \delta_1\right)\frac{\partial \varrho}{\varrho \partial w_1}$$
$$+ 2\gamma_1^2 \delta \frac{\partial^2 \varrho}{\varrho \partial w_1^2} + (\alpha' - i\beta' \sin\alpha)e^{-i\lambda} \tag{95}$$

Wir betrachten nun γ, ϑ statt δ_1, δ_2 als willkürlich und verfügen über letztere und über γ_1 so, dass Gl. (94) erfüllt wird, und die erste Zeile des Ausdrucks (95) verschwindet. Dies giebt die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\gamma'}{\gamma} + \delta\left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma} - \vartheta\right) \\ \delta_2 &= \vartheta' + \left\{\frac{\delta}{2}\left(\vartheta - \frac{1+\gamma^2}{\gamma}\right) - \frac{\gamma'}{\gamma}\right\}\vartheta \\ \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} &= \frac{\gamma'}{\gamma} + \delta\frac{1-\gamma^2}{2\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

und Gl. (95) lautet:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\varrho \partial w_1^2} = -\frac{\alpha' - i\beta' \sin\alpha}{2\gamma_1^2 \delta} e^{-i\lambda} \tag{97}$$

Gl. (78) lässt sich jetzt erfüllen durch

$$h = \vartheta + \frac{w_2}{u_0 + w_0} \tag{98}$$

wo u_0 Function von u; w_0, w_2 von w ist. Die Einsetzung ergiebt mit Rücksicht auf (94):

$$\frac{w_2'}{u_0 + w_0} - \frac{w_2 w_0'}{(u_0 + w_0)^2} = \frac{\delta\vartheta w_2}{u_0 + w_0} + \frac{\delta_1 w_2^2}{(u_0 + w_0)^2} + \frac{\delta_1 w_2}{u_0 + w_0}$$

Damit dies unabhängig von u gilt, muss sein

$$\frac{w_2'}{w_2} = \delta\vartheta + \delta_1 = \frac{\gamma'}{\gamma} + \delta\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}; \quad w_0' = -\frac{\delta}{2}w_2$$

Hiernach ist

$$h = \vartheta + \frac{\gamma e^{\int \delta \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \partial w}}{u_0 - \frac{1}{2} \int \gamma \delta \partial w e^{\int \delta \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \partial w}} \tag{98}$$

Ferner sei

$$\varrho = r e^{i\varphi} \tag{99}$$

Es würde nichts zur Allgemeinheit beitragen, wenn wir auch γ und ϑ complex nähmen, weil sich die Anzahl der Bestimmungsgleichungen um ebensoviel vermehrte als die der eingeführten Functionen von w. Sind also γ und ϑ reell, so zerfällt die 2te Gl. (93) in

$$\mu = \gamma - \vartheta + \frac{2}{\delta} \frac{\partial r}{r \partial w}; \quad \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \frac{2}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \tag{100}$$

Erstere Gleichung nach v differentiirt giebt:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{2}{\delta} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial r}{r \partial w}$$

Vermöge der zweiten wird sie und Gl. (85):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial r}{r \partial w}; \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial w} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \beta' \cos \alpha$$

daher nach Integration:

$$\lambda = 2\varphi + \int \partial \beta \cos \alpha + V \tag{101}$$

Dies nach v differentiirt giebt nach dem Vorigen:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial r}{r \partial w} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial w} + V' \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial v \partial w_1} = \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + V' \right) \frac{\partial \varphi}{\partial w_1} \tag{102}$$

Ausser dieser hinzutretenden Bedingungsgleichung sind r, φ noch bestimmt durch Gl. (96), welche nach Einführung der Werte (99) und (101) lautet:

$$\frac{\partial^2 r}{r \partial w_1^2} + 2i \frac{\partial r}{r \partial w_1} \frac{\partial \varphi}{\partial w_1} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_1^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w_1} \right)^2 = w_3 e^{i(w_4 - 2\varphi - V)}$$

wo zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} w_3 \cos w_4 &= \frac{-\alpha' \cos \int \partial \beta \cos \alpha + \beta' \sin \alpha \sin \int \partial \beta \cos \alpha}{2 \gamma_1^2 \delta} \\ w_3 \sin w_4 &= \frac{\alpha' \sin \int \partial \beta \cos \alpha + \beta' \sin \alpha \cos \int \partial \beta \cos \alpha}{2 \gamma_1^2 \delta} \end{aligned} \right\} \tag{103}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w_1} = -\frac{2v_2}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}$$

Bildet man aus beiden $\partial\lambda$ und integrirt, so kommt:

$$\lambda = \int\frac{\partial v_1}{v_2} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{v_1+w_1}{v_2} \tag{111}$$

Das erste Integral der Gl. (90) ist für $\alpha = 0$ schon in (86) gegeben, nämlich

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial w}\right) + (\delta\mu - \delta_1)\sigma + \varkappa' = 0$$

durch deren Integration man leicht erhält:

$$\sigma = -e^{-\int(\delta\mu-\delta_1)\partial w}\left\{v_3 + \int\partial\varkappa\, e^{\int(\delta\mu-\delta_1)\partial w}\right\}$$

Nun ist nach (93) (96) (109)

$$\begin{aligned}\int(\delta\mu-\delta_1)\partial w &= \int\{\delta(\gamma-\vartheta)-\delta_1\}\,\partial w + 2\int\frac{v_1+w_1}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}\,\partial w_1\\ &= \log\{v_1+w_1)^2+v_2^2\} - \log\gamma_1\end{aligned}$$

folglich

$$\sigma = -\gamma_1\frac{v_3 + \int\frac{\partial\varkappa}{\gamma_1}\{(v_1+w_1)^2+v_2^2\}}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}$$

Es bleibt noch übrig, die Werte von h, λ, μ, σ in einige Ausdrücke einzuführen. Nach (98) (109) ist

$$h + \mu = \gamma + \frac{w_2}{u_0+w_0} + 2\gamma_1\frac{v_1+w_1}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}$$

also nach (110)

$$\begin{aligned}2\zeta = 1 + \left(\gamma+\frac{w_2}{u_0+w_0}\right)^2 + 4\gamma_1\left(\gamma+\frac{w_2}{u_0+w_0}\right)^2\frac{v_1+w_1}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}\\ + \frac{4\gamma_1^2}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}\end{aligned}$$

ferner nach (111), wenn $\partial v_1 = v_2\partial v_0$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{\{v_2^2-(v_1+w_1)^2\}\cos v_0 + 2v_2(v_1+w_1)\sin v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}\\ \sin\lambda &= \frac{\{v_2^2-(v_1+w_1)^2\}\sin v_0 - 2v_2(v_1+w_1)\cos v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2^2}\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

also

$$\xi = \frac{\left[\left(\gamma + \frac{w_2}{u_0+w_0}\right)\{v_2{}^2 - (v_1+w_1)^2\} - 2\gamma_1(v_1+w_1)\right]\cos v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2{}^2}$$
$$+ \frac{2v_2\left[\left(\gamma + \frac{w_2}{u_0+w_0}\right)(v_1+w_1)+\gamma_1\right]\sin v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2{}^2}$$

$$\eta = \frac{\left[\left(\gamma + \frac{w_2}{u_0+w_0}\right)\{v_2{}^2 - (v_1+w_1)^2\} - 2\gamma_1(v_1+w_1)\right]\sin v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2{}^2}$$
$$- \frac{2v_2\left[\left(\gamma + \frac{w_2}{u_0+w_0}\right)(v_1+w_1)+\gamma_1\right]\cos v_0}{(v_1+w_1)^2+v_2{}^2}$$

Endlich sind noch die Werte von Π, P zu entwickeln. Setzt man zur Abkürzung

$$R = (v_1+w_1)^2+v_2{}^2; \quad S = v_3 + \int \frac{R\partial\varkappa}{\gamma_1}$$

so wird

$$\sigma = -\frac{\gamma_1 S}{R}; \quad \frac{\partial\mu}{\partial\lambda} = -\frac{2\gamma_1 v_2}{R}$$

daher

$$\int \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\partial\cos\lambda = -\tfrac{1}{2}\int \frac{R\sin\lambda}{v_2}\partial\frac{S}{R} = -\frac{S\sin\lambda}{2v_2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{S}{R}\partial\frac{R\sin\lambda}{v_2}$$

Nun ist nach (112)

$$\frac{R\sin\lambda}{v_2} = \left\{v_2 - \frac{(v_1+w_1)^2}{v_2}\right\}\sin v_0 - 2(v_1+w_1)\cos v_0$$

Dies differentiirt giebt mit Rücksicht auf $\partial v_1 = v_2\partial v_0$:

$$\partial\frac{R\sin\lambda}{v_2} = -R\partial\frac{\sin v_0}{v_2}$$

und man erhält:

$$\int \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\partial\cos\lambda = -\frac{S\sin\lambda}{2v_2} - \tfrac{1}{2}\int S\partial\frac{\sin v_0}{v_2}$$

Setzt man $v_0 - \frac{\pi}{2}$ für v_0, so folgt:

$$\int \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\partial\sin\lambda = \frac{S\cos\lambda}{2v_2} + \tfrac{1}{2}\int S\partial\frac{\cos v_0}{v_2}$$

Sei

$$\varkappa_0 = \int \frac{\partial \varkappa}{\gamma_1}; \quad \varkappa_1 = \int \frac{w_1 \partial \varkappa}{\gamma_1}; \quad \varkappa_2 = \int \frac{w_1^2 \partial \varkappa}{\gamma_1}$$

dann wird:

$$S = v_3 + \varkappa_0 (v_1^2 + v_2^2) + 2\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2,$$

$$\int S \partial \frac{\sin v_0}{v_2} = \frac{S \sin v_0}{v_2} - \int \frac{\sin v_0}{v_2} \partial v_3 - 2\varkappa_0 \int \sin v_0 \left(\frac{v_1}{v_2} \partial v_1 + \partial v_2 \right)$$
$$- 2\varkappa_1 \int \sin v_0 \partial v_0$$

Nun ist

$$\int \sin v_0 \left(\frac{v_1}{v_2} \partial v_1 + \partial v_2 \right) = \int \sin v_0 (v_1 \partial v_0 + \partial v_2)$$
$$= v_2 \sin v_0 - v_1 \cos v_0 - \int v_2 \cos v_0 \partial v_0 + \int \cos v_0 \partial v_1$$
$$= v_2 \sin v_0 - v_1 \cos v_0$$

also

$$\int S \partial \frac{\sin v_0}{v_2} = \int v_3 \partial \frac{\sin v_0}{v_2} + \frac{\varkappa_0 (v_1^2 - v_2^2) + 2\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2}{v_2} \sin v_0$$
$$+ 2(\varkappa_0 v_1 + \varkappa_1) \cos v_0$$

Es bleibt noch über die willkürlichen Functionen Anordnung zu treffen. Da u nur in u_0 vorkommt, so kann man u für u_0 schreiben Ebenso schreiben wir v statt v_0, demzufolge dann $v_2 = v_1'$ wird. Endlich wollen wir w überall auf w_1 reduciren und dann w statt w_1 schreiben, wobei zugleich δ ganz wegfällt. Die Relationen der Functionen von w werden dann:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{2} \int \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \partial w; \quad \log w_2 = \log \gamma + \int \frac{1 + \gamma^2}{2\gamma\gamma_1} \partial w;$$
$$w_0 = -\tfrac{1}{2} \int \frac{w_2 \partial w}{\gamma_1}$$

$$\varkappa_0 = \int \frac{\partial \varkappa}{\gamma_1}; \quad \varkappa_1 = \int \frac{w \partial \varkappa}{\gamma_1}; \quad \varkappa_2 = \int \frac{w^2 \partial \varkappa}{\gamma_1}$$

und γ, $\varkappa$ sind die einzigen willkürlichen Functionen von w.

Die Gleichungen des orthogonalen Flächensystems sind jetzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{\gamma_1 S \xi}{R\zeta} + \frac{S \sin \lambda}{2v_1'} - P \\ y &= -\frac{\gamma_1 S \eta}{R\zeta} - \frac{S \cos \lambda}{2v_1'} - Q \\ z &= -\frac{\gamma_1 S}{R\zeta} + \varkappa \end{aligned} \right\} \qquad (113)$$

wo

$$S = v_3 + \varkappa_0(v_1^2 + v_1'^2) + 2\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2 \tag{114}$$

$$R = (v_1 + w)^2 + v_1'^2 \tag{115}$$

$$2\zeta = 1 + \left(\gamma + \frac{w_2}{u + w_0}\right)^2 + 4\gamma_1\left(\gamma + \frac{w_2}{u + w_0}\right)\frac{v_1 + w}{R} + \frac{4\gamma_1^2}{R} \tag{116}$$

$$\xi = \frac{R_1 \cos v + R_2 \sin v}{R}; \qquad \eta = \frac{R_1 \sin v - R_2 \cos v}{R} \tag{117}$$

$$R_1 = \left(\gamma + \frac{w_2}{u + w_0}\right)\{v_1'^2 - (v_1 + w)^2\} - 2\gamma_1(v_1 + w)$$

$$R_2 = 2v_1'\left\{\left(\gamma + \frac{w_2}{u + w_0}\right)(v_1 + w) + \gamma_1\right\}$$

$$\cos\lambda = \frac{\lambda_1 \cos v + \lambda_2 \sin v}{R}; \qquad \sin\lambda = \frac{\lambda_1 \sin v - \lambda_2 \cos v}{R} \tag{118}$$

$$\lambda_1 = v_1'^2 - (v_1 + w)^2; \qquad \lambda_2 = 2v_1'(v_1 + w)$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\int v_3 \partial \frac{\sin v}{v_1'} + \frac{\varkappa_0(v_1^2 - v_1'^2) + 2\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2}{2v_1'}\sin v + (\varkappa_0 v_1 + \varkappa_1)\cos v \\ Q &= -\tfrac{1}{2}\int v_3 \partial \frac{\cos v}{v_1'} - \frac{\varkappa_0(v_1^2 - v_1'^2) + 2\varkappa_1 v_1 + \varkappa_2}{2v_1'}\cos v + (\varkappa_0 v_1 + \varkappa_1)\sin v \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

gesetzt ist, und wo v_1, v_3 willkürliche Functionen von v, und γ, $\varkappa$ von w bezeichnen.

Beispiele. Sei γ constant; dann wird

$$\gamma_1 = \frac{1 - \gamma^2}{2\gamma} w; \quad w_2 = \gamma w^{\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}}; \quad w_0 = -\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} w^{\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}}$$

insbesondere für $\gamma = 3^{-\frac{1}{2}}$

$$\gamma_1 = \frac{w}{\sqrt{3}}; \quad w_2 = \frac{w^2}{\sqrt{3}}; \quad w_0 = -\frac{w^2}{4}$$

für $\gamma = 2^{-\frac{1}{2}}$

$$\gamma_1 = \frac{w}{2\sqrt{2}}; \quad w_2 = \frac{w^3}{\sqrt{2}}; \quad w_0 = \frac{w^3}{3}$$

Für $\varkappa = \text{const}$ verschwinden $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Für $\varkappa = c\gamma_1 w$ wird

$$\varkappa_0 = 2cw; \quad \varkappa_1 = cw^2; \quad \varkappa_2 = \tfrac{2}{3}cw^3$$

Sei $v_1 = b\cos v$; $v_3 = a$; dann wird

$$S = a + \varkappa_0 b^2 + 2\varkappa_1 b \cos v + \varkappa_2$$

$$R = b^2 + 2bw\cos v + w^2$$

$$\cos\lambda = -\frac{(b^2+w^2)\cos v + 2bw}{R}; \quad \sin\lambda = \frac{b^2-w^2}{R}\sin v$$

$$P = \frac{\varkappa_0 b^2 - \varkappa_2}{2}; \qquad Q = \frac{(a+\varkappa_0 b^2+\varkappa_2)\cos v + 2\varkappa_1 b}{2\sin v}$$

Entsprechend dem Falle $\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $\varkappa = 0$, $v_1 = b\cos v$, $v_3 = a$ wird das orthogonale Flächensystem:

$$x = \frac{a}{2}\,\frac{4u-w^2}{b^2+w^2+2bw\cos v}\left\{\frac{w^2-b^2}{b}\right.$$

$$\left. + w\,\frac{[(4u+3w^2)b^2+(12u+w^2)w^2]\cos v + 2(4u^2+w^2)bw}{(16u^2+3w^4)b^2+(48u^2+w^4)w^2+(48u^2+8uw^2+3w^4)bw\cos v}\right\}$$

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{(4u-w^2)w\sin v}{b^2+w^2+2bw\cos v}\left\{-2\right.$$

$$\left. + \frac{(12u+w^2-(4u+3w^2)b^2}{(16u^2+3w^4)b^2+(48u^2+w^4)w^2+(48u^2+8uw^2+3w^4)bw\cos v}\right\}$$

$$z = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{3}.w(4u-w^2)^2}{(16u^2+3w^4)b^2+(48u^2+w^4)w^2+(48u^2+8uw^2+3w^4)bw\cos v}$$

Aehnliche Ausdrücke findet man bei Anwendung der übrigen aufgestellten Werte.

XXIV.

Ueber sphärische Curven.

Von

Siegmund Günther.

I.

§. 1. Die Absicht der folgenden Zeilen ist es darzutun, mit wie einfachen Mitteln viele Eigenschaften sphärischer Curven sich untersuchen lassen, und zwar besteht der Gang, welchen wir einschlagen wollen, im Wesentlichen darin, gewisse Sätze, deren Gültigkeit für ebene Figuren bereits nachgewiesen ist, durch unmittelbare Projection auf die Kugelfläche zu übertragen. Wir werden so auf höchst naturgemässe Weise einige Theoreme gewinnen, welche, so nahe sie auch liegen mögen, gleichwol bisher nicht bemerkt oder doch wenigstens nicht ausdrücklich hervorgehoben worden zu sein scheinen.

Ein einfaches Beispiel möge die Vorteile dieser Methode darlegen. Indem Chasles[1]) die Untersuchungen von Fuss über die sphärische Ellipse bespricht, welche ebenso wie die entsprechende ebene Curve durch einen in zwei Punkten festgehaltenen gespannten Faden beschrieben werden kann, bemerkt er: „Die analytischen Formeln, welche Fuss anwendet, führen zu dem merkwürdigen Resultat, dass, wenn die Länge des Fadens gleich der halben Peripherie der Kugel ist, die beschriebene Curve immer ein grösster Kreis ist, welche auch die Distanz der beiden Brennpunkte sein mag". Erinnern wir uns daran, dass der Durchschnitt eines elliptischen Kegels mit einer concentrischen Kugel stets eine sphärische Ellipse liefert, so brauchen wir

nur jenen Kegel in eine durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgehende Ebene degeneriren zu lassen, um sofort jene Tatsache zu erkennen.

Die Uebertragung von Eigenschaften ebener Figuren auf dem Raum kann bekanntlich auf mehrfache Art geschehen, dem ebenen Dreieck entspricht so einerseits das sphärische Dreieck, andererseits das Tetraëder, letzteres freilich nur in gewissem Sinne. Es werden demgemäss auch die beiden nach Pascal und Brianchon benannten Fundamentaltheoreme der Kegelschnittslehre eine solche doppelte allgemeinere Auffassung gestatten. Für erstres hat F. Klein [2]) diese Uebertragung vorgenommen und ein einem Ellipsoid eingeschriebenes windschiefes Sechseck in Betracht gezogen. Es hat sich jedoch dabei herausgestellt, dass dieser Verallgemeinerung nur dann ein bestimmter Sinn unterliegt, wenn man unsre gewöhnliche Massbestimmung verlässt und in jenem Ellipsoïd die Cayley'sche Fundamentalfläche erblickt.

Die andre Uebertragungsweise bedarf dieses Hülfsmittels nicht. Wir werden auf diese nunmehr näher eingehen und hiebei uns ausschliesslich rein-geometrischer Betrachtungen bedienen.

1) Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, Halle 1839. S. 233. Anmerk.

2) J. Klein, Ueber eine Ausdehnung des Pascal'schen Satzes auf den Raum, Sitzungsber. d. Erlanger phys.-medicin. Societät, November 1873.

§. 2. Wir stellen folgende Lehrsätze auf:

a) Verbindet man sechs Punkte eines sphärischen Kegelschnitts durch Bögen grösster Kreise in beliebiger Reihenfolge und verlängert je zwei gegenüberliegende Bögen bis zu ihren Durchschnittspunkte, so liegen die so erhaltenen drei Punkte auf einem grössten Kreis.

b) Construirt man zu sechs Punkten eines sphärischen Kegelschnitts die tangirenden Hauptkreise, so schneiden sich dieselben in sechs Punkten, welche drei verbindende Haudtkreise bestimmen. Dieselben schneiden sich in einem Punkt.

Beweis zu a) Es seien A, B, C, D, E, F die sechs Punkte des Kegelschnitts, durch deren entsprechende Verbindung somit das sphärische Sechseck $ABCDEF$ entsteht. Man construire den Kegel, dessen Krümmungslinie jener Kegelschnitt ist, und der im Centrum M der Kugel seine Spitze hat. Zieht man MA, MB, MC, MD, ME, MF, so sind diese Geraden

sämmtlich Seitenlinien des Kegels. Durchschneidet man hierauf den Kegel durch eine willkürliche Ebene, so wird dem sphärischen Sechseck das ebene Kegelschnitts-Sechseck $abcdef$ entsprechen. Verlängert man je zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks, so schneiden sich dieselben in drei Punkten g, h, k, welche nach dem Pascal'schen Satze auf einer Geraden liegen. Zieht man gM, hM, kM, so schneiden diese Linien entsprechend verlängert, die Kugelfläche in drei Punkten G, H, K, und da offenbar diese Geraden in einer Ebene liegen, so ist dies auch für die Punkte G, H, K der Fall, d. h. dieselben liegen auf einem grössten Kreise. Dieselben Punkte liegen aber auch bezüglich auf den Durchschnittslinien der Ebenen abM und deM, bcM und efM, cdM und faM; diese Ebenen schneiden auf der Kugelfläche die grössten Kreise AB, DE; BC, EF; CD, FA aus, und sonach ist G, H, K bezüglich der Durchschnittspunkt von AB und DE, BC und EF, CD und FA. Hiermit ist aber unser Satz bewiesen.

Beweis zu b) Es seien in den sechs Punkten A, B, C, D, E, F eines sphärischen Kegelschnitts die berührenden Hauptkreise an diesen gezogen, welche sich successive in den Punkten G, H, K, L, N, P schneiden mögen, so dass ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Sechseck $GHKLNP$ entsteht. Man verbinde jeden dieser Punkte ebenso wie jeden Umfangspunkt des Kegelschnittes mit dem Kugelcentrum M und durchschneide den durch letzteren Prozess erhaltnen Kegel zweiter Ordnung durch eine beliebige Ebene; die Durchschnittsfigur ist ein Kegelschnitt. Legt man hierauf durch je zwei aufeinanderfolgende der Geraden GM, HM, KM, LM, NM, PM Ebenen, so berühren diese Ebenen sowol den sphärischen Kegelschnitt bezüglich in den Punkten A, B, C, D, E, F, als auch den ebenen in den entsprechenden Punkten a, b, c, d, e, f, während die Berührungskreise des erstren sich in der Durchschnittsebene als sechs lineare Tangenten projiciren werden, deren Durchschnittspunkte g, h, k, l, m, n, p bezüglich mit den Punkten G, H, K, L, M, N, P und dem Kugelcentrum in einer Geraden liegen. Zieht man die drei Geraden gl, hm, kp, so schneiden sich dieselben zufolge des Brianchon'schen Lehrsatzes in einem Punkt x, und projicirt man diesen Punkt aus M auf die Kugelfläche nach X, so schneiden sich in diesem ersichtlich die drei grössten Kreise GL, HN und KP, d. h. die drei Diagonalkreise des Berührungssechsecks $GHKLNP$.

Mit Rücksicht auf das Vorstehende sind wir offenbar berechtigt, von einem sphärischen Analogon der Sätze von Pascal und Brianchon zu sprechen. Es steht sogar nichts im Wege, noch einen Schritt weiter zu gehen und unter Festhaltung des Beweisganges folgenden Satz auszusprechen: Markirt man auf dem Umfang einer auf einem dreiaxigen Ellipsoïd gelegenen Ellipse sechs Punkte und legt durch je zwei aufeinanderfolgende dieser Punkte und den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene, so entstehen folgeweise sechs Schnittpunkte. Legt man durch je zwei gegenüberliegende Punkte und den Mittelpunkt Ebenen, so schneiden diese auf der Fläche drei Ellipsen aus, deren Schnittpunkte auf ein und derselben Mittelpunkts-Ellipse liegen.

Anmerkung. Es ist hiebei offenbar nötig, dass die zusammengehörigen Schnittpunkte der nämlichen Halbkugel, resp. dem nämlichen Halbellipsoïd angehören.

§. 3. Es dürfte sich aus dem bisher Gesagten wol bereits ergeben, dass das hier benützte Verfahren einer allgemeineren Anwendung im hohen Grade fähig ist. Suchen wir den Spielraum und die Grenzen desselben zu fixiren, so werden wir dies am besten tun, wenn wir sagen, dass dasselbe überall da seine Anwendung findet, wo es sich um Discussion eines sphärisch-centrischen Gebildes handelt, und wo es nicht auf rechnende Vergleichung von Grössen ankommt. Von den zahlreichen Sätzen, welche Salmon aufführt, würden viele in dies Gebiet gehören, wie wir an einigen Beispielen [3]) zeigen wollen.

Lehrsatz. Die Verbindungslinie eines Punktes eines sphärischen Kegelschnitts mit den beiden Brennpunkten schliesst mit der Tangente an jenem Punkt gleiche Winkel ein.

Lehrsatz. Die Focalstrahlen zweier Punkte einer sphärischen Hyperbel bilden ein sphärisches Viereck, welches einem kleinen Kugelkreise umgeschrieben ist.

Die Beweise dieser beiden Sätze ergeben sich unmittelbar durch Projection, wenn man nur die Durchschnittsebene des Kegels entsprechend wählt.

Anmerkung. In Bezug auf den zweiten Satz scheint bei Salmon ein Versehen insoweit obzuwalten, als derselbe dort für einen beliebigen sphärischen Kegelschnitt allemein ausgesprochen ist. Allerdings besteht ein genereller Unterschied zwischen sphärischen Ellipsen und Hyperbeln nicht; allein der obige Satz hat auch nur so lange Geltung, als die beiden Brennpunkte zweien getrennten Zweigen des Kegel-

schnitts angehören, so lange also, wie wir uns oben ausdrückten, von einer sphärischen Hyperbel die Rede ist. Um die Unmöglichkeit bei der sphärischen Ellipse einzusehen, brauchen wir das von den Focalstrahlen gebildete Viereck nur in ein sphärisches Parallelogramm nach Euler's [4]) Definition) übergehen zu lassen, in dem die eine Seite erheblich grösser ist, als die andre.

3) Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, deutsch v. Fiedler 1. Teil, Leipzig 1865. S. 319. S. 322.

4) Euler, Nova Acta Petropol. Tom. X. p. 57.

II.

§. 4. Die Bestimmung von Flächeninhalten sphärischer Figuren ist mit Hülfe der Infinitesimalrechnung leicht zu ermöglichen, jedoch auch in vielen Fällen elementar-geometrischen Betrachtungen zugänglich. Chasles registrirt die hieher gehörigen Bemühungen verschiedener Mathematiker mit folgenden Worten: „Quetelet hat auf der Kugel Polygone betrachtet, welche ohne Unterschied von Bögen grösster und kleiner Kreise gebildet sind, und hat zur Berechnung ihrer Oberflächen eine einfache und elegante Formel gegeben: eine Untersuchung, welche schon wiederholt die Geometer beschäftigt hatte; zuerst Courcier, von dem wir gesagt haben, dass er über gewisse Curven doppelter Krümmung geschrieben hat; sodann D'Alembert und Bossut, welche die Hülfsmittel der Analysis angewandt haben". Die Untersuchungen all dieser Gelehrten sind in schwer zugänglichen Werken enthalten, und es scheint in der Tat keine derartige allgemeine Formel in Deutschland Eingang gefunden zu haben, so dass es sich wol empfehlen wird, eine solche mit einfachen Hülfsmitteln herzustellen.

Die naturgemässeste Art, ein aus Bögen kleiner Kugelkreise bestehendes Polygon zu bestimmen, wird offenbar die sein, jeden einzelnen Eckpunkt auf ein willkürliches Coordinatensystem zu beziehen und noch dazu den sphärischen Radius jedes Begrenzungskreises anzugeben. Um einen festen Anhaltspunkt zu gewinnen, betrachten wir den Pol unsres sphärischen Systems als das Zenith Z (Fig. 1), legen den Höhenkreis, von dem aus die Azimuthe gezählt werden sollen, durch einen willkürlichen Eckpunkt A_1 unsres Polygons und haben dann als Coordinaten der Eckpunkte folgende

$$A_1\begin{cases} r = r_1 \\ v = 0 \end{cases} \quad A_2\begin{cases} r = r_2 \\ v = v_1 \end{cases} \cdots \quad A_p\begin{cases} r = r_p \\ v = v_{p-1} \end{cases} \quad \cdots \quad A_n\begin{cases} r = r_n \\ v = v_{n-1}; \end{cases}$$

indem wir allgemein durch r und v Zenithdistanz und Azimuth eines Punktes der Kugelfläche bezeichnen. Ferner möge

$$R_{p-1}$$

der sphärische Halbmesser des die beiden Punkte A_{p-1} und A_p verbindenden Kreises sein. Zugleich werde angenommen, dass das Polygon nach allen Seiten convex ist.

Wir verbinden zwei Eckpunkte etwa A_{p-1} und A_p mit dem Zenith durch Hauptkreise und bestimmen den Flächeninhalt dieses gemischtlinigen Dreiecks $A_p Z' A_{p-1}$. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns folgenden Satzes: Versteht man unter der Polarcurve irgend einer sphärischen Curve den geometrischen Ort der Pole aller sphärischen Geraden, welche jene Curve berühren, so ist der Inhalt der erstren Curve gleich dem Umfang der letztren, subtrahirt von 2π. Einen elementaren Beweis dieses Theorems hat Böklen [6]) gegeben.

Wir haben uns nun zu fragen, was wir unter der Polarfigur eines eines solchen gemischtlinigen Dreiecks zu verstehen haben. Die Polargebilde der beiden grössten Kreise reduciren sich ersichtlich auf Punkte, d. h. auf ihre Pole, und es bleibt somit nur die Polarfigur des Kreisbogens $A_{p-1}A_p$ übrig, welche einem um 90^0 von jenem abstehenden kleinen Kugelkreise angehört. Um das entsprechende Stück zu finden, würde man blos die beiden Punkte A_{p-1} und A_p mit ihrem sphärischen Centrum M_p zu verbinden und diese beiden grössten Kreise zu verlängern haben, bis dieselben den Polarkreis bezüglich in den Punkten A'_{p-1} und A'_p schneiden. Alsdann ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A_p Z A_{p-1}$ gleich

$$2\pi - \text{arc.} \overline{A_{p-1}A'_p},$$

und erübrigt uns sonach blos noch die analytische Einkleidung dieses Ergebnisses.

5) Chasles, S. 235.

6) Böklen, Ueber die Winkelsumme in Dreiecken, gebildet aus Linien des Systems (a) oder aus geodätischen Linien, Grunert's Archiv 43. Teil. S. 18.

§. 5. Es handelt sich zunächst um die Bestimmung des Winkels $A_{p-1}M_{p-1}A_p$. Verbinden wir die beiden Punkte A_{p-1} und A_p durch einen grössten Kreis und nennen den so entstandenen Bogen x, so liefert zunächst das Dreieck $A_{p-1}ZA_p$ die Gleichung

$$\cos x = \cos r_{p-1} \cos r_p + \sin r_{p-1} \sin r_p \cos (v_{p-1} - v_{p-2})$$

Ist y der gesuchte Winkel $A_{p-1}M_{p-1}A_p$, so folgt aus diesem Dreieck sofort

$$\cos x = \cos^2 R_{p-1} + \sin^2 R_{p-1} \cos y,$$

und, mit Rücksicht auf die erste Gleichung,

$$\cos y = \frac{\cos r_{p-1} \cos r_p + \sin r_{p-1} \sin r_p \cos(v_{p-1} - v_{p-2}) - \cos^2 R_{p-1}}{\sin^2 R_{p-1}}.$$

Wir verbinden nunmehr den Punkt M_p mit dem Kugelcentrum M durch eine Gerade und verlängern dieselbe, bis sie die Ebene des Polarkreises in dessen Mittelpunkt M'_p trifft. Zieht man noch MA'_p und $M'_p A'_p$, so ist offenbar

$$\angle M'_p M A'_p = 180^0 - (90^0 + R_{p-1}) = 90^0 - R_{p-1},$$

sobald wir nur, was natürlich gestattet ist, den Kugelradius zur Einheit nehmen. Das Dreieck $M'_p M A'_p$ liefert dann

$$\overline{MA'_p} = 1 . \sin(M'_p M A'_p) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - R_{p-1}\right) = \cos R_{p-1}.$$

Um die Länge des Bogens $A'_{p-1}A'_p$ zu finden, bedienen wir uns nachstehender Proportion:

$$\text{arc.}\overline{A'_{p-1}A'_p} : 2 . \overline{MA'_p} . \pi = y : 2\pi,$$

und hieraus bestimmt sich

$$\text{arc.}\overline{A'_{p-1}A'_p} = \overline{MA'_p} . y.$$

Führen wir für $\overline{MA'_p}$ und y die oben berechneten Werte ein, so finden wir den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{p-1}ZA_p$

$$F_{p-1} = 2\pi - \text{arc}\,\overline{A'_{p-1}A'_p} =$$

$$2\pi - \cos R_{p-1} \arccos \frac{\cos r_{p-1} \cos r_p + \sin r_{p-1} \sin r_p \cos(v_{p-1} - v_{p-2}) - \cos^2 R_{p-1}}{\sin^2 R_{p-1}}$$

demzufolge ist der Flächeninhalt des ganzen Polygons

$$F = \Sigma F_{p-1} = \sum_{p=n}^{p=1} \left[2\pi - \cos R_{p-1} \arccos \right.$$

$$\left. \frac{\cos r_{p-1} \cos r_p + \sin r_{p-1} \sin r_p \cos(v_{p-1} - v_{p-2}) - \cos^2 R_{p-1}}{\sin^2 R_{p-1}} \right].$$

Sollte der Kugelradius nicht 1, sondern eine willkürliche Grösse ϱ sein, so würde man den rechtsstehenden Ausdruck einfach mit ϱ^2 zu multipliciren haben. Die Formel hat den grossen Vorteil, dass in sie nur solche Werte eingegangen sind, welche zur Bestimmung des

Polygons absolut notwendig waren, dass sie durchaus keine überflüssigen Bestimmungsstücke in sich aufgenommen hat. Nur für den Fall, wo die Begrenzungslinie teilweise mit einem Hauptkreise zusammenfällt, versagt die Formel, indem alsdann

$$\cos R_{p-1} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

wird; indessen war dies der ganzen Herleitung nach nicht anders zu erwarten.

Zur Controlle wollen wir den Flächeninhalt eines kleinen Kugelkreises mit ihrer Hülfe bestimmen. In diesem Falle haben wir

$$r_{p-1} = r_p = R, \quad v_{p-2} = 0, \quad v_{p-1} = 2\pi$$

zu setzen und von der obigen Summe nur ein einziges Glied zu nehmen. Wir erhalten so

$$F = 2\pi - \cos R \arccos \frac{\cos^2 R + \sin^2 R \cos 2\pi - \cos^2 R}{\sin^2 R}$$

$$F = 2\pi - \cos R \,.\, 2\pi = 2\pi(1 - \cos R),$$

ein Resultat, welches sich auf andrem Wege leicht verificiren lässt. Denn durch unmittelbare Integration findet man

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sin r\, dr\, dv = 2\pi(1 - \cos R).$$

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass auch diejenigen Fälle, wo concave Begrenzungslinien auftreten, sich durch ein ganz analoges Raisonnement erledigen lassen.

III.

§. 6. Wenn die Teilnahme der neuesten Zeit sich den Problemen der Photometrie nicht in dem Masse zuwandte, wie es das hohe Interesse des Gegenstandes an und für sich erwarten lassen könnte, so liegt der Grund hiefür wol hauptsächlich in dem Umstande, dass die theoretische Behandlung hieher gehöriger Fragen nicht mit demselben Rechte, wie in manchen andren Zweigen der mathematischen Physik auf unmittelbare Bedeutung für die wirklich stattfindenden Verhältnisse zu rechnen hat. Jeder Versuch, die Analysis auf derartige Aufgaben anzuwenden, muss notwendig das von Lambert [7]) aufgestellte Grundgesetz zum Ausgangspunkt nehmen, und dass dies Gesetz nicht allein keineswegs ausreichend sei, sondern sogar an gewissen inneren

Widersprüchen leide, hat Zöllner[8]) zur Evidenz dargetan. Allein hievon ganz abgesehen, wird man den auf Lambert's Fundamentalformel sich stützenden Entwickelungen vom rein mathematischen Standpunkte aus ihre Berechtigung nicht absprechen können, und zur Untersuchung der Erleuchtungsverhältnisse in diesem Sinne einige Beiträge zu liefern, soll hier versucht werden.

Es dürfte bei dieser Gelegenheit wol angemessen sein, auf den innigen Zusammenhang hinzuweisen, in welchem die Photometrie mit andren mathematisch-physikalischen Disciplinen steht. Die zwischen den Hauptsätzen der Erleuchtungslehre und jenem der Potential-Theorie obwaltende Analogie hat neuerlich v. Bezold[9]) zum Gegenstande einer interessanten Untersuchung gemacht. Ferner scheint auch die Tatsache, dass ebenso wie für die Photometrie so auch für die Elektrostatik das Princip der sphärischen Abbildung Platz greift[10]), einer eingehenderen Berücksichtigung wert zu sein.

Dies Princip besteht bekanntlich darin, dass man, wenn es sich um die durch eine begrenzte leuchtende Fläche auf einen Punkt ausgeübte Erleuchtung handelt, erstrer ihr sphärisches Bild auf einer mit beliebigem Radius um jenen Punkt construirter Kugelfläche substituiren darf, so dass also lediglich die Discussion sphärischer Figuren erfordert wird. Im Folgenden wird dann noch stets von der Voraussetzung ausgegangen, dass jedem Flächenelemente die nämliche Leuchtkraft innewohne — eine Specialisirung, welche für die Rechnung selbstverständlich wesentliche Vereinfachungen mit sich bringt und auch für eine mit den nötigen Cautelen vorzunehmende Anwendung auf die Praxis ausreichend sein dürfte.

Bezeichnen wir mit E die Erleuchtung, welche eine beliebig gestaltete mit homogener Leuchtkraft ausgestattete Figur der Kugelfläche auf ein in deren Centrum gelegenes horizontales Flächenelement df ausübt, denken wir uns ferner die Lage eines sphärischen Punktes durch Kugelradius $(=1)$, Zenithdistanz (r) und Azimuth (v) fixirt, so besteht[11]) die Gleichung

$$E = J df \int_b^a \int_{\varphi v}^{\psi v} \sin r \cos r \, dr \, dv.$$

Hier ist J die specifische Leuchtkraft, a und b sind Constante, φ_v und ψ_v werden gefunden, indem man r vermittelst der in unsren Polarcoordinaten ausgedrückten Curvengleichung in v ausdrückt. Liegt, wie im Folgenden stets angenommen werden möge, das zum Pol des Systems genommene Zenith im Innern der betrachteten Figur, so

geht ψ_v in Null über; jeder andre Fall lässt sich leicht auf diesen reduciren.

7) Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus lucis, colorum et umbrae, Augsburg 1760. S. 40.

8) Zöllner, Photometrische Untersuchungen, Leipzig 1865. S. 7. ff.

9) v. Bezold, Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre, Poggendorff's Annalen, 141. Band. S. 91.

10) Kötteritzsch, Lehrhbuch der Elektrostatik, Leipzig 1872. S. 270.

11) Günther, Studien zur theoretischen Photometrie, Erlangen 1872, S. 6.

§. 7. Dem Obigen gemäss verlangt jedes Problem der Photometrie zu seiner Lösung die Auswertung eines Doppelintegrales, und in der Tat sind sämmtliche bisher in Betracht gezogene Aufgaben auf diesem Wege gelöst worden. Allein eine genauere Betrachtung der obigen Formel wird zeigen, dass man in manchen, und zwar gerade in den für die Praxis wichtigsten Fällen, den Integrationsprozess entweder ganz umgehen oder doch vereinfachen kann.

Wir geben zu diesem Zwecke unsrem Doppelintegrale die Form

$$\frac{1}{4}\int_b^a\int_b^{\varphi_0} \sin 2r d(2r)\, dv,$$

und erkennen sofort die Richtigkeit folgenden Satzes:

Soll die durch eine sphärische homogene leuchtende Figur auf das Centrum der Kugel ausgeübte Erleuchtung bestimmt werden, so bilde man aus jener Figur durch eine Aehnlichkeitstransformation des Verhältnisses 1 : 2 — das Zenith zum Aehnlichkeitscentrum genommen — eine zweite Figur und berechne deren Flächeninhalt. Derselbe, noch multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{1}{4}Jdf$, ist gleich der gesuchten Erleuchtung.

Wir können diesem Satze jedoch auch folgende Fassung geben:

Die durch zwei sphärische Figuren auf das Centrum ihrer Kugel ausgeübten Erleuchtungen verhalten sich wie die von 2π subtrahirten Umfänge der Polarfiguren jener Figuren, welche man durch eine Aehnlichkeitstransformation der bezeichneten Art aus den erstgenannten gebildet hat.

Als Beispiel der Anwendung dieses Satzes möge die Bestimmu[illegible] der Erleuchtung einer vollen Zone dienen. Es sei AB (Fig. 2) d[illegible] [illegible], M sein Centrum; wir suchen einen Ausdruck für die Lic[illegible]

menge, welche ein in M befindliches Element df von der homogen leuchtenden vollen Zone CD zugesandt erhält. Wir machen vom Zenith Z aus $ZC' = ZD' = 2ZC = 2ZD$ und $C'E = \frac{\pi}{2}$. Legen wir nun in E einen Parallelkreis EF durch die Kugel, so ist die Ergänzung von dessen Umfang zu 2π proportional der gesuchten Erleuchtung.

Wir ziehen ZM und verlängern diese Gerade bis zu ihrem Durchschnitt G mit EF. Bezeichnen wir dann den Bogen CZ mit R, so ist, da die Kugel wieder den Radius 1 hat,

$$\angle CMZ = R.$$

Ferner ist

$$\angle GEM = \frac{\pi}{2} - \angle EMG = 2R.$$

Der Umfang des Kreises EF ist gleich

$$2EG \cdot \pi = 2\pi \cos 2R,$$

und somit die Erleuchtung der Calotte CD

$$E = \tfrac{1}{4} J df (2\pi - 2\pi \cos 2R),$$

$$E = J df \sin^2 R,$$

also das bereits anderweitig bekannte [12]) Resultat.

12) Beer, Grundzüge des photomrtrischen Calcüles. Braunschweig 1854, S. 28.

§. 8. Allgemein gesprochen, würde der Vorteil, den das zuletzt angedeutete Verfahren mit sich bringt, darin bestehen, dass ein Doppelintegral auf ein ein einfaches reducirt wäre. Es ist dies zwar auch direct möglich, indem ja

$$\int_b^a \int_0^{\varphi_v} \sin 2r \, d(2r) dv = -\int_b^a (\cos 2\varphi_v - 1) dv$$

ist; allein die hier nötig werdende Substitution kann möglicherweise eine so missliche werden, dass es sich empfiehlt, diese Reduction auf einem andren Wege vorzunehmen. Auch deshalb wird diese andre Herleitung nicht ohne Interesse sein, weil es die Lösung eines wenigstens anscheinend noch nicht allgemein behandelten Problems involvirt.

Unsre Transformationsgleichungen ergeben uns

$$ds = \sqrt{dr^2 + \sin^2 r\, dv^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 + \sin^2 r}\, dv,$$

und es ist somit die Länge eines Curvenbogens dem Integrale

$$\int \sqrt{\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 + \sin^2 r}\, dv$$

gleichzusetzen. Hier sind nun noch die Grenzen den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke müssen wir durch die Punkte (r_1, v_1) und (r_2, v_2) Normalen an die erste Curve legen, d. h. grösste Kreise, welche auf den Berührungskreisen in jenen Punkten senkrecht stehen.

Es sei nun V_1 das Azimuth eines beliebigen Punktes der Polarcurve; schreiben wir dann die Gleichung dieser letzteren in folgender Form

$$F' \mathrm{v} = r,$$

so ist auch die zugehörige Zenithdistanz jenes Punktes sofort durch

$$R_1 = F' \mathrm{v}_1$$

gegeben. Verbinden wir diesen Punkt mit (r_1, v_1), so lässt sich die Länge des so entstandenen Bogens unmittelbar aus der Gleichung

$$\cos b = \cos r_1 \cos F' \mathrm{v}_1 + \sin r_1 \sin F' \mathrm{v}_1 \cos (V_1 - v_1)$$

entnehmen. Damit aber dieser Bogen einem Normalkreise angehöre, muss notwendig $b = \frac{\pi}{2}$ sein; und wir erhalten so für V_1 die Bestimmungsgleichung

$$\cos (V_1 - v_1) = -\cot r_1 \cot F' \mathrm{v}_1,$$

aus welcher sich

$$V_1 = X_{(r_1, v_1)} = X_1,$$

berechnet. Ganz ebenso ergiebt der Punkt (r_2, v_2) einen auf der Polarcurve ihm entsprechenden, dessen Azimuth

$$V_2 = X_{(r_2, v_2)} = X_2$$

ist, und wir finden so die Erleuchtung unseres gemischtlinigen Dreiecks gegeben durch den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} J\, df \left(2\pi - \int_{X_2}^{X_1} \sqrt{\left(\frac{d F'_{\mathrm{v}}}{dv}\right)^2 + \sin^2 F'_{\mathrm{v}}}\, dv\right).$$

Hiemit ist also ganz allgemein die Aufgabe gelöst, die Erleuchtung eines Vielecks zu bestimmen, dessen Perimeter aus Bögen beliebiger sphärischer Curven zusammengesetzt ist.

XXV.

Zur mathematischen Theorie des Schachbretts.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Die vorliegende Mitteilung betrifft ein Problem, welches, wenn auch ursprünglich von einem Schachspieler ausgehend, gleichwohl bald als ein mathematisches anerkannt wurde und, wie wir sofort sehen werden, einen der ersten Mathematiker unsrer Zeit zu eingehendem Studium veranlasste. So wertvolle Resultate aber auch die Bemühungen dieses wie andrer Gelehrten für den speciellen dem Schachfreund wichtigen Fall ergeben haben, so ist doch eine allgemeine für jedes beliebige Schachbrett von n^2 Feldern gültige Lösung anscheinend noch nicht gegeben worden. Das Problem ist folgendes: Es sollen auf einem solchen Brette n Damen (Königinnen) so aufgestellt werden, dass keine derselben von irgend einer andren angegriffen wird, resp. dieselbe angreift. Ehe wir an die Lösung selbst gehen, wird es sich empfehlen, einen historisch-kritischen Ueberblick über die bisher angestellten Auflösungsversuche vorausgehen zu lassen.

Die erste den Mathematiker interessirende Andeutung über unsre Aufgabe finden wir in einem Briefe von Gauss an Schumacher[1]). Gauss bemerkt hier, der Angabe des Problemstellers (Nauck) zufolge lasse dasselbe 60 verschiedene Auflösungen zu; er selbst aber finde deren 76. Nach einer kurzen Antwort Schumacher's in dessen nächstem Schreiben[2]) berichtigt Gauss weiterhin[3]) sein früher angegebenes Resultat dahin, dass nicht 76, sondern blos 72 Lösungen möglich seien — ohne jedoch eine Garantie für letztere Zahl zu übernehmen. Dabei findet sich bereits folgende wichtige Notiz: „Die 72

Auflösungen reduciren sich übrigens auf nur 9 wesentlich verschiedene, indem jede Auflösung 8 Variationen repräsentirt. Es gehen nämlich zuerst aus jeder Auflösung durch Drehung um 90⁰, 180⁰, 270⁰, oder, was dasselbe ist, indem man der Reihe nach jede der Quadratseiten unten stellt, 3 andere hervor; und jede dieser Auflösungen liefert in ihrem Spiegelbild, oder was dasselbe ist, auf der Rückseite des Papiers eine neue.“ Es kann einigermassen Wunder nehmen, dass Gauss bei seiner so überaus klaren Auffassung der Eigenart des Problems gleichwohl eine ganze Serie von Auflösungen total übersah.

Die Antwort Schumacher's [4]) sucht einige neue Beiträge zu liefern, ohne dass ihm dies jedoch besonders gelingt. Seine Methode ist noch ein rein mechanisches Tasten, dessen Resultate nicht befriedigen können. So kommt der Verfasser beispielsweise nicht zur Klarheit darüber, ob die Dame auch eines der Eckfelder des Quadrates einnehmen dürfe, was noch auf eine gewisse Beschränktheit der Auffassung hindeutet. Denn hätte er sich entschlossen, statt der complicirten Verhältnisse des 64feldigen Schachbrettes ein einfacheres, etwa das von 25 Feldern, in's Auge zu fassen, so hätte sich ihm ganz unmittelbar die Thatsache ergeben, dass eine solche Stellung sehr wohl möglich sei. So sind denn auch seine Zahlen, 168 oder 120, ohne eigentlichen Wert; er mag dies wohl selbst gefühlt haben, denn in einem Postscript [5]) sagt er hierüber: „Indem ich wieder das Schachproblem überdenke, werde ich besorgt, dass in meinen Schlüssen etwas vorausgesetzt ist, was vielleicht nicht stattfindet.“

1) Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgeg. von Peters, 6. Band, Altona 1865. S. 106.
2) Ibid. S. 110.
3) Ibid. S. 112.
4) Ibid. S. 113.
5) Ibid. S. 115.

§. 2. Bis hieher kann von einer eigentlich theoretischen Behandlung der Aufgabe noch nicht die Rede sein; von jetzt an tritt dieselbe in ein anderes, höheres Stadium. In seinem nächsten Briefe [6]) berichtigt Gauss zunächst die oben angedeuteten Fehler Schumacher's und führt dann an, dass einer Mitteilung Nauck's zufolge es im Ganzen 92 Lösungen gebe. Gauss hält zwar auch diese Anzahl noch für sehr zweifelhaft, und in der Tat stehen ihr keine eigentlichen Gründe zur Seite; indes wissen wir jetzt, dass sie in der Tat die richtige ist. Hierauf sucht Gauss die Aufgabe in ein mathematisches Gewand zu kleiden; seine Worte sind folgende:

„Die Aufgabe lässt sich so aussprechen. Man soll die acht Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 in eine solche Ordnung bringen, dass 1) wenn man der geordneten Reihe nach sie resp. um 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 vergrössert, lauter ungleiche Summen hervorgehen; 2) dass auch, wenn man der Reihe nach 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 addirt, lauter ungleiche Summen erscheinen. Es sind z. B. diese Summen bei Auflösung 1:

2. 7. 11. 10. 8. 13. 9. 12 oder geordnet 2. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13 alle ungleich; und 9. 12. 14. 11. 7. 10. 4. 5 oder geordnet 4. 5. 7. 9. 10. 11. 12. 14 alle ungleich.

Das Tatonniren ist nun sehr leicht. Z. B. ich versuche den Anfang 1. 3....... zu completiren. Vermöge jener zwei Bedingungen wird in der dritten Reihe nicht 2 und nicht 4 stehen dürfen, also nur 5. 6. 7 oder 8. Es müssen also die Anfänge 1. 3. 5..., 1. 3. 6..., 1. 3. 7..., 1. 3. 8... durchprobirt werden. Ich fange an mit 1. 3. 5. Vermöge jener Bedingungen darf am 4ten Platz nicht 4 und nicht 6 stehen. Es bleiben also blos übrig 2. 7. 8 oder es sind durchzuprobiren die Anfänge: 1. 3. 5. 2, 1. 3. 5. 7, 1. 3. 5. 8. Ich fange wieder an mit 1. 3. 5. 2, wo in Folge jener Bedingungen am 5ten Platze nicht stehen dürfen 6 und 7. Es bleiben also blos die Anfänge: 1. 3. 5. 2. 6 und 1. 3. 5. 2. 8. Die Berücksichtigung obiger Bedingungen ergiebt, dass bei dem Anfange 1. 3. 5. 2. 6 auf dem 6ten Platz 4. 7. 8 nicht stehen dürfen. Es fällt also auch dieser Anfang weg. Der Anfang 1. 3. 5. 2 ist also überhaupt unzulässig. Eben so verfährt man mit 1. 3. 5. 7 und 1. 3. 5. 8, die beide sich als unzulässig erweisen. Es ist folglich überhaupt der Anfang 1. 3. 5 unzulässig und man wird ebenso 1. 3. 6, 1. 3. 7, 1. 3. 8 durchprobiren.“

Es ist nicht zu leugnen, dass die hier gegebene Vorschrift verhältnissmässig schnell zum Ziele führt; dagegen wird man aber auch gestehen müssen, dass sie die grösste Aufmerksamkeit erfordert. Es ist eine ganz combinatorische Operation, bei der successive alles Untaugliche ausgeschieden wird, etwa in der Art des Siebes von Eratosthenes. Es wäre nur noch nötig, sie dahin zu vervollkommnen, dass bei ihrer Anwendung gar keine besondere Genauigkeit mehr nötig, vielmehr das ganze Tatonnement völlig mechanisch wäre.

Es ist wohl natürlich, dass der Gründer der lateralen Zahlen-Auffassung auch auf diese Aufgabe die geometrische Darstellung der complexen Grössen anwandte. Er fährt fort: „Am elegantesten ist es, die Sachen so einzukleiden, dass sie den complexen Grössen angehören. Es heisst dann, man soll 8 verschiedene complexe Zahlen finden $a+bi$, so dass

1) sowohl a als b eine der 8 reellen positiven Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 bedeutet,

2) dass jeder Wert von a nur Einmal vorkommt, und ebenso jeder Wert von b,

3) dass die Werte, welche $a+b$ bei jeder jener complexen Zahlen erhielt, ungleich sind,

4) dass ebenso die acht Werte von $a-b$ ungleich sind.

Es lässt sich dann der Zusammenhang der 8 zusammengehörigen Auflösungen zierlich so vorstellen:

		Spiegelbilder.
durch Stellung auf die 4 Quadrat-seiten.	$a+bi$	$a+(9-b)i$
	$b+(9-a)i$	$b+ai$
	$9-a+(9-b)i$	$9-a+bi$
	$9-b+ai$	$9-b+(9-a)i$

Man kann auch sagen, ist Eine der complexen Zahlen n, ihre Adjuncte n', so sind alle 8 Variationen

$$\begin{matrix} n & n' \\ in & in' \\ -n & -n' \\ -in & -in' \end{matrix}$$

Vergl. Theoria Residuorum Biquadraticorum, Comm. secunda art. 31."

Die Fragestellung hat hier allerdings einen hohen Grad von Eleganz erreicht — ob aber durch dieselbe die eigentliche Lösung wesentlich gefördert wird, dürfte zu bezweifeln sein. Auch hier wird die Behandlung praktischer Fälle auf ein Probiren hinauslaufen, bei dem nur die höchste Genauigkeit vor Fehlern sichern kann.

Die Art und Weise, wie Gauss auf seine Regel kam, geht aus seinen Angaben nicht direct hervor; Schumacher suchte sich dieselbe klar zu machen und drückt [7]) das Resultat seines Nachdenkens mit folgenden Worten aus: „Die willkürliche Versetzung der Zahlen 1—8 drückt die Bedingung schon aus, dass keine Dame die andere als Thurm angreife. Die Addition mit 1, 2, 3, ... 8, dass keine Dame die andere in absteigender Linie als Läufer angreife, die Addition 8, 7, 6, ... 2, 1, dass dies nicht in aufsteigender Linie geschehe, wenn nämlich bei neuer Addition gleiche Summen vorkommen. Kommen gleiche Summen vor, so weiss man unmittelbar, welche Damen sich als Läufer angreifen." Hiemit schliesst die Correspondenz.

Diese Bemerkung Schumacher's trifft den Kernpunkt der Frage. Die Zerlegung der Gesammtaction einer Dame in vier, resp. zwei Einzel-Actionen — eine ungefähr der Kräftezerlegung entsprechende Operation — ist es, worauf es hauptsächlich ankommt, und auch unsere Lösung des Problems wird im Wesentlichen darin bestehen, die Identität dieser Aufgaben mit gewissen bekannten mathematischen Theorien darzutun.

Anmerkung. Die von Gauss (s. o.) angezogene Stelle ist folgende:

„Producta terna cujuslibet numeri complexi per -1, $+i$, $-i$ illius socios vel numeros illi associatos appellabimus. Excepta itaque cifra (quae sibi ipsa associata est), semper quaterni numeri in aequales associati sunt.

Contra numero complexo conjunctum vocamus eum, qui per permutationem ipsius i cum $-i$ inde oritur. Inter numeros imaginarios itaque bini inaequales semper conjuncti sunt, dum numeri reales sibi ipsi sunt conjuncti, siquidem denominationem ad hos extendere placet."

6) Briefwechsel von Gauss und Schumacher, S. 117.
7) Ibid. S. 120.

§. 3. Von deutschen Mathematikern scheint sich nach Gauss nur ein einziger, Natani, mit unserem Probleme beschäftigt zu haben. Er erwähnt unserer Aufgabe als einer solchen, welche mit dem bekannten Rösselsprunge Aehnlichkeit habe — eine Analogie, die jedoch wohl lediglich in der Schwierigkeit beruhen dürfte, Fragen dieser Art mathematisch zu behandeln.

Natani formulirt die Aufgabe so[8]: „Es sind acht Felder gegeben, deren Reihenfolge durch eine darüber geschriebene Zahl angezeigt ist, welche wir Ordnungszahl nennen. Es soll in jeder der acht Felder eine andere der ersten acht natürlichen Zahlen derart geschrieben werden, dass die Differenz zweier darunter nicht gleich der Differenz ihrer Ordnungszahlen ist. Steht also im dritten Felde eine 4, so darf z. B. im fünften weder eine 9 noch eine 2 stehen, weil $4-2=6-4=5-3$ ist."

Aus dieser Formulirung geht alsdann folgende neue hervor: „Man kann aus einer Auflösung sieben andere gewinnen, indem man 1) die Ordnung der Felder umkehrt, 2) statt der Zahlen in den Feldern ihre Differenzen von 9 nimmt, diese ist dann wieder umzukehren, so dass man jetzt vier Zahlenreihen hat, 3) endlich kann man in jeder

Die von uns verwandte Diagonale ist negativ-orthosymmetrisch in den Indices, positiv-orthosymmetrisch in deren Trägern.

11) Hankel, Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten, Göttingen 1861. S. 4.

§. 5. Die vorstehende Regel ist an und für sich klar. Die Möglichkeit des Thurmangriffs ist von vornherein dadurch ausgeschlossen, dass jede Combination aus einer Determinante resultirte; der Ausschluss doppelt oder mehrfach vorkommender Buchstaben verhindert die Läuferwirkung parallel der schwarzen, der Ausschluss mehrfacher Indices die Läuferwirkung parallel der weissen Diagonale (sobald wir das Schachbrett von 64 Feldern zu Grunde legen). Die Operation des Eliminirens aller unstatthaften Verbindungen hat einen möglichst hohen Grad von Einfachheit erhalten, und die Darstellung aller überhaupt zur Prüfung kommenden Verbindungen ist ebenfalls eine rein mathematische Aufgabe einfachster Natur. Könnte freilich die Auflösung einer Determinante nur dadurch geschehen, dass man in der Weise der Elementarvorschriften verführe, so wäre nichts wesentliches gewonnen; der Fortschritt gegen die Behandlung von Gauss liegt aber wohl darin, dass man die Berechnung aller Glieder einer Determinante durch successive Zerlegung in Unterdeterminanten auf ganz mechanische Weise ausführen kann, ohne dass dabei das Uebersehen irgend eines Gliedes denkbar ist.

Auf eine andre allerdings naheliegende Frage soll hier nicht näher eingegangen werden, auf die Frage nämlich, ob sich für die Anzahl der möglichen Lösungen auf dem allgemeinen Schachbrett von n^2 Feldern ein independenter Ausdruck gewinnen lasse. Obwohl diese Aufgabe sicher nicht zu den unlösbaren gehört, so zeigen doch schon die bekannten Formeln, mittelst deren man die Anzahl der 2, 3 ... p Diagonalterme enthaltenden Glieder zu bestimmen vermag, wie ungeheuer complicirt die Ausdrücke bei diesem ähnlichen, aber ungleich verwickelteren Probleme sich gestalten müssten.

§. 6. Es mögen nun für einige einfache Fälle die wirklich ausgerechneten Lösungen folgen. Man hat für

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & e_3 \\ b_2 & a_3 & c_4 \\ d_3 & b_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

die Verbindungen:

$$(a_1 a_3 a_5)\,(a_1 b_4 c_4)\,(c_2 b_2 a_5)\,(c_2 c_4 d_3)\,(e_3 b_2 b_4)\,(e_3 a_3 d_3).$$

Klammern wir alle diejenigen Combinationen ein, welche unsrer Bedingung nicht genügen, so müssen wir dies hier mit allen tun; d. h. das Schachbrett von 9 Feldern lässt gar keine mögliche Stellung zu.

Geht man einen Schritt weiter, so hat die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & e_3 & g_4 \\ b_2 & a_3 & c_4 & e_5 \\ d_3 & b_4 & a_5 & c_6 \\ f_4 & d_5 & b_6 & a_7 \end{vmatrix}$$

die Glieder:

$$(a_1 a_3 a_5 a_7)(a_1 b_4 c_4 a_7)(c_2 b_3 a_5 a_7)(c_2 c_4 d_3 a_7)(e_3 b_2 b_4 a_7)(e_3 a_3 d_3 a_7)$$
$$(b_6 a_1 a_3 c_6)(b_6 a_1 b_4 e_5)(b_1 c_2 b_2 c_6)\ b_1 c_2 e_5 d_3\ (b_6 g_4 b_2 b_4)(b_6 g_4 a_3 d_3)$$
$$(d_5 a_1 c_4 c_6)(d_5 a_1 e_5 a_5)\ d_5 e_3 b_2 c_6\ (d_5 e_3 e_5 d_3)(d_5 g_4 b_2 a_5)(d_5 g_4 c_4 d_3)$$
$$(f_4 b_4 c_4 g_4)(f_4 b_4 e_3 e_5)(f_4 a_5 c_2 e_5)(f_4 a_5 a_3 g_4)(f_4 c_6 a_3 e_3)(f_4 c_6 c_2 c_4)$$

Hier haben wir also die beiden Lösungen

$$b_1 c_2 e_5 d_3 \quad \text{und} \quad d_5 e_3 b_2 c_6.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & e_3 & g_4 & k_5 \\ b_2 & a_3 & c_4 & e_5 & g_6 \\ d_3 & b_4 & a_5 & c_6 & e_7 \\ f_4 & d_5 & b_6 & a_7 & c_8 \\ h_5 & f_6 & d_7 & b_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

liefert nachstehende Glieder:

$$(a_9a_1a_3a_5a_7)(a_9a_1b_4c_4a_7)(a_9c_2b_3a_5a_7)(a_9c_2c_4d_3a_7)(a_9e_3b_2b_4a_7)(a_9e_3a_3d_3a_7)$$
$$(a_9b_6a_1a_3c_6)(a_9b_6a_1b_4e_5)(a_9b_1c_2b_2c_6)\ a_9b_1c_2e_5d_3\ (a_9b_6g_4b_2b_4)(a_9b_6g_4a_3d_3)$$
$$(a_9d_5a_1c_4c_6)(a_9d_5a_1e_5a_5)\ a_9d_5e_3b_2c_6\ (a_9d_5e_3e_5d_3)(a_9d_5g_4b_2a_5)(a_9d_5g_4c_4d_3)$$
$$(a_9f_4b_4c_4g_4)(a_9f_4b_4e_3e_5)(a_9f_4a_5c_2e_5)(a_9f_4a_5a_3g_4)(a_9f_4c_6a_3e_3)(a_9f_4c_6c_2c_4)$$
$$(b_8a_1a_3a_5c_8)(b_8a_1a_3b_6e_7)(b_8a_1c_4b_4c_8)\ b_8a_1c_4d_5e_7\ (b_8a_1g_6b_4b_6)(b_8a_1g_6a_5d_5)$$
$$(b_8c_2b_2a_5c_8)(b_8c_2b_2b_6e_7)(b_8c_2c_4d_3c_8)(b_8c_2c_4e_7f_4)(b_8c_2g_6d_3b_6)\ b_8c_2g_6a_5f_4$$
$$(b_8e_3b_2b_4c_8)(b_8e_3b_2e_7d_5)(b_8e_3a_3d_3c_8)(b_8e_3a_3e_7f_4)(b_8e_3g_6d_3d_5)(b_8e_3g_6b_4f_4)$$
$$(b_8k_5b_2b_4b_6)(b_8k_5b_2a_5d_5)(b_8k_5a_3d_3b_6)(b_8k_5a_3a_5f_4)(b_8k_5c_4d_3d_5)(b_8k_5c_4b_4f_4)$$
$$(d_7a_1a_3c_6c_8)(d_7a_1a_3e_7a_7)\ d_7a_1e_5b_4c_8\ (d_7a_1e_5e_7d_5)(d_7a_1g_6b_4a_7)(d_7a_1g_6c_6d_5)$$
$$(d_7c_2b_2c_6c_8)(d_7c_2b_2e_7a_7)(d_2c_2e_5d_3c_8)(d_7c_2e_5e_7f_4)(d_7c_2g_6d_3a_7)(d_7c_2g_6c_6f_4)$$
$$(d_7g_4b_2b_4c_8)(d_7g_4b_2e_7d_5)(d_7g_4a_3d_3c_8)(d_7g_4a_3e_7f_4)(d_7g_4g_6d_3d_5)(d_7g_4g_6b_4f_4)$$
$$(d_7k_5b_2b_4a_7)(d_7k_5b_2c_6d_5)(d_7k_5a_3d_3a_7)\ d_7k_5a_3c_6f_4\ (d_7k_5c_5d_3d_5)(d_7k_5c_5b_4f_4)$$

$(f_6c_8a_1c_4c_6)(f_6c_8a_1e_5a_5)(f_6c_8e_3b_2c_6)(f_6c_8e_3e_5d_3)\ f_6c_8g_4b_2a_5\ (f_6c_8g_4c_4d_3)$
$(f_6a_7a_1c_4e_7)(f_6a_7d_1g_6a_5)(f_6a_7e_3b_2e_6)(f_6a_7e_3g_6d_3)(f_6a_7k_5b_2a_5)\ f_6a_7k_5c_4d_3$
$(f_6b_6a_1e_5e_7)(f_6b_6a_1g_6c_6)(f_6b_6g_4b_2e_7)(f_6b_6g_4g_6d_3)(f_6b_6k_5b_2c_6)(f_6b_6k_5e_5d_3)$
$(f_6f_4e_3e_5e_7)(f_6f_4e_3g_6c_6)(f_6f_4g_4c_4e_7)(f_6f_4g_4g_6a_5)(f_6f_4k_5c_4c_6)(f_6f_4k_5e_5a_5)$
$(h_5d_5e_3e_5e_7)(h_5d_5e_3g_6c_6)(h_5d_5g_4c_4e_7)(h_5d_5g_4g_6a_5)(h_5d_5k_5c_4c_6)(h_5d_5k_5e_5a_5)$
$(h_5b_6c_2e_5e_7)(h_5b_6c_2g_6c_6)\ h_5b_6g_4a_3e_7\ (h_5b_6g_4g_6b_4)(h_5b_6k_5a_3c_6)(h_5b_6k_5e_5b_4)$
$(h_5a_7c_2c_4e_7)(h_5a_7c_2g_6a_5)(h_5a_7e_3a_3e_7)\ h_5a_7e_3g_6b_4\ (h_5a_7k_5a_3a_5)(h_5a_7k_5c_4a_4)$
$(h_5c_8c_2c_4c_6)(h_5c_8c_2e_5a_5)(h_5c_8e_3a_3c_6)(h_5c_8e_3e_5b_4)(h_5c_8g_4a_3a_5)(h_5c_8g_4c_4b_4)$

Es bleiben uns sonach für das Schachbrett von 25 Feldern die 10 Stellungen

$$a_9b_1c_2e_5d_3;\quad a_9d_5e_3b_2c_6;\quad b_8a_1c_4d_5e_7;\quad b_8c_2g_6a_5f_4;\quad d_7a_1e_5b_4c_8;$$
$$d_7k_5a_3e_6f_4;\quad f_6c_8y_4b_2a_5;\quad f_6a_7k_5c_4d_3;\quad h_5b_6g_4a_3e_7;\quad h_5a_7e_3g_6b_4.$$

Man erkennt sofort, dass es nicht nötig ist, alle $n!$ Glieder einer Determinante wirklich hinzuschreiben; ist n^2 eine ungerade Zahl, so wird man blos die ersten

$$(n-1)!\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

Glieder, im andren Falle, also z. B. beim gewöhnlichen Schachbrett, blos die ersten

$$\frac{n!}{2}$$

zu berechnen haben, wie sich dies aus Symmetrie-Gründen sofort ergiebt.

Anmerkung. Wendet man dies Verfahren auf das gewöhnliche Schachbrett an, wobei allerdings dem Obigen gemäss

$$\frac{n!}{2}=\frac{8!}{2}=20160$$

Glieder auszurechnen sind, so ergiebt sich die Anzahl von 92 Stellungen. Diese Zahl 92 steht hier mit der Zahl 8 in einem eigentümlichen Zusammenhang, welcher sich merkwürdigerweise auf einem ganz andren Gebiete wiederfindet. Es hat nämlich Lüroth [12]) durch eine schwierige Abzählung gefunden, dass 8 im Raume willkürlich liegende Gerade von 92 Kegelschnitten geschnitten werden. Sollte dies auf eine wirkliche innere Analogie beider so verschiedenartiger Probleme hindeuten?

12) Lüroth, Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden, Borchardt's Journal, 68. Band. S. 190.

§. 7. Die vorliegende Methode hat den Vorteil, dass sie sofort eine Anwendung auf drei Dimensionen gestattet. Die Aufgabe würde sich hier so formuliren lassen.

> „Gegeben sind n^3 einen Würfel erfüllende Punkte, es sollen n^2 Punkte von der Beschaffenheit angegeben werden, dass, wenn man durch jeden dieser Punkte ein rechtwinkliges Axensystem parallel zu den Würfelkanten legt, sowie noch ein zweites, durch Drehung um 45^0 aus jenem ersten hervorgegangenes, keine der 6 durch einen der n^2 Punkte hindurchgehenden Linien irgend einen andren dieser Punkte trifft."

Um diese Aufgabe zu lösen, bedienen wir uns einer sogenannten cubischen Determinante. Wir setzen fest, dass sämmtliche Terme, deren Verbindungslinie einer beliebigen Diagonale parallel läuft, den nämlichen Buchstaben aufweisen sollen; alle die, deren Verbindungslinie resp. der zweiten und dritten Diagonale parallel ist, bekommen bezüglich den nämlichen oberen und unteren Index, so dass also der allgemeine Ausdruck eines Terms der Determinante

$$M^p{}_q$$

sein würde. Die Regel ist dann entsprechend folgende:

> „Man bilde alle Glieder der cubischen Determinante und sondere daraus alle diejenigen aus, welche den nämlichen Buchstaben, oder den nämlichen oberen und unteren Index mehr als einmal enthalten, der Rest liefert sämmtliche Lösungen, deren die Aufgabe fähig ist."

Um die Entwicklung einer cubischen Determinante zu bewerkstelligen ist es nötig, den Satz von der Zerlegung quadratischer Determinanten auf solche auszudehnen. Bei der Normalform

$$a_{111}\, a_{222} \ldots a_{nnn}$$

solcher Determinanten werden die ersten Indices als fest betrachtet, die zweiten und dritten permutirt. Dies empfiehlt sich nicht für unsre Zwecke; vielmehr schlagen wir folgenden Weg ein. Jeder Term der Determinante kommt in den entwickelten Gliedern n^2 mal vor; daraus ergiebt sich aber sofort nach dem Gesetz der Homogeneität, dass man all die Glieder, mit welchen ein beliebiger Term multiplicirt ist, finden kann, wenn man alle die Terme, welche auf dem durch jenen Punkt gehenden Axensystem liegen, auslässt und aus allen übrigen eine Determinante $(n-1)$ten Grades bildet, die

sonach $(n-1)^3$ Elemente enthält. Sonach entspricht dem Zerfällen einer gewöhnlichen Determinante in Minoren nach den Elementen einer beliebigen Horizontal- und Verticalreihe die Zerlegung einer solchen Determinante in cubische Unter-Determinanten nach den Elementen eines beliebigen einer der Coordinatenebenen parallelen Quadrates. Das Vorzeichen jedes Gliedes, welches einer besondren Untersuchung [13]) bedarf, ist für unsre Zwecke natürlich gleichgültig.

13) Armenante, Sui determinanti cubici, Battaglini, Giornale, G. VI. S. 175.

XXVI.

Bemerkungen über Cylinder-Functionen.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Die bekannten Transscendenten, welche man mit dem Namen der Cylinder- oder auch Fourier-Bessel'schen Functionen zu bezeichnen pflegt, zeichnen sich durch die reiche Fülle von Eigenschaften aus, welche man durch einfache Transformationen aus ihrer Definition abzuleiten vermag. Als Beleg hiefür kann vor Allem die von Lommel über diesen Gegenstand veröffentlichte Schrift gelten, und an sie schliesst sich im Wesentlichen auch die vorliegende Arbeit an, insofern dieselbe einige dort mehr gelegentlich angeführte interessante Relationen weiter zu entwickeln beabsichtigt. Insbesondere scheint die Kettenbruchdarstellung der Cylinderfunctionen eine etwas isolirte Stellung einzunehmen, während im Folgenden gezeigt werden soll, dass auch an diese sich weitere Folgerungen anknüpfen lassen.

Setzt man in bekannter Weise

$$J^v_z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^v}{2^v \Gamma(v+\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iz\cos w} \sin^{2v} w \, dw,$$

so ist nach Lommel[1]) der Quotient

$$\frac{J_z^{v+1}}{J^v_z} = \cfrac{z}{2(v+1) - \cfrac{z^2}{2(v+2) - \cfrac{z^2}{2(v+3) - \dots}}}$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den rechtsstehenden Kettenbruch, ohne Rücksicht auf seine Entstehungsweise, zu summiren. Hiefür bietet sich uns sofort eine elegante Methode dar; diejenige nämlich, vermittelst deren Spitzer für verschiedene unendliche Kettenbrüche die independenten Summen-Ausdrücke zu finden lehrte. Um jedoch im gegebnen Falle den vollen Nutzen aus diesem Verfahren ziehen zu können, ist es nötig, dem Kettenbruche selbst eine etwas andre Form zu erteilen.

Mit Anwendung der Determinantenbezeichnung erhalten wir

$$\frac{J_z^{v+1}}{J^v_z} = \frac{\begin{vmatrix} z, & 0 & 0 & \dots \\ 0, & 2(v+2), & z & \dots \\ 0, & z & 2(v+3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(v+1), & z, & 0 & \dots \\ z, & 2(v+2), & z & \dots \\ 0, & z, & 2(v+3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}$$

und durch Umkehrung dieser Brüche

$$\frac{zJ^v_z}{J_z^{v+1}} = \frac{\begin{vmatrix} 2(v+1), & z, & 0 & \dots \\ z, & 2(v+2), & z & \dots \\ 0, & z, & 2(v+3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(v+2) & z & \dots \\ z & 2(v+3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}$$

Schreiben wir den rechtsstehenden Determinanten-Quotienten wieder als Kettenbruch, so folgt

$$z\frac{J^v{}_z}{J_z{}^{v+1}} = 2(v+1) - \cfrac{z^2}{2(v+2) - \cfrac{z^2}{2(v+3) - \cfrac{z^2}{2(v+4) - \ldots}}},$$

und dieser Kettenbruch gestattet nun ohne Weiteres die Anwendung der Spitzer'schen Methode.

Ist ψ_v der Wert unseres Kettenbruches, so besteht[2]) die Relation

$$\psi_v = 2(v+1) - \frac{z^2}{\psi_{v+1}}.$$

Durch die Substitution

$$\psi_v = \frac{f_v}{f_{v+1}}, \quad \psi_{v+1} = \frac{f_{v+1}}{f_{v+2}}$$

folgt hieraus weiter

$$\frac{f_v}{f_{v+1}} = 2(v+1) - z^2\frac{f_{v+2}}{f_{v+1}},$$

so dass es also schliesslich auf die Auflösung der Functionalgleichung

$$z^2 f_{v+2} - 2(v+1) f_{v+1} + f_v = 0$$

ankommt.

Anmerkung. Man erkennt nun auch, weshalb die ursprüngliche Form des Kettenbruches nicht zum Ausgangspunkt genommen werden konnte. Man würde hier nämlich durch die angegebne Substitution auf die Gleichung

$$\psi^{(1)}{}_v = \frac{z^2}{2(v+1) - \psi^{(1)}{}_{v+1}}$$

geführt worden sein, und diese würde, entwickelt geschrieben, der die Anwendung des Spitzer'schen Verfahrens bedingenden Eigentümlichkeit entbehren, keine zwei f mit einander multiplicirt zu zeigen.

1) Lommel, Studien über die Besel'schen Functionen, Leipzig 1868. S. 5.

2) Spitzer, Darstellung des unendlichen Kettenbruchs

$$2x+1 + \cfrac{1}{2x+3 + \cfrac{1}{2x+5 + \cfrac{1}{2x+7 + \ldots}}}$$

in geschlossener Form, Grunert's Archiv, 30. Teil. S. 332.

§. 2. Zur Auflösung jener Gleichung bedienen wir uns eines dem Spitzer'schen consequent nachgebildeten Ganges. Wir setzen zunächst [3])

$$f = \left(\frac{d^v \varphi r}{dr^v}\right)_\lambda,$$

„woselbst φ_r eine, einstweilen noch unbestimmte Function von r bedeutet, und λ eine constante Zahl ist, die nach verrichteter $v$maliger Differentiation von φ_r in dem so erhaltenen Resultate für r gesetzt werden muss".

Auf entsprechende Weise ist nun auch f_{v+1} und f_{v+2} auszudrücken. Erinnern wir uns des Umstandes, dass man diese beiden Functionen resp. als erste und zweite Unterdeterminanten der obigen Determinanten des Zählers und Nenners auffassen kann und dass wieder jede Unterdeterminante ein partieller Differentialquotient der ursprünglichen ist, so finden wir

$$f_{v+1} = \left(\frac{d^v \varphi'_r}{dr^v}\right)_\lambda,$$

$$f_{v+2} = \left(\frac{d^v \varphi''_r}{dr^v}\right)_\lambda,$$

und durch Einsetzung dieser Werte in die obige Gleichung ergiebt sich

$$z^2 \left(\frac{d^v \varphi''_r}{dr^v}\right)_\lambda - 2(v+1)\left(\frac{d^v \varphi'_r}{dr^v}\right)_\lambda + \left(\frac{d^v \varphi_r}{dr^v}\right)_\lambda = 0.$$

Der elegante Kunstgriff, welcher den eigentlichen Kern von Spitzer's Methode bildet, besteht nun darin, dass

$$v\left(\frac{d^v \varphi'_r}{dr^v}\right)_\lambda = \left(\frac{d^v}{dr^v}[(r-\lambda)\varphi''_r]\right)_\lambda$$

gesetzt wird; denn nunmehr geht unsre Gleichung in die folgende über

$$\left(\frac{d^v}{dr_v}[z^2\varphi''_r - 2(r-\lambda)\varphi''_r - 2\varphi'_r + \varphi_r]\right)_\lambda = 0,$$

und dieser Gleichung zu genügen, haben wir offenbar blos die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(z^2 - 2r + 2\lambda)\varphi''_r - 2\varphi'_r + \varphi_r = 0$$

aufzulösen.

Die Grösse λ ist nun völlig willkürlich; es hindert uns also nichts,

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}z^2$$

zu setzen, und wir bekommen so die einfachere Gleichung

$$2r\varphi''_r + \varphi'_r - \varphi_r = 0.$$

Das vollständige Integral ist nach Spitzer[4])

$$\varphi_r = C_1 e^{\sqrt{2r}} + C_2 e^{-\sqrt{2r}},$$

und es ist also der Wert unseres Kettenbruches

$$\psi_\nu = \left(\frac{\frac{d^\nu}{dr^\nu}\left(C_1 e^{\sqrt{2r}} + C_2 e^{-\sqrt{2r}}\right)}{\frac{d^{\nu+1}}{dr^{\nu+1}}\left(C_1 e^{\sqrt{2r}} + C_2 e^{-\sqrt{2r}}\right)}\right)_\lambda.$$

Der angehängte Index besagt, dass nach vollzogner Differention allenthalben

$$r = \lambda = -\tfrac{1}{2}x^2$$

zu setzen ist. Um die willkürliche Constante $C_1 : C_2$ zu bestimmen, setzen wir $\nu = 0$; dann ist

$$\psi_0 = 2 - \cfrac{x^2}{4 - \cfrac{x^2}{6 - \cfrac{x^2}{8 - \cdots}}} = xi\,\frac{C_1 e^{xi} + C_2 e^{-xi}}{C_1 e^{xi} + C_2 e^{-xi}},$$

unter i die imaginäre Einheit verstanden. Nun ist

$$\psi_0 = x\,\frac{J^0_x}{J^1_x},$$

und man erhält so durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für $C_1 : C_2$ den Wert

$$e^{-2xi}\,\frac{J^0_x + iJ^1_x}{J^0_x - iJ^1_x}.$$

Das Schlussresultat ist demnach

$$\psi_\nu = x\,\frac{J^\nu_x}{J^{\nu+1}_x} =$$

$$\left(\frac{\frac{d^\nu}{dr^\nu}\left[e^{-xi}(J^0_x + iJ^1_x)\,e^{\sqrt{2r}} + e^{xi}(J^0_x - iJ^1_x)\,e^{-\sqrt{2r}}\right]}{\frac{d^{\nu+1}}{dr^{\nu+1}}\left[e^{-xi}(J^0_x + iJ^1_x)\,e^{\sqrt{2r}} + e^{xi}(J^0_x - iJ^1_x)\,e^{-\sqrt{2r}}\right]}\right)_{-\frac{1}{2}x^2}$$

Es ist ersichtlich, dass dieser Ausdruck nur für ganzzahlige positive Werte des Argumentes ν brauchbar ist, indem nur in diesem Falle einer νmaligen Differentiation ein bestimmter Sinn innewohnt; indess sind ja gerade auch diese Fälle von besonderem praktischen

Interesse. Unter dieser Beschränkung dagegen gewährt derselbe entschiedene Vorteile. Der Zusammenhang einer Cylinderfunction erster Art mit beliebigem Argument mit den beiden Grundfunctionen

$$J^0_z \quad \text{und} \quad J^1_z$$

ist hier auf eine möglichst einfache Weise vermittelt, indem weiter nichts als successive Ableitung einfacher Exponentialausdrücke erfordert wird. Jedenfalls ist von diesem Standpunkte aus diese Formel den complicirten Summenausdrücken vorzuziehen, durch welche Lommel [5]) jene Beziehungen dargestellt hat, wogegen freilich wieder die letztren sich des nicht zu unterschätzenden Vorzuges erfreuen, für jeden beliebigen reellen Wert des Argumentes zu gelten, und nicht blos den Quotienten zweier Functionen, sondern diese selbst explicit zu liefern.

3) Spitzer, S. 333.
4) Ibid., S. 334.
5) Lommel, S. 4.

XXVII.

Calcul élémentaire du nombre des boulets contenus dans les piles des Arsenaux d'Artillerie.

Par

Georges Dostor.

---

1. Dans les Arsenaux, les boulets de même calibre sont rangés par piles; ces piles sont dites triangulaires, quadrangulaires ou rectangulaires, suivantque, dans la couche horizontale qui constitue la base de la pile, les centres des boulets forment un triangle équilatéral, un carré ou un rectangle.

Le nombre des boulets contenus dans chacune de ces piles se calcule par des formules, qu'on obtient en élevant au carré la suite des nombres naturels

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

et en ajoutant ces carrés. Or le calcul de la somme de res carrés ne se fait d'ordinaire qu'en s'appuyant sur la formule du binôme.

Nous nous proposons de déterminer ces mêmes formules par une méthode élémentaire, qui repose exclusivement sur les procédés de la simple Arithmetique.

2. **Pile triangulairc.** La base est un triangle équilatéral, ayant, par exemple, n boulets de côté; sur cette base est placé un autre triangle ayant $n-1$ boulets de côté; sur celui-ci un nouveau triangle ayant $n-2$ boulets de côté; et ainsi de suite, jusqu'au sommet qui est formé d'un seul boulet. La pile forme une pyramide triangulaire.

La première couche de base, dont le côté est formé de n boulets, contient un nombre de boulets qui est évidemment égale à la somme des termes de la progression arithmétique

$$\div 1.2.3.4 \ldots (n-1).n,$$

dont la raison est 1. On sait par l'arithmétique que cette somme est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Si nous donnons à n successivement toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, nous aurons les valeurs

$$\frac{1.2}{2} = 1 = 1,$$

$$\frac{2.3}{2} = 3 = 1+2,$$

$$\frac{3.4}{2} = 6 = 1+2+3,$$

$$\frac{4.5}{2} = 10 = 1+2+3+4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(n-1)n}{2} = 1+2+3+4+\ldots+(n-1),$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n.$$

Ces nombres expriment les sommes de boulets contenus dans les couches successives de la pile, depuis le sommet qui est formé d'un seul boulet, jusqu'à la base qui renferme $\frac{n(n+1)}{2}$ boulets. Si nous ajoutons ces égalités membre à membre, et que nous représentions par S la somme des boulets contenus dans toute la pile, nous aurons

$$S = 1.n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+\ldots+(n-1)(n-n+2)+n(n-n+1)$$
$$= 1.n+2n+3n+4n+\ldots+(n-1)n+n.n$$
$$-[1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-2)(n-1)+(n-1)n)].$$

La première somme revient à

$$n(1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n) = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

La somme entre crochets, d'après l'inspection du développement, est égale à $2S$ moins $n(n+1)$; par conséquent nous avons

$$S=\frac{n^2(n+1)}{2}-[2S-n(n+1)]=\frac{n^2(n+1)}{2}-2S+n(n+1);$$

d'où nous tirons

$$3S=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{2n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2},$$

et, par suite

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}. \qquad \text{(I)}$$

Cette est la formule qui donne le nombre de boulets de la pile triangulaire.

3. **Pile quadrangulaire.** Cette pile a la forme d'une pyramide quadrangulaire, à base carrée.

Soit n le nombre de boulets contenus dans un côté de la base; sur cette base est placé un autre carré ayant $n-1$ boulets de côté; et ainsi de suite, jusqu'un sommet formé d'un seul boulet. Le nombre S de boulets contenus dans la pile est donc la somme des carrés des n premiers nombres entiers, de sorte qu'on a

$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2.$$

Or il est évident qu'en général

$$n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2};$$

donnant à n successivement les valeurs 1, 2, 3, ... n on trouve

$$1^2=\qquad\frac{1.2}{2},$$

$$2^2=\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2},$$

$$3^2=\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2},$$

$$4^2=\frac{3.4}{2}+\frac{4.5}{2},$$

. . . .

$$n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2},$$

et, en additionnant,

$$S = 2\left[\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{n(n+1)}{2}.$$

La partie entre crochets est la somme des boulets contenus dans la pile triangulaire; en la remplaçant par la valeur (I), on obtient

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2},$$

ou, en réduisant,

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}. \tag{II}$$

4. **Pile rectangulaire.** Elle a pour base un rectangle, que nous supposerons de m boulets d'un côté sur n de l'autre, m étant plus-grand que n. Sur la base est placé un second rectangle de $m-1$ boulets sur $n-1$; et ainsi de suite. La pile se termine non par un boulet, mais par une ligne ou arête de $m-n+1$ boulets.

La pile peut être considérée comme une pile quadrangulaire de n boulets, contre la quelle on a appliqué $m-n$ triangle de $m-n$ boulets de côté. La somme de tous les boulets sera donc

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} + \frac{(m-n)n(n+1)}{1.2}$$

ou

$$S = \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{2n+1+3m-3n}{3}$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{1.2.3}. \tag{III}$$

Cette est la formule connue qui donne le nombre des boulets d'une pile rectangulaire.

En y faisant $m = n$, on retrouve (II).

XXVIII.

Bestimmung der grössten Anzahl gleich grosser Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen.

Von

Herrn Dr. *C. Bender*

in Basel.

Um einen Kreis lassen sich, wie leicht zu finden ist, im Maximum sechs Kreise von demselben Radius legen, die alle sechs den ursprünglichen Kreis berühren. Nimmt man an Stelle der Kreise Kugeln, so gehen jedenfalls längs eines grössten Kreises der mittleren Kugel ebenfalls sechs Kugeln, welche die mittlere Kugel berühren. Diese grösste Kreislinie mag den Namen Aequator führen, indem wir uns zugleich die sieben Kugeln in einer Horizontalebene liegend denken. In der Fig. 1. sind diese sieben Kugeln, von oben gesehen, gezeichnet und die äusseren Kugeln mit den Zahlen 1 bis 6 versehen, den Berührungspunkten dieser mit der inneren Kugel die sechs Anfangsbuchstaben des Alphabets beigegeben.

Die Berührungspunkte der äusseren Kugeln unter sich liegen auf einem Kreis von dem Radius $m\alpha$, welchen man nicht unzweckmässig Festhaltungskreis nennen kann, da er gleichsam die Kugeln unter sich festzuhalten scheint. Bei weiterer Betrachtung hat man die Bezeichnung Festhaltungskreis zu vertauschen mit dem Namen Festhaltungskugel, welche den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller auf die innere Kugel aufgelegten äusseren Kugeln unter sich vorstellt.

Legen wir nun oberhalb der Kugeln 2 und 3 auf die innere Kugel eine andre und zwar die Kugel 7 in der Weise auf, dass sie zugleich mit 2 und 3 tangirt, so schneiden die Kugeln 2, 3 und 7 aus der Festhaltungskugel ein sphärisch gekrümmtes Flächenstück heraus, dessen Bild, soweit es in einfacher Weise geschehen kann, in Fig. 2. gegeben ist. In dieser Figur bedeuten 2α, 3α und 7α die durch das Einlegen der Kugeln 2, 3 und 7 auf der Festhaltungskugel sich zeichnenden sphärisch gekrümmten Flächenstückchen und a, b, c pie Mittelpunkte der letzteren.

Die diese 3 Punkte a, b, c direct verbindenden Linien sind Bogen grösster Kreise und auf jeder derselben liegt der Berührungspunkt zweier von drei hier in Betracht gezogenen Auflegungskugeln.

Aus dem Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks kann man durch Abzug der drei sphärisch gekrümmten Stücke aAC, bAB, cBC das innerhalb liegende sphärisch gekrümmte Stück finden. Ehe jedoch dieses wirklich ausgeführt werde, mögen uns erst einige Vorbetrachtungen beschäftigen.

Geben wir dem Radius der gleich grossen Kugeln die Bezeichnung r, so findet man den Radius h der Festhaltungskugel

$$h = 2r \cos \tfrac{1}{3} R$$

wo die Bezeichnung R einen rechten Winkel vorstellen soll.

Die Oberfläche der Festhaltungskugel ist daher $= 12\pi r^2$ also geradezu dreimal so gross, als die Oberfläche einer jeden der gleichen Kugeln.

Das sphärische Dreieck abc Fig. 2. ist ein gleichseitiges und jeder der drei Bogen entspricht einem Winkel am Mittelpunkte der Kugel von $\frac{2}{3}R$.

Die Grösse eines der drei Winkel, an welchen die Buchstaben a, b und c stehen, leitet sich ab aus der Gleichung:

$$\cos a = \frac{\cos(bc) - \cos(ac)\cos(ab)}{\sin(ac).\sin(ab)}$$

woher

$$\cos a = \tfrac{1}{3}$$

was einem Winkel

$$a = 0{,}78365314 R$$

entspricht.

Der Inhalt J des sphärischen Dreiecks abc wird nun ausgedrückt durch:

$$J = h^2(3a - 2R)$$
$$J = 3\pi r^2(0{,}17547971)$$

Die drei gleichen sphärischen Flächenstückchen aAC, bAB und cCB bestimmen sich jede

$$= \frac{0{,}78365314}{4} \cdot 3\pi r^2(0{,}267949191)$$
$$= 0{,}0524948066 \,.\, 3\pi r^2$$

(Der Ausdruck $3\pi r^2(0{,}267949191)$ stellt hierbei die krumme Oberfläche eines jeden der drei, in Fig. 2. mit a, b, c bezeichneten Kugelhauben vor).

Das sphärisch gekrümmte Flächenstück ABC ist daher:

$$= 3\,\pi r^2 . 0{,}01799529 \cdots\cdots\cdots \text{I.}$$

Nicht alle Kugeln können in der eben betrachteten Weise auf der inneren Kugel aufliegen, was schon daraus hervorgeht, dass der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks abc nicht geradezu in dem Flächeninhalt des Festhaltungskreises mit einer ganzen Zahl aufgeht, auch könnte dies weiter nur dann sein, wenn der oben berechnete sphärische Winkel des Dreiecks abc mit einer ganzen Zahl in $4R$ enthalten wäre, denn in jedem Punkte, in welchem die auf der Festhaltungskugel aufgezeichneten Dreiecke zusammenstossen, müsste bei der entsprechenden ganzen Vervielfachung des Dreieckwinkels, die Bedingung, wonach auch auf der Kugeloberfläche die Winkel um einen Punkt 4 Rechte betragen, erfüllt sein.

Wenn auch schon diese Gründe entscheidend genug sind den Gedanken an die durchgängig gleichmässige Lagerung der aufliegenden Kugeln, wie Fig. 2. darstellen soll, zurückzudrängen, so werden wir noch weiter bestärkt durch die Betrachtung der Fig. 1., in welcher gewissermassen ein Aufbau der äusseren Kugeln um die innere, von oben gesehen, versinnlicht ist. Denken wir uns einmal die Kugel 7, wie schon erwähnt, der Art auf 2 und 3 gelegt, dass eine Tangirung dieser Kugeln statt hat, so können wir unmöglich zwischen 3 und 4 in derselben Weise wieder eine Kugel 9 in gleicher Weise zwischen 4 und 5 legen. Geschieht dies, so müssen notwendig die Kugel 7 und 9 sich berühren und weiter noch die Berührungspunkte der Kugeln 2, 7, 9, 5 auf einem grössten Kreise der mittleren Kugel liegen.

Die in der Fig. 1. angegebene Kugel 8 liegt in der nämlichen Weise oberhalb der Kugeln 1 und 6 auf der mittleren Kugel auf, wie 9 oberhalb 4 und 5, und 7 oberhalb 2 und 3 auf der mittleren Kugel aufliegen. Es lässt sich leicht nachweisen, dass ebenso wol 8 und 9,

als auch 8 und 7 bei dieser Lagerung sich berühren müssen, denn verfolgen wir die Berührungspunkte der Kugeln 1, 8, 9, 4 auf der mittleren Kugel, so müssen diese auf einem Halbkreise eines grössten Kreises der letzteren zu liegen kommen. Da nun ohne Zweifel 1 und 8, ebenso 4 und 9 sich berühren, so müssen notwendigerweise auch 8 und 9 unter sich tangiren, denn auf einem solchen Halbkreise eines grössten Kreises finden nur die Berührungspunkte von vier Kugeln Platz.

Der Nachweis für die Berührung der Kugeln 7 und 8 ist ganz in derselben Weise zu führen.

In der Fig. 1. ist nur die Lagerung der Kugeln oberhalb der Ebene des Papiers aufgezeichnet; von der gerade entgegengesetzten Seite bietet sich uns das nämliche Bild dar.

Nachdem wir in obigem unsere Aufmerksamkeit auf den leeren Zwischenraum gerichtet hatten, welchen die Kugeln 2, 3, 7 in der Festhaltungskugel lassen, wenden wir uns nun zu dem leeren Zwischenraum, welcher in der Oberfläche der Festhaltungskugel von den Kugeln 3, 7, 4, 9 gebildet wird. Hierzu diene Fig. 3. Die dort gezeichneten Kreise 3α, 4α, 7α, 9α stellen wieder kreisförmig begrenzte Stücke des Festhaltungskreises (Kugelhauben) vor, welche man sich so gebildet denken kann, als ob die aus der Festhaltungskugel herausragenden Teile der Kugeln 3, 4, 7, 9 geradezu von der Festhaltungskugel abgetrennt oder abgelöst worden wären. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte dieser Kugelhauben bilden ein gleichseitiges sphärisches Viereck, wovon jede Seite $= \frac{2}{3}R$ ist. Dass diese Verbindungslinien Bogen grösster Kreise der Festhaltungskugel sind, bedarf wol kaum des Nachweises. Der Winkel c des 4Ecks $bcde$ ist leicht zu bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass die Mittelpunkte von 2, 3 und 7 jenes oben Fig. 2. betrachtete sphärische Dreieck abc bilden und die Kugel 2 mit 3 und 4 auf dem sogenannten Aequator liegen. Wir finden daher den Winkel c durch Abzug des oben berechneten Winkels a von $2R$ daher:

$$1{,}21634686\ R$$

Bedenkt man nun, dass die Mittelpunkte der durch die Kugeln 4, 9, 5 auf der Festhaltungskugel gebildeten Kugelhauben das gleiche sphärische Dreieck zeichnen, wie dies in Fig. 2. von den Kugeln 2, 3, 7 näher ausgeführt wurde, und dass weiter Kugel 5 mit den Kugeln 2, 3, 4 auf dem Aequator liegt, so folgt daraus, dass auch die Winkel c und d einander gleich sein müssen.

Denken wir uns die Diagonalen bd und ce gezogen, so finden wir

aus der Congruenz der sphärischen Dreiecke *bcd* und *cde*, dass diese Diagonalen einander gleich sind, woraus weiter folgt, dass

$$\angle b = \angle c = \angle d = \angle e.$$

Der Flächeninhalt des sphärischen 4Ecks *bcde* berechnet sich aus den zwei sphärischen Dreiecken *bcd* und *bed*. Die Winkel *b* und *d* werden durch die Diagonale *bd* halbirt, daher jeder der an *bd* anliegenden Winkel

$$= 0{,}60817343\, R$$

Der Inhalt des sphärischen Vierecks *bcde* ist daher

$$= 0{,}43269372 \,.\, 3\pi r^2.$$

Die Oberfläche eines jeden der Kugelhaubenausschnitte *bBF*, *cBD*, *dDE*, *eEF* ergiebt sich

$$= 0{,}081479793 \,.\, 3\pi r^2$$

woraus als Oberflächengrösse des sphärisch gekrümmten Stücks *BD EF* resultirt:

$$= 0{,}10677455 \,.\, 3\pi r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{II.}$$

Fassen wir die durch das Einlegen der Auflegungskugel in die Festhaltungskugel gebildeten leeren Räume näher in's Auge, so finden wir bei der Lagerung, wie sie in Fig. 1. angedeutet ist, nur Räume von dem Flächeninhalt I. und dem Flächeninhalt II. und zwar 8 der ersteren und 6 der letzteren Grösse. Addiren wir diese zusammen und subtrahiren die erhaltene Summe von der Oberfläche der Festhaltungskugel ab, so bleibt gerade noch Platz übrig für zwölf Kugelhauben, (welche man sich in der bekannten Weise gebildet denken kann) wie nachfolgende Rechnung zeigt:

12 Kugelhauben	$= 3{,}215390 \times 3\pi r^2$
8 leere Räume I.	$= 0{,}143962 \times 3\pi r^2$
6 „ „ II.	$= 0{,}640647 \times 3\pi r^2$
Oberfläche der Festhaltungskugel	$= 3{,}999999 \times 3\pi r^2$

was mit der Formel $12\pi r^2$ übereinstimmt.

Es ist unschwer nachzuweisen, dass keine andre Anordnung ein grösseres Resultat liefert und wir sagen daher:

Auf eine Kugel von beliebig gegebenem Radius lassen sich nicht mehr als zwölf Kugeln von demselben Radius auflegen.

Basel den 25. Mai 1869.

Bemerkung der Redaction.

Der vorstehende Aufsatz schliesst mit einer Behauptung, die unbewiesen bleibt, die aber bewiesen werden müsste, damit die anfangs gestellte Frage entschieden sei. Gezeigt ist nur, dass 12 gleiche Kugeln eine gleiche Kugel so berühren können, dass jede derselben 4 umliegende Kugeln berührt. Von dieser Lage aus sind indes ohne Durchdringung noch sehr vielfache Verschiebungn der 12 Kugeln möglich. Die Frage bleibt bestehen, ob sie sich so verschieben lassen, dass eine 13te gleiche Kugel zwischen ihnen Platz findet. Zur Entscheidung ist sogar die getroffene Anordnung insofern die ungünstigste, als der Kranz um den Aequator den sphärischen Flächenraum, der für die ungerade Zahl 7 ausreichen soll, halbirt. Der strenge Beweis, dass 13 gleiche Kugeln eine gleiche Kugel nicht ohne gegenseitige Durchdringung berühren können, lässt sich führen, ohne eine Verschiebung von mehr als 2 Kugeln auf einmal in Betracht zu ziehen. Um die angeregte Frage zu erledigen, möge er hier folgen.

§. 1. Die Mittelpunkte aller gleichen Kugeln, welche eine gleiche Kugel berühren, liegen auf einer Kugel, deren Radius $= 1$ sei. Auf dieser verbinde man je zwei Mittelpunkte durch einen Normalbogen und tilge von je zwei Normalbogen, die sich schneiden, immer den längsten, falls sie einander gleich sind, einen von beiden. Dann bleibt ein Netz von sphärischen Dreiecken, welches die Kugel einfach bedeckt; die Mittelpunkte sind deren Ecken. Ist nun 13 die Anzahl der Ecken, so ist nach Euler's Satz 11 die Differenz der Bogen- und Dreiecksanzahl. Da sich letztere wie $3:2$ verhalten, so sind sie einzeln 33 und 22. Die Anzahl der Bogen, welche von allen Ecken ausgehen, ist hiernach 66. Folglich gehen mindestens von 1 Ecke mehr als 5 Bogen aus. Das Resultat ist:

Es giebt 13 Ecken, 33 Bogen und 22 Dreiecke; mindestens um 1 Ecke liegen mehr als 5 Dreiecke.

§. 2. Die Bogen sind einer doppelten Beschränkung unterworfen:

1) Kein Bogen ist $< \frac{\pi}{3}$.

2) Kein Bogen ist grösser als die Verbindung der Gegenecken der zwei anstossenden Dreiecke.

Die erste Beschränkung folgt aus der Bedingung, dass sich die 13 Kugeln nicht durchdringen sollen, die zweite aus dem Tilgungsgesetz der Bogen §. 1.

§. 3. Ein sphärisches Viereck $ABCD$ (Fig. 4.) habe eine Seite $AD = 2\beta$, die übrigen $= \frac{\pi}{3}$, die Diagonale $BD = t$, welche den Winkel ADC in $ADB = \varrho$ und $BDC = \sigma$, und das Viereck V in die Dreiecke $ADB = \varDelta$ und $BDC = \varDelta'$ teilt. Sei β constant, t unabhängig variabel; es wird die Variation von V gesucht. Man hat die Formeln:

$$\cos\frac{\varDelta}{2} = \frac{1+2\cos2\beta+2\cos^2\frac{t}{2}}{4\sqrt{3}\cos\beta\cos\frac{t}{2}}; \quad \cos\frac{\varDelta'}{2} = \frac{1+2\cos^2\frac{t}{2}}{3\cos\frac{t}{2}}$$

$$\sin\frac{\varDelta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta\sin\frac{t}{2}\sin\varrho; \quad \sin\frac{\varDelta'}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t}{2}\sin\sigma$$

$$\cos\varrho = \frac{1-2\cos2\beta\cos t}{2\sin2\beta\sin t}; \quad \cos\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$$

Für ein Maximum oder Minimum V ist

$$\partial\varDelta' = -\partial\varDelta$$

Differentiirt man die Cosinus, setzt für die Sinus ihre Werte, erhebt ins Quadrat, und führt auch $\sin^2\varrho$, $\sin^2\sigma$ auf t zurück, so geht die letztere Gleichung über in

$$(\cos t - \tfrac{1}{2} + \sin\beta)(\cos t - \tfrac{1}{2} - \sin\beta)(\cos t + 1) = 0$$

Der letzte Factor kann nicht verschwinden, weil t als Dreiecksseite $< BC + CD = \frac{2\pi}{3}$ ist, der zweite gleichfalls nicht, wofern β zwischen $\frac{\pi}{3}$ und π enthalten ist. Eine Wendung der Variation von V ist daher nur möglich bei

$$\cos t = \tfrac{1}{2} - \sin\beta$$

Differentiirt man zum zweitenmal und setzt diesen Wert ein, so kommt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\sin\frac{t}{2}(3-2\sin\beta)^2}{12\sqrt{3}\sin\beta\cos^3\frac{t}{2}\sin^3\sigma}$$

folglich entspricht der obige Wert einem Maximum. Er ist derjenige, für welchen beide Diagonalen einander gleich werden, das Viereck somit symmetrisch ist.

§. 4. Liegen nun um einen Punkt (0) herum n (und zwar mehr als 5) Dreiecke, gegen einander begrenzt durch n Bogen, die wir Radien nennen wollen, und sind 2 benachbarte Radien (02), (03) $> \frac{\pi}{3}$, so braucht man nur die Endpunkte der nächsten Radien (01) und (04) zu verbinden, so dass von dem ganzen, aus jenen Dreiecken bestehenden $n$eck N ein Viereck (1234) abgeschnitten wird, um das Resultat von §. 3. anwenden zu können. Um N so klein als möglich zu erhalten, müssen offenbar alle Seiten ihren kleinsten Wert $\frac{\pi}{3}$ haben; die Verbindungslinie 2β ist dann $\geqq \frac{\pi}{3}$ und $< 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$. Betrachtet man alle Ecken von N als fest ausser (2) und (3), und verschiebt letztere so, dass sich die Differenz der Diagonalen des Vierecks vergrössert, so wird nach §. 3. das Viereck, folglich auch das $n$eck kleiner. Folglich kann der kleinste Wert erst an der äussersten Grenze eintreten, d. i. wenn (02) oder (03) $= \frac{\pi}{3}$ wird, und man hat den Satz:

Im kleinst möglichen $n$eck, gebildet aus n um einen Punkt liegenden Dreiecken, können keine zwei benachbarten Radien $> \frac{\pi}{3}$ sein.

§. 5. Die Radien (01), (03), (05) (Fig. 5.) und die $n$eckseiten (12), (23), (34), (45) seien $= \frac{\pi}{3}$, die Punkte (0), (1), (5) seien fest, der Punkt (3) unabhängig verschiebbar. Es wird der kleinste Wert des Sechseck (012345) gesucht. Sei

$$\varphi = \text{Winkel } (102) = (203)$$
$$\varphi_1 = \text{Winkel } (304) = (405)$$

dann ist $\varphi + \varphi_1$ constant $= c$, also

$$\partial\varphi_1 = -\partial\varphi \qquad (1)$$

und wenn λ den Winkel (012) = (032), μ den Winkel (034) = (054) bezeichnet, das Sechseck

$$S = 4\varphi + 4\varphi_1 + 2\lambda + 2\mu - 4\pi = 4(c - \pi) + 2(\lambda + \mu)$$
$$\partial S = 2\,\partial(\lambda + \mu)$$

also für ein Maximum oder Minimum S

$$\partial\mu = -\partial\lambda \tag{2}$$

Stellt man gemäss den Relationen

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \cot\varphi; \quad \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \cot\varphi_1$$

λ, μ in φ, φ_1 dar, so gibt Gl. (2) mit Anwendung von (1),

$$\cos^2\varphi = \cos^2\varphi_1$$

Da $\varphi + \varphi_1$ weder 0 noch π sein kann, so gilt allein die Lösung $\varphi = \varphi_1$. Differentiirt man S zum zweiten mal, und setzt dann $\varphi = \varphi_1$, so kommt:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} = -\frac{48\sin 2\varphi}{(1+3\cos^2\varphi)^2} < 0$$

folglich entspricht $\varphi = \varphi_1$ einem Maximum S, und es giebt kein Minimum. Lässt man also φ über φ_1 hinaus wachsen, so wird das $n$eck kleiner, und die Grenze tritt erst ein, wenn der Radius (02) $= \frac{\pi}{3}$ wird, oder die Radien (06), (07), etc. die Grenze der 2ten Bedingung im §. 2. erreichen.

§. 6. Die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten $= \frac{\pi}{3}$ sind; seien $= \alpha$; dann ist

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{3}$$

Die Winkel eines regelmässigen Vierecks, dessen Seiten $= \frac{\pi}{3}$ sind, seien $= \gamma$; dann ist

$$\cos\gamma = -\tfrac{1}{3}, \qquad \text{also} \qquad \gamma = \pi - \alpha$$

§. 7. Hat man nun ein Sechseck, dessen Seiten sämmtlich $= \frac{\pi}{3}$, und dessen Radien abwechselnd $= \frac{\pi}{3}$ sind, und man lässt einen dazwischen liegenden Radius bis auf $\frac{\pi}{3}$ abnehmen, so werden die Winkel der zwei anstossenden Dreiecke $= \alpha$; daher bleibt für die 4 übrigen Dreiecke ein Winkelraum $= 2\pi - 2\alpha$ um den gemeinsamen Punkt herum übrig, so dass bei gleicher Teilung je zwei derselben ein Viereck mit dem Centriwinkel $= \pi - \alpha$ bilden. Dies ist dann nach §. 6.

ein regelmässiges Viereck, also seine Diagonalen, deren eine ein Radius ist, einander gleich. Hiermit ist genau die Grenze erreicht, welche die 2te Bedingung von §. 2. der Grösse jenes Radius gestattet; bei jeder Verschiebung würde ein Doppel-Centriwinkel $< \pi - \alpha$, der ihn halbirende Radius grösser als die denselben kreuzende Diagonale, und man hat den Satz:

Das kleinste aus 6 Dreiecken um einen Punkt herum bestehende Sechseck hat 4 Radien $= \frac{\pi}{3}$ und 2 Radien gleich der Diagonale des regelmässigen Vierecks für die Seite $\frac{\pi}{3}$.

Da jedes der 2 gleichseitigen Dreiecke $= 3\alpha - \pi$, jedes der 2 regelmässigen Vierecke $= 4(\pi - \alpha) - 2\pi = 2\pi - 4\alpha$ ist, so ergiebt sich:

Das kleinste Sechseck ist $= 2(\pi - \alpha)$.

§. 8. Liegen mehr als 6 Dreiecke um einen Punkt herum, so kann man das daraus gebildete $n$eck leicht auf ein Sechseck zurückführen. Im voraus seien alle n Seiten $= \frac{\pi}{3}$ gemacht. Hat es dann benachbarte Radien (02), (03) $> \frac{\pi}{3}$, so verkleinere man es nach §. 4., indem man bei unveränderten Punkten (1), (4) die kleinere der sich kreuzenden Diagonalen (13), (24) verkürzt, bis entweder sie selbst oder einer der Radien $= \frac{\pi}{3}$ wird. Im ersten Falle sondert die Diagonale ein gleichseitiges Dreieck vom $n$eck ab, und dieses hat dann eine Seite weniger. Dies wiederhole man, bis entweder nur ein Sechseck übrig bleibt, oder keine benachbarten Radien mehr $> \frac{\pi}{3}$ sind. Ist im letztern Falle die Seitenzahl noch > 6, so bildet mindestens einer der Radien $> \frac{\pi}{3}$ zu beiden Seiten mit zwei Radien $= \frac{\pi}{3}$ Winkel $\overline{\overline{<}} \frac{2\pi}{7} < \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, also letztere Radien mit einander einen Winkel $< \pi - \alpha$, folglich ist nach §. 6. der mittlere Radius grösser als die ihn kreuzende Diagonale; diese schneidet wieder ein Dreieck ab, und man kann so lange fortfahren, bis nur ein Sechseck übrig bleibt. Die abgesonderten Dreiecke sind nie kleiner als ein gleichseitiges. Das Ergebniss lautet:

Ein sphärisches $n$eck, gebildet aus mehr als 6 um einen Punkt herum liegenden Dreiecken, ist nie kleiner als das kleinste Sechseck plus $(n-6)$ gleichseitigen Dreiecken.

§. 9. Was die übrigen Dreiecke betrifft, so können diese zwar kleiner als die gleichseitigen zur Seite $\frac{\pi}{3}$ sein, aber nur wenn ein Winkel $> 2\alpha$ ist; denn einen Rhombus, den eine Diagonale in zwei gleichseitige Dreiecke teilt, teilt die andre in zwei Dreiecke mit den Winkeln 2α, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$. Käme nun im gesammten Netze ein solches Dreieck vor, so hätten zwischen den Schenkeln des stumpfen Winkels 2 gleichseitige Dreiecke Platz; man könnte daher den Gesammträum der umliegenden Dreiecke immer vermindern, indem man statt der langen Dreiecksseite die Halbirungslinie des stumpfen Winkels in der Länge $= \frac{\pi}{3}$ zur scheidenden Dreieckseite machte, und die 2 Dreiecke zwischen den 3 Schenkeln wären dann noch immer jedes grösser als ein gleichseitiges. Man kann daher, wenn man stets die günstigste Lage für alle Punkte wählt, in der Tat $3\alpha-\pi$ als den kleinsten Wert eines Dreiecks ansehen.

§. 10. Nach dem Vorstehenden ist der kleinste Raum, den die 22 Dreiecke einnehmen würden, nicht kleiner als das kleinste Sechseck $=2(\pi-\alpha)$ plus dem 16fachen gleichseitigen Dreieck $=16(3\alpha-\pi)$, das ist nicht kleiner als

$$46\alpha-14\pi$$

Nun ist

$$\alpha = \arccos\tfrac{1}{3} = 0{,}7836532 \text{ Rechten}$$

$$46\alpha = 36{,}04805 \text{ Rechten}$$

$$14\pi = 28 \text{ Rechten, also}$$

$$\text{das Netz} \geqq 8{,}04805 \text{ Rechten.}$$

Hiernach würden die 22 Dreiecke bei jeder Anordnung mehr als die Kugelfläche bedecken, folglich können 13 gleiche Kugeln nicht ohne gegenseitige Durchdringung eine gleiche Kugel berühren.

XXIX.

Fünf ungedruckte Briefe von Gemma Frisius.

Nach den Originalen in der Universitätsbibliothek zu Upsala

herausgegeben von

Maximilian Curtze,

Gymnasiallehrer zu Thorn.

Die unten abgedruckten fünf Briefe des bedeutenden belgischen Mathematikers und Arztes Gemma Frisius befinden sich in einer zwei Bände umfassenden höchst interessanten Sammlung von Briefen fast ausnahmlos gerichtet an den bekannten Freund des Copernicus, Johannes Dantiscus [1]). Diese Sammlung wird in der Universitätsbibliothek zu Upsala aufbewahrt, war behufs Benutzung bei den Arbeiten zur Säcularfeier des Copernicus auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers dem Copernicus-Verein zu Thorn auf längere Zeit leihweise überlassen worden, und ich benutzte die Zeit ihrer hiesigen Anwesenheit die fünf Briefe, welche sich in ihr von dem genannten Mathematiker befinden, zu copieren. Sie hatten für mich doppeltes Interesse. Einmal geben sie über einige dunkle Puncte im Leben des Schreibers Aufschluss, bringen also eine willkommene Bereicherung des Abschnittes, welchen A. Quetelet in seiner Histoire des sciences mathématiques chez les Belges [2]) unserm Autor widmet, andrerseits haben zwei derselben Beziehungen auf Copernicus und dessen neues Weltsystem, und sind von hohem Interesse für die Geschichte desselben. Dies ist der Grund, der mich bewog sie hier abdrucken zu lassen. Die nöthigen Erläuterungen werde ich den Briefen selbst nachfolgen lassen. Ich bemerke nur noch, dass ich grosse

und kleine Buchstaben nach moderner Weise gebraucht habe, ebenso die Interpunction; anlautendes *v* statt *u* habe ich nicht beibehalten, ebenso ist innerhalb eines Wortes *u* und *v* nach moderner Weise gesetzt worden. Im Uebrigen ist die Orthographie des Verfassers beibehalten.

1) Iohannes Dantiscus hiess eigentlich Iohannes Flaxbinder. Er war geboren zu Dantzig, und nannte sich theils Linodesmus, theils von seinem Geburtsorte Dantiscus. Ursprünglich nicht Geistlicher war er längere Zeit Gesandter des Königs von Polen am Hofe des Kaisers Karl V. Mit ihm zog er in allen Ländern umher, wo dieser sich aufhielt, war längere Zeit in Spanien, wo er Kinder hinterliess, von denen sich auch Briefe in der erwähnten Sammlung finden, dann in den Niederlanden u. s. fort. Später wurde er Bischof von Kulm, von 1537—1548 Bischof von Ermland (Warmia), als solcher starb er. Genaueres über Dantiscus findet man in der Ermländischen Litteraturgeschichte des Prof. Hipler p. 162 u. ff.

2) Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges par Ad. Quetelet. Nouvelle édition. Bruxelles, C. Muquardt 1871. 2 Bltt, 479 S. gr. 8°. — p. 78—89.

I.

[1531, 7. Aug.[1]].

Salutem et servitutis meae commendationem. Fortassis malo meam tam diuturnam absentiam a D^ni^. V. R^ma^. accipi metuebam, atque ob id has turbulentas manu trepidante, cerebro disperso congessi, petens me quàm optimè purgatum haberi apud D^m^. V. Neque enim meae negligentiae imputari iuste potest, quod vel ipse Campensis (cui Dn̄atio Vestra plurimum confidit) atque alii non parvi ponderis testabuntur. Sed, ut demum brevissimis causam absolvam, venissem die Sabbatti transacta, nam tum expeditus quidem fui negociis mihi commissis, sed impeditus morbo certe non levi, qui me corripuerat vix a limine mansionis D^nis^. Vestrae digressum atque huc usque vana spe detinuit. Nunc ostenso medicis lotio dicunt illi me in ambiguo esse sive in discrimine vitae, nam epar meum usque adeo est incensum, ut vix restingui possit, et si proficiscendum mihi sit vel paululum, maius imminere periculum. Mitto igitur ad D^em^. V. R^am^. cumulum librorum, quos in catalogo nostro mihi praescripserat, adsignato precio. Desunt tamen quattuor vel quinque, quos hic invenire non potui, et, si placet D^ni^. Vestrae precium, potest eos servare. Ego vero cogor adhuc quattuor vel quinque diebus hic decumbere, donec videre, quod Deus mecum agere velit, neque enim diu durare potest, quin me vel Deo vel vitae reddet. Si vero D^io^. Vestra mihi pro me, medicis et

medicinis vellet mittere unum vel duos philippeos, vel quantum ei placeret, bene mecum ageret, et si morior, gratiam a Deo accipiet; si vivam, non ero ingratus. Ex Lovanio 7°. Augusti 1531.

V^{rae}. Dn̄is R^{mae}.

Humillimus servus Gemma Phrysius.

R^{mo} in Christo pro D. Ioanni
Dantisco, Ep̄o Culmensi, Oratori
Regis Poloniae.

1) Diese Angabe steht, wie bei den anderen Briefen, in dem Originalbriefe offenbar von dem Bibliotheksbeamten hinzugefügt.

II.

[1536, 1. August.]

R^{me} in Christo pater ac Domine salutem ac officiorum meorum commendationem. Iam dudum est, quod R^{ma} D. V. mihi mandaverit, ut frequentius scribam, precipue vero de statu meo, anne ego unus sim futurus, quem matrimonii poenitudo non ceperit aliquando: cui sane quod respondeam, non habeo aliud, quam quod cecinit ille:

Qui fit, Maecenas, ut nemo, quam sibi sortem
Seu ratio dederit, seu sors obiecerit, illa
Contentus vivat? laudet diversa sequentes?

Nam ut olim solutus vincula haec summopere et cupivi et sectatus sum ita nunc contra solvi sensus quidem appetunt, verum ratio aliud dictat. Video enim eam esse nostram imperfectionem, ut nusquam animus acquiescat, quamdiu hoc in corpore detinetur. Quam ob causam oro, nisi, quod nihil in rerum natura est, quod ante finis sui adeptionem conquiescat? Cum ergo animus noster nunquam, dum hoc carcere clauditus, finem suum consequi queat, non mirum est, eam tam varia appetere, quaerentem scilicet quem non invenit finem et regimen. His consideratis satius videtur tedium hoc vitae aut fluctuationem potius quacunque data conditione aequo ferre animo, quam in dies mutatis sortibus novos sentire cruciatus. Quid igitur sentiam, quaeris. Sane contentus sum mea sorte, quia nusquam tranquillitatem inveniri sciam; tedet rursus ex communi et omnibus innata imperfectione. Habet R^{ma}. D. V. meam de statu meo sententiam, quam pro Suo candore interpretari velit.

Gemma Margaritam genuit, quae iam parentem tatat; istud quidem R^{mae}. D. V. non fore ingratum arbitratus significare non dubitavi.

De bello cuius hic maximus apparatus est et maxima fama nisi existimarem R^mae^. D. V. per claros vires significatum esse, scriberem, sed rumores etiam ad nos incerti sunt, quare uno atque altero haec percurram. Caesar tribus ex partibus Galliam aggreditur. Ipse circa Galliam Narbonensem, quam Delphinatum vocant, maximo exercitu Alpes aut transgressus est aut conatus in dies transgredi. Cepit duo triave oppidula. Coniunx a Pyrenaeis montibus instat, de hac nihil ad nos pervenire potest, nostri circa Hannoviam oppidum obsederunt ducem Guise. Dux est D. de Nassau.

Nihil tum factum adhuc est per nostros, nam in dies eorum numerus crescit.

Anglus pro suo arbitrio omnia administrat.

Vxorem secundam gladio interemit cum fratre ac aliis nobilibus; ferunt omnes innoxias illos fuisse et crimine vacasse.

Vix elapsis 24 horis aliam duxit.

Haec sunt, quae mihi scribenda visa sunt, ut omni ex parte R^ma^. D. V. meam sentiat obaedientiam. Velim oratam D. V. R^am^., ut mihi mittere dignaretur et suam et Regis genituram vel saltem tempus, quod mihi sat est [1]). Iuvat enim his rebus non nunquam tempus fallere. Nam reliquum tempus medicinae impartior, in qua iam gradum adeptus sum atque deinceps artem peto.

Dominus noster, Iesus Christus, D^m^. V. R^mam^. quam diutissime incolumem et prosperum conservet, cui me quam plurimum commendo eiusque fratribus, D. Georgio ac D. Bernhardo, totique familiae [2]). Ex Lovanio, Kalendis Augusti 1536.

R^mae^. D^nis^. V^rae^.

deditissimus famulus
Gemma Frisius.

R^mo^ in Christo patri D. Ioanni
Dantisco, Ep^o^ Culmensi, patro-
no suo clementissimo.

1) Wir sehen hieraus, das Gemma sich auch mit Astrologie beschäftigte.
2) Die hier genannten Brüder des Dantiscus, scheinen unbekannt zu sein.

III.

[1539, 12. Dec.].

S. P. et officiorum meorum commendationem. Non potui committere, Praesul Reverendissime, quin data hac tanta oportunitate nuncii aliquid de meo ac nostratium statu ad R^am^. D. T. transscriberem, cui spero non ingratum fore aut saltem non molestum inter arduas occupationes aliquid estiam nostrarum nugarum admittere. Sane mihi longe omnium gratissimum hac tam longa temporis et locorum intercapedine fuit audire certi aliquid de R^ma^. D. V^ra^., quam multi etiam praeclari viri, iique R^mae^. D. V. non solum noti sed et familiarissimi iam dudum e vivis excessisse contenderunt, adeo ut et me fere in eadem opinione pertraxerint. Sed suspitione homo et metu discussit D. Iacobus a Borethen R^mae^. D. Vestrae (ut audio) amicus, qui nos non parum exhilaravit. Quod nunc vero ad statum rerum mearum attinet, ego arte medica victum quaerito, artes vero mathematicas non nihil sepono ita ingente rerum nostrarum conditione, quae quaestuosam magis requirunt quam iucundam artem. Vxor mea sicut vitis abundans in lateribus domus meae et filii sicut novellae in circuitu mensae. Esse sic benedicatur homo, qui timet dominum! Filius tamen nunc unicus superstes est, alter in divorum numerum relatus, tertiam vel filiam expecto in mensem, Deo iuvante. Vtinam R^am^. D. Vestram possem ad suscipiendam prolem orare! Sperarim impetraturum id me (quae eius est humanitas) non difficulter. Reliqua nostri status utrumque habent.

Novarum rerum hic magna satis copia. Expectamus in dies adductum Caesaris, quem iam in Gallia esse non est dubium. Eccipietur cum triumpho Parhisiis decima quinta huius mensis (enim confidit Gallo), inde recta ad nos migraturus. Gaudavum maximus excitavit tumultus adversus aulam Reginae. Exactiones solvere, noluit, sed miltes exhibere, magistratum omnem munit, vectigalia renuit; nunc tamen usque ad Caesaris adductum pacata sunt omnia. Traiecti Mosae praetor et consul una nocte per tumultum miserrime occisi sunt, cadavera in platea relicta plus 24 horis. Causam non caperet epistola, nec tempus admittit, adeo mihi ex insperato haec oblata est scribendi occasio. Rex Angliae duxit in uxorem filiam Ducis Cliviae [1]; Gheldriam adhuc obtinet Dux Cliviae iunior, nam senior obiit, quem ad modum et Dux Gheldriae, Dominus de Nassau, Coredmatis exeredus Dns de Buri ac plures alii. Item Barlandus noster et Goelenius, Lovaniensis Academiae duo lumina. Professor Latinus nunc est Petrus quidam nominis non vulgariter eruditus, verum non aeque facundus.

His paucis R^am^. D. V^am^. Deo optimo maximo commendo, qui eam quam diutissime sospitem servat. Lovanii 12^a^. Deceb. 1539.

R^mae^. D. V.

Paratissimus Gemma Frisius.

Reverendissimo in Christo Patri et Domino D. Ioanni Dantisco Warmiensi Episcopo Dignissimo etc. Domino suo et Maecenati colendissimo.

Der Brief hat das praesentatum XVII. Marcii 1540, das wohlerhaltene Siegel ist eine Gemme mit den Köpfen des Castor und Pollux.

1) Man beachte hier den Unterschied in der Nachricht über die Heirath Heinrich VIII von England mit Anna von Cleve und der Nachricht in Brief II über die Hinrichtung der Anna Boulein.

IIII.

[1541, 20. Iulii].

Videris, Praesul Ornatissime, non iniuria queri de me, quod postremis D. T. scriptis ne qui quidem responderim. Neque ego commode me unquam purgare possem, si aut negligentia aut quodam animi fastidio id commisissem. Verum quandoquidem animus mihi bene conscius est, quantis quamque variis distractus fuerim hactenus curis, maiori longe animo minorique verecundia rursus audeo ad D. T. R^am^. importunius scribere, si tum importunum dici meretur, quod ipse pro tua humanitate prior poscis. At quas (inquies) curas mihi narras homuncio, cui neque res publica commissa est, neque principis valetudo? Sane non minori cura passer sibi nidum extruit pullosque educat, quam vel aquila vel struthiocamelus; maiori interdum negocio rusticus casulam extruxit humilem, quam princeps sumptuosa quantumvis palacia. Id adeo mihi evenit, ut mea quodvis exigui momenti negociola tantum mihi facessant negocii, quantum forte D. T. R^mae^ gravissimi rerum status. Haec eo dico, Praesul Ornatissime, ut tanto facilius tibi sim purgatus, persuasumque D. T. sit, non ex negligentia commissum esse, cur minus quiquam amantissimis D. T. scriptis descripserim, sed variis multisque et mihi saltem gravibus curis id adscribas velim. Profecto non ad modum sunt exigui momenti (mea sententia) tot hominum valetudines, quas in dies curare habeo. Quanquam enim non sint principes aut heroes omnes, non tamen minus

diligentia illis debeo quam vel maximis ducibus, cum eaque magno constet Christo, Domino nostro, eorum vita atque regis potentissimi. At nunc Dei benignitate remissa est nonnihil sevities morborum, qui hic et maximi et non pauci grassati sunt annum fere totum multosque e medio sustulerunt, quanquam ne decimus quisque succubuerit eorum, qui morbo detenti gravissum (sic!) decubuerunt. Itaque nunc et copiosius et liberius scribo R^mae^. D. T., quo et possem damnnm resarcire (si quod passa est in me tua benevolentia), deleaturque posthaec omnia negligentiae suspitio: quodvis etiam nunc incubat labor novaque molestia anhelanti ad doctoratus lauream, quae Deo favente tertio Kalendis Septembris celebrabitur. Atque utinam ita tulisset rerum conditio, ut huic festo licuisset adesse R^mae^. D. Tuae! Deum immortalem, quantum claritatis habiturus fuisset dies ille! Sed ferendum est quod mutari non potest.

Eustachium [1]) insignis probitatis neque minoris eruditionis iuvenem, lubens amplector gestioque, si per facultatulas meas liceret demonstrare illi, quem erga eum gero animum: licet sperem hac in re nihil opus ipsum habere meis subsidiis. Videtur sane ad poesim natus atque in ipso Helione enutritus, ita fluunt tanquam de flumine versus. Certe videntur fato quodam Musae, relictis Pegasi fontibus, in Sarmatiam commigrasse, allectae nescio qua aut dulcedine soli aut potius incolarum genio, ac propulsae ex consuetis Parnassi sedibus barbariae insueta Graecorum istuc profugisse. Atque ut de aliis nunc taceam, ipsa sane Vrania sedes ibi fixit novas, novosque suos excitavit cultores, qui novam nobis terram, novum Phoebum, nova astra, immo totum aliud apportabunt orbem. Et quidni novum, cum hactenus ignotum prorsus et incertum depictum limitibus orbem, iam deinceps tanquam e coelo asportatum notissimum simus habituri? Quot enim erroribus, involucris, labyrinthis, quot denique enigmatibns plusquam Sphyngicis involutam habuimus nostram Astrologiam! Ego sane multa possem enumerare, quae nunquam mihi satis facere potuerunt. Quale est, quod Martis motum saepe a calculo, vel exactissimo secundum tabulas, tribus signiferi partibus abesse observaverim; quod Lunae magnitudo non tantum varietur ad nostrum conspectum, quantum notant gravissimi huius artis authores; quod anni quantitas nunquam inventa sit exacte, conformis veritati. Nihil nunc dicam de motu firmamenti et apogiorum qui, ut ne umbram quidem habuit veritatis, ita omnibus ridiculus approbatus; omitto etiam plura alia de omnium fere stellarum longitudine et latitudine, ne D. T. R^mae^. obstrepam incivisius. Haec si reddiderit auctor ille vester sarcta et tecta (id quod maxime animus praesagit ex eo prooemio, quod praemisit [2])), nonne hoc est novum dare terram, novum terram, novum coelum ac novum mundum? Neque ego nunc disputo de hypothesibus, quibus ille utitur pro

sua demonstratione, quales sint, aut quantum veritatis habeant. Mea enim non refert terramne dicat circumvolvi, an immotam consistere; modo syderum motus temporumque intervalla habeamus ad amussim discreta et in exactissimum calculum redacta. Sola me mora omnium pessima habet; cupio enim iamiam videre huius negocii finem, et non pauci sunt passim viri eruditi, quibus non minor inest animi cupiditas haecce videndi, quam mihi. Quapropter, Ornatissime Praesul, non parum mereberis gracie cum apud infinitas haud infimae doctrinae viros, tum apud posteros omnes, si (quod tibi arbitror neque grave esse neque arduum) calcaribus tantum usus hoc opus promoveas. Non te latet enim, qua ratione saepe accidat a decessis auctoris (sic!), ut libri, opera, supellex, denique tota diripiantur abeantque in oblivionem, quae alioqui multis ex usu essent futura.

Scis arbritor, Dignissime Praesul, de quo [3]) loquar, nam et mihi praesenti olim de hoc authore celebri fecisti mentionem cum de terrae coelique motu inter nos conferremus [4]). Quod superest, me D. T. R^mae^. quam commendatissimum esse cupio, precoque Deum optimum maximum, ut D. T. R^mae^. dignetur quam diutissime sospitem servare.

Lovanii, Decimotertio Kal. Augusti 1541.

D. V. R^mae^. deditissimus
Gemma Frisius.

R^mo^. in Christo Patri et Domino
D. Ioanni Dantisco Episcopo Varmiensi, Patrono suo Colendissimo.

Der Brief hat das Praesentatum Varmiae IX Aprilis. Sigel fehlt.

1) Eustachius ist Eustachius von Knobelsdorff der auf Kosten des Dantiscus in Loewen und, nachdem er eigenmächtig nach Paris gegangen war, dort studierte. Später hatte er eine hohe Stelle am bischöflich Ermländischen Hofe.

2) Unter dem prooemium, quod praemisit kann im Jahre 1541 nur die Narratio prima des Rheticus verstanden werden, da das Buch des Copernicus erst 1542 zum Druck kam; während 1540 und 1541 schon zwei Ausgaben der Narratio prima erschienen waren. Es wäre sogar anzunehmen, dass Gemma durch Dantiscus selbst ein Exemplar der ersten Ausgabe, die in Danzig erschien, zugesendet erhielt, und der vorliegende Brief wäre dann die Antwort darauf.

3) Das Wort quo ist im Original unterstrichen und von einer spätern Hand an den Rand geschrieben „Nicolao Copernico haud dubie“.

4) Dantiscus hatte, wie auch anderweit bekannt ist, auf seinen vielen Reisen mit Kaiser Karl V überall von den neuen Theorien seines Freundes Copernicus die Kunde hingebracht.

V.

[1543, 7. Apr.].

Reverendissime Domine, salutem et officiorum meorum commendationem. Vix tandem legi, R^{me}. D^{ne}., summo desyderio, longoque temporis tractu expeditas R^{mae}. D. V. literas plenas in me amoris et benevolentia, pro quibus ne Croesi quidem divitias (ut ita loquar) in praesentiorum mihi concessas velim, quanquam enim aliqua in parte argumentum satis triste tractant, ubi scilicet manum illam tot heroibus notissimam, ac regibus quoque adamatam adeo languere narrant, ut iam sine vicario nihil agere possit. Altera tamen parte maximum mihi exemerunt metum et insigni perfunderunt gaudio. Iam dudum enim apud nos increbuerat rumor, et nonnullis quoque persuasit longum silentium R^{am}. D. Vestram simul et scribere et vivere desiisse. A qua suspitione liberati serio nunc exultamus, et ut eandem R^{mam}. D. V. longa et meliori valetudine donare velit is, in cuius manu sortes nostrae sunt, precamur ex animo.

Apud Generosum et Nobilem D. Oratorem Serenissimi regis Vestri caenavi nuper in aedibus Magnifici Dni Cornelii Scepperi, forte Bruxellam vocatus ob malam valetudinem Illustris Dni a Prato; ac tum mea omnia, quae parum ipsi Dno Christophoro usui esse possunt, in promptitudinis animi mei signum, ut debui, obtuli, cui sane nomine R^{mae}. D. Vestrae obsequium aliquod praestare cuperem. Sed revertenti mihi post tres dies Lovanium interea videre nunquam ipsum contigit, itaque non potui pro animi voto meam erga R^{am}. D. V. voluntatem declarare. Si tamen nepotes R^{mae}. D. V. contigerit huc ad nos pervenire, id quod summopere desydero, spero effecturum me, ne vana videri possit haec mea pollicitatio. De statu vero temporario nostrae Academiae tantum R^{mae}. D. V. significandum statui, doctores nos habere in quovis disciplinarum et artium genere excellentes. In iure civili D. Ioannem Hazium, D. Amicum et D. Gabrielem, viros omnes non minus facundos quam eruditos; in Canonibus D. Dominicum, D. Michaelem Druysium et Licentiatum Wilmarum Bernardum, quorum et vita doctrinae excellentiae respondet; theologorum vero (quos merito primo ordine recensere debueram) magnus est apud nos et numerus et splendor. Inter quos acutior videtur et senior M. N. Iacobus Latomi. Sed quid ego caecus de coloribus? Doctores tandem medici aliqui hic plures sunt quam cognoti, et fuerunt plures quam auditores. Sed in dies quoque nomen claritasque scholae medicae Lovanii sese ad sydera tollit; accessit enim nuper per Magistratum Lovaniensem instituta nova medicinae lectio praeter consuetas, cepimus quoque

anatomen celebrare, id quod hactenus plane neglectum fuit magno auditorum detrimento, nos quoque pro nostra tenuitate mathemata hic quadragesima cepimus declarare, ac in dies satis frequenti auditorio perficimus.

Quod ad impensas annuas attinet, non est respondere facile. Sunt enim variae apud nos classes, varii ordines. Quisque pro sua et dignitate et precio diverse accipitur. Sunt, qui in Paedagogiis victitant 36 aureis cardis, hoc est 18 ducatis; sunt in eisdem Paedagogiis alterius classis convictores, qui 24, sunt qui 25 ducatos annue pendunt. Simili quoque ratione apud Doctores aut alios viros doctos vivitur. Maxima vero ex parte et passim hac tempestate 25 ducatis victus emitur. Novi quoque alios, qui in Doctorum aedibus 30 ducatos pro victu numerant. Victus vero nomine cibum, potum, cubicula et lectum tantum numeramus; ligna, candelas, vestitus aliaque huius modi propriis quisque sumptibus sibi componere debet. Sed tanta est apud nos bellorum tumultuatio, ut non videam, qua via nepotes R^mae^. D. V. ad nos perrumpere possint. Anno elapso Geldrenses et Clivenses Regis Galli instinctu et nomine totam Brabantiam fere per insidias occuparunt. Quo tempore et ego pro moenibus quatriduum adstiti iam factus miles non admodum voluntarius, vidique hostes bombardarum nostrarum globis disiectos et strenue repulsos. Vnde tunc cecini·

Vicimus auxilio Christi post vincula Cephae!

Sed haec iam apud R^am^. D. V. notissima esse arbitror, potuissem alioquin ingens volumen harum rerum narratione implere, neque adhuc finis aliquis apparet, sed tantum progymnasmata quaedam videntur prae (sic!), ut nunc omnia furorem Martium referunt, omnia sursum deorsumque volutant. Sed dabit Deus his quoque finem spero!

Opus illc mathematicum Summi viri D. Nicolai Copernicii summo desyderio expecto, quod impressum iri D. Eustachius mihi narravit; Sed et sub prelo esse iam nunc referunt nonnullorum monimenta virorum ex Germania prodeuntia [1]). Et commodum sane nunc hoc opus exoritur, ut occasum tanti viri perpetua luce illustret, quamquam optem viro illi nestoreis annis digno vitam opere suo durabiliorem, quam ut R^mae^. D. Vestrae et illi concedat Deus optimus maximus quotidianis precibus oro. Uxor mihi charissima (sic!) Barbara nomine, neque re Latina vel Graeca, sed humanissima, ut amplexibus meis gandet, ita amplexum amicitiae R^mae^. D. V. summopere desyderat, veteres

quoque R^mae^. D. V. clientuli quam commendatissimi R^mae^. D. V. esse cupiunt. Ex Lovanio VII. Aprilis Anno M. D. XLIII.

Reverendissimae D. Vestrae obsequentissimus
Gemma Frisius.

Reverendiss^o^. in Christo Patri ac Domino Dn̄o Ioanni Dantisco Episcopo Warmiensi etc^a^. Dn̄o & patrono suo Colendissimo.

Dieser Brief hat dasselbe Siegel wie No. III. und ist praesentirt XXII Maii, also zwei Tage nach dem Tode des Copernicus.

1) Wenn unsere oben ausgesprochene Meinung über das prooemium, quod promisit richtig ist, so können die monimenta die hier erwähnt werden nicht die Narratio prima bedeuten, wir wissen aber bis jetzt nichts davon, dass ausser dieser Narratio vor dem Erscheinen der Revolutiones noch Weiteres über Copernicus im Drucke erschienen sei. Unter monimenta kann man füglich aber kaum blosse Briefe verstehen; wo sind dieselben nun hingekommen?

Folgen wir Quetelet in dem Teile seines oben erwähnten Werkes, welcher von Gemma Frisius handelt, so geben unsere Briefe manchen neuen Aufschluss über das Leben dieses Mannes, aber auch Berichtigungen falscher Angaben. Gemma war zu Dokkum in Frisland am 8. December 1508 geboren. Jung verwaist kam er nach Gröningen, wo er seine ersten Studien machte; von dort bezog er die Universität Loewen und zwar hielt er sich im Gröninger Collegium auf. Schon 1530 veröffentlichte er seine Ausgabe der Cosmographie des Apianus; 1531 zeigt ihn unser 1. Brief schon in engen Beziehungen mit Iohannes Dantiscus, dem damaligen Gesandten des Königs von Polen am Kaiserlichen Hofe. Gemma ist gefährlich krank und bittet Dantiscus um Beisteuer zur Bezahlung der Kosten seiner Krankheit. Dass ihm diese Bitte gewährt wurde, dürfte wohl anzunehmen sein, da die nachherigen Briefe sich sonst nicht wohl erklären lassen. Wann Gemma geheiratet, erfahren wir auch durch unsere Briefe nicht, wohl aber den Namen seiner Frau, sie hiess Barbara. Dass er Anfangs seiner Ehe nicht gerade sehr glücklich gelebt zu haben scheint, trotzdem er den ihm am 28. Februar 1535 geborenen Sohn als eine ihm geborene Perle (margaritam) bezeichnet — ein recht hübsches Wortspiel —, geht aus dem ersten Abschnitt des Briefes No. II. deutlich hervor. 1539 muss er schon wenigstens drei Kinder gehabt haben, ein Knabe war ihm schon gestorben, dass ihm aber auch mehr als der eine bekannte Sohn Cornelius Gemma

geblieben ist, zeigt der Schluss des fünften Briefes von 1543, denn die veteres clientuli, die sich dem Bischofe Dantiscus empfehlen, sind offenbar die schon erwachsenen Kinder des Schreibers. Gänzlich falsch ist die Angabe Quetelets über das Jahr, in welchem Gemma die medicinische Doctorwürde erhielt. Er sagt: „Vers „l'âge de quarante-deux ans, Gemma reçut le titre de „docteur en médecine à l'université de Louvain, et il „commença à remplir dès cette époque les fontions de „professeur dans le même établissement[1])“, das wäre also im Jahre 1550. Unser Brief No. IIII. zeigt dagegen, dass Gemma am 30. August 1541, also neun Jahre früher, die medicinische Doctorwürde erlangt hat, schon 1536 hatte er, wie der Schluss von Brief No. II. zeigt, den Magistergrad in der Medicin erworben, und hatte als Arzt seinen Lebensunterhalt gesucht, dagegen, wie er in Brief No. III. selbst sagt, die Mathematik bei Seite gesetzt „ita urgente „rerum nostrarum conditione, quae quaestuosam magis „requirunt quam iucundam artem“. Mit der Angabe unsrer Briefe stimmt Poggendorffs Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch, denn dieses sagt unter dem Stichwort Gemma-Frisius „Arzt und seit 1541 Professor der Medicin an der Universität zu Loewen“, dass aber auch diese Angabe ein Irrthum ist, zeigt wieder unser Brief V., denn darin sagt Gemma selbst: „nos quoque pro nostra tenuitate mathemata hic quadragesima cepimus declarare, ac indies satis frequenti auditorio perficimus“. Er war also seit den vierziger Jahren, das heisst doch wohl quadragesima, Professor der Mathematik; wäre er 1543, wo der Brief V. geschrieben ist, Professor der Medicin gewesen, so würde er dies sicherlich seinem Freunde Dantiscus, der ihn ja um Rath gefragt hatte, angegeben haben. Dass Gemma später Professor der Medicin war, scheint sicher, wenigstens hat der Titel der 1553 neu aufgelegten Ausgabe der Cosmographia Petri Apiani[2]) die Bezeichnung per Gemmam Frisium apud Lovanienses medicum et mathematicum insignem. Er starb am 25. Mai 1555.

Die Bemerkungen über das Copernianische Werk sind sehr interessant. Sie zeigen das hohe Interesse, das Gemma an den Untersuchungen des Copernicus nahm, aber auch recht schlagend die Nothwendigkeit der Reformation der Astronomie. Ich mache ausserdem noch auf die für die Culturgeschichte besonders werthvollen Aufschlüsse über die Loewener Universität und die damaligen Preise der Wohnungen für die Studirenden aufmerksam, welche der Brief No. V. enthält.

Thorn, 30. März 1874. M. Curtze.

1) Wahrscheinlich hat Quetelet schreiben wollen trente-deux ans. Hier will ich noch auf eine andere Unaufmerksamkeit Quetelet's aufmerksam machen. S. 86 schreibt er: Ce fut Cornelius Gemma qui mourut de la perte „en 1558, en même temps que son ami P. Beansardus" dagegen sagt er S. 89 er sei 1578 gestorben. Beides ist falsch; er starb 12. Oct. 1577 zu Loewen.

2) COSMOGRAPHIA Petri Apiani, per Gemmam Frisium apud Lovanienses Medicum & Mathematicum insignem, iam demum ab omnibus vindicata mendis, ac nonnullis quoque locis aucta, figurísque novis illustrata: Additis eiusdem argumenti libellis ipsius Gemae Frisii. Parisiis. Vaeneunt apud Viuantium Gaultherot, via Iacobea; sub intersignio D. Martini. 1553. — 76 Bltt. u. 2 Karten 4°.

Zur Entstehungsgeschichte der Revolutiones des Copernicus.

Unter den Notizen, welche Copernicus in die jetzt in Upsala aufbewahrten Bücher geschrieben, die er einst besessen, befindet sich auch eine Reihe von astronomischen Tafeln und ein diese erklärendes längeres Capitel mit der Ueberschrift: „Latitutidem Veneris et Mercurii invenire". Diese Tafeln mit Erläuterung sind die Quellen der Tafeln über die Breite der fünf Planeten und das letzte Capitel des VI. Buches der *Revolutiones*, nur sind sie in viel grösserer Ausführlichkeit und Breite angelegt. Während die Tafeln in dem grossen Werke des Copernicus nur von 3 zu 3 Grad berechnet sind, gehen die handschriftlichen Tabellen von Grad zu Grad und bei den Proportionaltheilen von Minute zu Minute. Das Buch, in dem sie enthalten sind, besass Copernicus schon im Jahre 1500 in Bologna, wo er, wie sicher aus demselben hervorgeht, noch im März 1500 verweilte, und es ist also höchst wahrscheinlich, dass die fraglichen Tabellen vor denen der *Revolutiones* gearbeitet sind, mit denen sie, soweit dies möglich ist — ihr Umfang ist ja ein völlig verschiedener —, genau übereinstimmen. In demselben Buche findet sich auch die späteste, bis jetzt unbekannte, Beobachtung des Copernicus, eine Venusbeobachtung vom Jahre 1532 — die bis jetzt bekannte letzte datiert von 1529 —. Copernicus hat auch für den sinus totus

= 10000 in derselben Handschrift die Secanten für alle Grade des Quadranten berechnet. Bis jetzt galt, wenn man von Maurolikus aus Palermo, dessen Schriften erst nach Copernicus Tode 1557 erschienen, absieht, Rheticus als erster Berechner dieser Functionsart. In dem grossen Opus Palatinum sind dieselben genau in derselben Weise, wenn auch in grösserem Umfange, berechnet, wie dies Copernicus in der Upsalenser Handschrift thut. Nun sagt Rheticus selbst, dass er seine Untersuchungen geschöpft habe ex amoenissimo horto Copernici, die Upsalenser Handschrift ist auch spätestens 1532 zum Abschluss gekommen, also zu einer Zeit, wo Rheticus noch Student war; Rheticus dürfte also wohl eher die Idee zur Berechnung der Sekanten von Copernicus erhalten haben, als umgekehrt Copernicus von Rheticus, der erst 1539 nach Frauenburg kam. Copernicus verdankt also die gelehrte Welt die Einführung der Secanten in die Wissenschaft. Die Tangenten hat bekanntlich Abul-Wesa eingeführt unter dem Namen umbra recta und umbra versa. Dass umbra recta mal umbra versa = 1 ist, lehrt Bradwardin in einer im Vatikan handschriftlich erhaltenen fälschlich so genannten Perspectiva. Der Cosinus findet sich zuerst berechnet in des Rheticus Ausgabe der Trigonometrie des Copernicus, wie in den Prolegomenis der Säcularausgabe schon gezeigt ist. Alle diese Eintragungen des Copernicus werde ich in nächster Zeit in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig Teubner“ *in extenso* veröffentlichen; ich glaube aber, dass eine vorläufige Nachricht in diesen Blättern, welche die Interessen der Provinz so trefflich vertreten, nicht unwillkommen sein dürfte. Die später auch im Separatabdruck erscheinenden Reliquiae Copernicanae sollen auch die Notizen umfassen, welche in der Pulkowaer Handschrift (siehe Altpr. Monatsschr. 1873 S. 155—162 enthalten sind. Nach näherer Ansicht glaube ich für die Autenticität dieser Handschrift ihrem grössten Theile nach einstehen zu können.

Thorn, den 3. März 1874. M. Curtze.

XXX.

Miscellen.

1.

Lehrsatz.

Wenn in der Ebene ein beliebiges Dreieck $A_1 A_2 A_3$ (s. d. Fig.) mit dem Höhenschnitt A_4 gegeben ist, und wenn durch einen willkürlichen Punkt P und je zwei der Punkte A Kreise gelegt sind, wenn endlich jeder dieser sechs Kreise um die Sehne zwischen den zwei Punkten A_1 durch welche er hindurch geht, herum geklappt wird, so schneiden sich die sechs Kreise in der neuen Lage wieder in einem Punkte Q.

Beweis. Dass der Satz zunächst für irgend drei Kreise gilt, welche um drei Sehnen herum geklappt werden, die ein Dreieck bilden, z. B. für die drei Kreise $A_1 A_2 P$, $A_2 A_3 P$, $A_3 A_1 P$, kann leicht aus der Betrachtung der Peripheriewinkel gefolgert werden.

Es bleibt dann noch zu beweisen, dass er auch für drei solche Kreise gilt, deren Sehnen in einem Punkte A zusammentreffen, etwa $A_4 A_1 P$, $A_4 A_2 P$, $A_4 A_3 P$.

Man errichte in den Endpunkten A_1 A_2 A_3 auf diesen Sehnen Senkrechte, welche das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ bilden mögen, für welches die Punkte A_1 A_2 A_3 die Seitenmitten sind.

Die in den drei betrachteten Kreisen dem Punkte A_4 diametral gegenüberliegenden Punkte C_1 C_2 C_3 sind die Durchschnittspunkte der in P auf $A_4 P$ errichteten Senkrechten mit den Seiten des Dreiecks $B_1 B_2 B_3$. In den drei umgeklappten Kreisen seien die A_4

diametral gegenüberliegenden Punkte D_1 D_2 D_3; dann liegt D_1 auf $B_2 B_3$ und es ist von der Seitenmitte A_1 ebenso weit entfernt wie C_1, teilt also die Seite $B_2 B_3$ im umgekehrten Verhältniss, wie C_1, das entsprechende gilt von D_2 und D_3; folglich liegen die drei Punkte D_1 D_2 D_3 auch in einer Geraden. Man fälle nun auf diese Gerade von A_4 aus die Senkrechte $A_4 Q$, dann erkennt man leicht, dass jeder der drei umgeklappten Kreise durch Q hindurch geht. q. d. e.

Bemerkungen. Im Allgemeinen entspricht für ein gegebenes Dreieck jedem Punkte P ein Punkt Q, und umgekehrt dem Punkte Q der Punkt P. Nur wenn P in einen der vier Punkte A rückt, so decken sich drei der vier umgeklappten Kreise vollständig und der vierte Kreis ist unbestimmt. Es entspricht also jedem der Fundamentalpunkte A jeder beliebige Punkt des durch die drei andern gelegten Kreises, und umgekehrt. Drei endliche Punkte entsprechen sich selbst, nämlich die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien von je zweien der vier Punkte A.

Jeder unendlich entfernte Punkt entspricht ebenfalls sich selbst. Bewegt sich P auf der Verbindungslinie irgend zweier Punkte A, so bewegt sich Q auf derselben Geraden und zwar sind P und Q stets gleich weit von dem Punkte entfernt, in welchem jene Gerade von der Verbindungslinie der beiden andern Punkte A getroffen wird. Bewegt sich P auf einem beliebigen durch zwei Fundamentalpunkte z. B. A_1 A_4 gelegten Kreise, so bewegt sich Q auf dem umgeklappten Kreise. Beide Kreise werden identisch, wenn sie die Verbindungssehne der Punkte A zum Durchmesser haben. In diesem Falle bilden die Punktpaare PQ auf dem Kreise eine krumme involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte die beiden sich selbst entsprechenden Punkte sind, durch welche der Kreis hindurch geht, und zwar bilden die Verbindungssehnen P Q einen Strahlbüschel, dessen Centrum der Halbirungspunkt von $A_2 A_3$ ist.

Berlin im Februar 1874. F. August.

2.

Ueber eine gewisse Classe in der Trigonometrie und Astronomie häufig in Anwendung kommender unendlichen Reihen.

Unter der obigen Ueberschrift hat Professor Dr. Grunert im 18. Bande des Archiv's die wichtigsten in der Astronomie vorkommenden unendlichen Reihen mit Hülfe der Maclaurin'schen Reihe

entwickelt. In dem Folgenden gebe ich eine directe Herleitung der Reihe für $\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x$ und bestimme aus dieser durch passende Substitutionen die andern Reihen.

Aus $\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x$ folgt zunächst durch Umkehrung

1) $$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x$$

und hieraus durch Ableitung nach x:

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos x^2 + a^2 \sin x^2}.$$

Setzt man in Nr. 2) $a = \frac{1-b}{1+b}$, also $b = \frac{1-a}{1+a}$, so entsteht:

3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-b^2}{1+2b\cos 2x + b^2} \quad \text{oder}$$

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-b^2}{(1+be^{2xi})(1+be^{-2xi})}.$$

Wird $e^{2xi} = u$ gesetzt, so ergiebt sich

5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-b^2)u}{(1+bu)(u+b)} = \frac{1}{1+bu} - \frac{b}{u+b},$$

also ist auch

6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+be^{2xi}} - \frac{be^{-2xi}}{1+be^{-2xi}}.$$

Durch Entwickelung der Brüche in Reihen erhält man:

7) $$\frac{dy}{dx} = 1 - 2b\cos 2x + 2b^2 \cos 4x - 2b^3 \cos 6x \ldots$$

und hieraus durch Integration:

8) $$y = x - b \sin 2x + \frac{b^2}{2} \sin 4x - \frac{b^3}{3} \sin 6x \ldots$$

Hat man die Gleichung

9) $$\operatorname{tg}\left(y + \frac{x}{2}\right) = \frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

so ergiebt sich aus Nr. 8), da $b = -a$ wird:

10) $$y = a \sin x + \frac{a^2}{2} \sin 2x + \frac{a^3}{3} \sin 3x \ldots$$

Aus Nr. 9) ergiebt sich durch Umformung:

11) $$\sin y = a \sin(x+y)$$

und hieraus

12) $$\operatorname{tg} y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x},$$

so dass also die Reihe in Nr. 10) auch die Entwickelung von y aus Nr. 11) und 12) giebt. Soll aus $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + a$ der Bogen y gefunden werden, so bilde man:

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(y-x)}{\cos y \cos x} = a,$$

wodurch sich

13) $$\sin(y-x) = a \cos x \cos y$$

ergiebt,

Setzt man in Nr. 13)

$$x = \frac{\pi}{2} + \xi \quad \text{und}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \eta + \xi, \quad \text{so ist}$$

$$y - x = \eta$$

und aus Nr. 13) wird

14) $$\sin \eta = a \sin \xi \sin(\eta + \xi),$$

mithin ist, wegen Nr. 11) nach Nr. 10)

15) $$\eta = a \sin \xi \sin \xi + \frac{a^2 \sin \xi^2}{2} \sin 2\xi + \frac{a^3 \sin \xi^3}{3} \sin 3\xi + \dots$$

oder wenn man für ξ und η wieder x und y einführt:

16) $$y = x + a \cos x \cos x - \frac{a^2}{2} \cos x^2 \sin 2x + \frac{a^3}{3} \cos x^3 \cos 3x - \frac{a^4}{4} \cos x^4 \sin 4x \dots$$

Wenn gegeben ist:

$$\operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} x + a,$$

so ist

$$\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x = -\frac{\sin(y-x)}{\sin y \sin x} = a,$$

also:

17) $$\sin(y-x) = -a \sin x \sin y.$$

Setzt man in Nr. 17) $y = \eta + x$, so entsteht

18) $$\sin\eta = -a\sin x\sin(\eta + x),$$

mithin nach Nr. 11) und Nr. 10)

19) $$\eta = -a\sin x\sin x + \frac{a^2}{2}\sin x^2\sin 2x - \frac{a^3}{3}\sin x^3\sin 3x \ldots$$

und wenn man für η wieder y einführt:

20) $$y = x - a\sin x\sin x + \frac{a^2}{2}\sin x^2\sin 2x - \frac{a^3}{3}\sin x^3\sin 3x \ldots$$

Aus Nr. 3) und Nr. 7) ergiebt sich

21) $$\frac{1-b^2}{1+2b\cos 2x+b^2} = 1 - 2b\cos 2x + 2b^2\cos 4x - 2b^3\cos 6x \ldots$$

Ersetzt man b durch $-b$ und x durch $\frac{x}{2}$, so entsteht:

22) $$\frac{1-b^2}{1-2b\cos x+b^2} = 1 + 2b\cos x + 2b^2\cos 2x + 2b^3\cos 3x \ldots$$

Addirt man zu beiden Seiten von Nr. 22) 1 und dividirt beide Seiten durch 2, so erhält man:

23) $$\frac{1-b\cos x}{1-2b\cos x+b^2} = 1 + b\cos x + b^2\cos 2x + b^3\cos 3x \ldots$$

Um

24) $$v = \frac{b\sin x}{1-2b\cos x+b^2}$$

in eine Reihe zu verwandeln, setze man für $\sin x$ und $\cos x$ ihre Werte in Potenzen von e, so ergiebt sich

25) $$2vi = \frac{b(e^{xi}-e^{-xi})}{(1-be^{xi})(1-be^{-xi})}$$

und durch Zerlegung in Partialbrüche:

26) $$2vi = -1 + \frac{1}{1-be^{xi}} - \frac{be^{-xi}}{1-be^{-xi}}$$

und hieraus durch Verwandelung der Quotienten in Reihen:

27) $$v = b\sin x + b^2\sin 2x + b^3\sin 3x \ldots$$

Um $w = \log\sqrt{1-2b\cos x+b^2}$ in eine Reihe zu verwandeln, ersetze man den Radicanden durch

$$(1-be^{xi})(1-be^{-xi}),$$

wodurch sich ergiebt

$$28)\qquad w = \frac{\log(1 - be^{xi}) + \log(1 - be^{-xi})}{2},$$

also, wenn man für die Logarithmen die bekannten Reihen setzt:

$$29)\quad w = -\tfrac{1}{2}\left[b(e^{xi} + e^{-xi}) + \frac{b^2}{2}(e^{2xi} + e^{-2xi}) + \frac{b^3}{3}(e^{3xi} + e^{-3xi})\ldots\right]$$

oder

$$30)\qquad w = -\tfrac{1}{2}\left(b\cos x + \frac{b^2}{2}\cos 2x + \frac{b^3}{3}\cos 3x \ldots\right).$$

Kiel, den 9. Januar 1874. **Ligowski.**

8.

Bemerkung zu Herrn Ligowski's Kreisberechnungsformel.

Im 55. Teile des Archivs (Miscellen Seite 218) giebt Herr Ligowski eine Formel, welche zur Berechnung der Zahl π dienen kann. Diese Formel heisst:

$$u_m = \frac{u}{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_m} \tag{1}$$

Hier bezeichnet u und u_m die Umfänge des regulären n resp. $2^m.n$ Ecks im Kreise, und $\varrho_\lambda (\lambda = 1, 2, 3 \ldots m)$ den Radius des in das λ Eck eingeschriebenen Kreises. Aus dieser Formel folgt für $n = 6$ die zweite:

$$\frac{3}{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_m} \cdot \frac{1}{\varrho_m} > \pi > \frac{3}{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_m}$$

die von Herrn Ligowski angegeben wurde.

Man kann aber aus der Formel (1) noch eine zweite bemerkenswerte Folgerung ziehen. Nehmen wir an, dass u den Umfang eines eingeschriebenen regulären Vierecks bezeichne, so ist dann, wie leicht ersichtlich:

$$u = 4\sqrt{2}$$

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\varrho_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\varrho_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

u. s. w.

Es wird also nach (1)

$$u_m = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots}$$

Nimmt man an, dass m unbegrenzt wächst, so wird $\lim u_m = 2\pi$, und wir erhalten

$$2\pi = \lim \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots}$$

wo die Zahl der Factoren im Nenner jetzt unbegrenzt ist.

Es ist aber bekanntlich:

$$\sqrt{2} = \sec\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = \cos\frac{\pi}{16},$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} = \cos\frac{\pi}{32}$$

u. s. w.

und daher:

$$2\pi = \lim \frac{4\sec\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cdots}$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \sec\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi}{16}\sec\frac{\pi}{64}\cdots \tag{2}$$

und dies ist die Formel, welche wir erhalten wollten. Sie stellt die Zahl π durch ein unendliches Product dar. Aus ihr folgt die convergente unendliche Reihe:

$$\log\frac{\pi}{2} = \log\sec\frac{\pi}{4} + \log\sec\frac{\pi}{8} + \log\sec\frac{\pi}{16} + \log\sec\frac{\pi}{32} + \dots$$

oder:

$$\log\frac{\pi}{2} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \log\sec\frac{\pi}{2^{2+\lambda}} \tag{3}$$

welche zur Berechnung der Zahl π dienen kann.

Die Formel (2) kann auch trigonometrisch bewiesen werden: Es findet nämlich folgende Reihe von Identitäten statt:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} = \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\frac{\pi}{2^m}\cdot\cos\frac{\pi}{2^m} = \sin\frac{\pi}{2^{m-1}}.$$

Multiplicirt man diese Identitäten gliederweise, so erhält man:

$$2^{m-1}.\sin\frac{\pi}{2^m}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots\cos\frac{\pi}{2^m} = \sin\frac{\pi}{2}$$

und somit:

$$2^{m-1}\sin\frac{\pi}{2^m} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots\cos\frac{\pi}{2^m}}$$

Es ist aber

$$2^{m-1}.\sin\frac{\pi}{2^m} = \tfrac{1}{2}.\frac{\sin(\pi.\frac{1}{2}^{m-1})}{\frac{1}{2}^{m-1}}$$

also:

$$\lim 2^{m-1}\sin\frac{\pi}{2^m} = \frac{\pi}{2}.$$

Und daher

$$\frac{\pi}{2} = \lim\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots} = \Pi_0^\infty\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{2+\lambda}}}$$

ganz übereinstimmend mit (2).

Warschau, den 30. October 1873.

S. Dickstein,
Gymnasiallehrer in Warschau.

$$u = 4\sqrt{2}$$

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\varrho_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\varrho_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

u. s. w.

Es wird also nach (1)

$$u_m = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots}$$

Nimmt man an, dass m unbegrenzt wächst, so wird $\lim u_m = 2\pi$, und wir erhalten

$$2\pi = \lim \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots}$$

wo die Zahl der Factoren im Nenner jetzt unbegrenzt ist.

Es ist aber bekanntlich:

$$\sqrt{2} = \sec\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = \cos\frac{\pi}{16},$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} = \cos\frac{\pi}{32}$$

u. s. w.

und daher:

$$2\pi = \lim \frac{4\sec\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cdots}$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \sec\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi}{16}\sec\frac{\pi}{64}\cdots \tag{2}$$

$$b = \frac{a.\sin(180-\alpha)}{\sin\frac{\xi-1}{\xi}.\alpha},$$

$$c = \frac{a.\sin\frac{\alpha}{\xi}}{\sin\frac{\xi-1}{\xi}.\alpha}.$$

Wir haben ferner:

$$x^2+y^2=b^2,$$
$$(x-a)^2+y^2=c^2$$

und für b und c obige Werte eingesetzt:

$$x^2+y^2=\frac{a^2.\sin^2(180-\alpha)}{\sin^2\frac{\xi-1}{\xi}.\alpha}=\frac{a^2.\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\xi-1}{\xi}.\alpha} \quad \text{und}$$

$$(x-a)^2+y^2=\frac{a^2.\sin^2\frac{\alpha}{\xi}}{\sin^2\frac{\xi-1}{\xi}.\alpha},$$

als die beiden Grundgleichungen.

Setzt man z. B. $\xi=3$, so erhält man, nach Elimination von α, als Curve für die Dreiteilung des Winkels:

$$x^3-\frac{3a}{2}x^2+xy^2+\frac{a}{2}y^2=0$$

Sie hat ihren Gipfel bei

$$x=\frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad =0{,}863\,a$$

$$y=a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}(\sqrt{3}-1)=0.592\,a$$

Die Curve für Fünfteilung hat folgende Gleichung:

$$y^6(16x^2-a^2)+y^4(13a^2x^2-32ax^3-16x^4)$$
$$+y^2(64ax^5-32a^2x^4-16x^6)+15a^2x^6$$
$$-32ax^4+16x^8=0$$

[illegible] vom 8. Grade.

[illegible]burg im Winter 1872/3.

Ingenieur-Hauptmann von Wasserschleben.

Berichtigung.

[illegible] Bande S. 447. vorletzte Zeile fehlt hinter dem Worte „verschwindend", und in der darauf folgenden Glei- [illegible] Integralgrenze 0.

XXXI.

Bemerkungen über die Reduction der vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die vollen elliptischen Integrale erster Gattung für denselben Modul.

Von

E. Meissel.

Abdruck aus dem Programm der Realschule in Kiel.

Auf den Wunsch einiger mathematischen Freunde habe ich mich entschlossen, die folgenden Untersuchungen hier zu veröffentlichen.

Es sei

$$\varDelta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}; \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}; \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi\, d\varphi$$

so erhält man bekanntlich durch die Transformation der $n$ten Ordnung

$$(1) \quad \begin{cases} F(\lambda) = AF(k) \\ F\sqrt{1-\lambda^2} = \dfrac{A}{n} F\sqrt{1-k^2} \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist λ der transformirte Modul, den wir als eine Function von k ansehen werden; während der Factor A, welcher gleichfalls von k abhängig ist, mit Hülfe der Modulargleichung zwischen λ und k aus der Beziehung

$$A^2 = \frac{n(k-k^3)}{\lambda-\lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \tag{2}$$

gefunden werden kann.

Die Gleichung (2) leitet man aus der Verbindung von (1) mit den Gleichungen

$$d\left(\frac{F\sqrt{1-k^2}}{Fk}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{dk}{(k-k^3)F^2(k)}$$

$$d\left(\frac{F\sqrt{1-\lambda^2}}{F\lambda}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda^3)F^2(\lambda)}$$

her, wie dieses Jacobi in den Fundamentis novis p. 75 gleichfalls getan hat.

In den vorstehenden Gleichungen (1) und (2) ist n eine ganze positive Zahl, welche den Ordnungsexponenten der angewandten Transformation darstellt. — Leicht lässt sich zeigen, dass diese Gleichungen noch gültig bleiben, wenn n gleich einer gebrochenen positiven Zahl wird. Denn durch eine Transformation $m$ter Ordnung würde man erhalten

$$F(\lambda) = A_1 F(\mu)$$

$$F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A_1}{m} F\sqrt{1-\mu^2}; \quad A_1{}^2 = m\frac{(\mu-\mu^3)}{\lambda-\lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu}$$

und durch Verbindung dieser Gleichungen mit (1) und (2) zu den Resultaten gelangen:

$$F(\mu) = \frac{A}{A_1} . F(k); \quad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{A}{A_1}\right) F\sqrt{1-k^2}$$

$$\left(\frac{A}{A_1}\right)^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{k-k^3}{\mu-\mu^3} \cdot \frac{d\mu}{dk}$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichungen (1) und (2) bestehen bleiben, selbst wenn man n gleich einer beliebigen positiven rationaleu Zahl setzt. Nur sind in diesem Falle zwei Transformationen anzuwenden, deren Ordnungsexponenten dem Nenner und Zähler der gebrochenen Zahl n beziehlich gleich werden.

Nun differentiire man die Gleichungen (1) nach k und benutze die bekannten Relationen:

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k - k^3} - \frac{F(k)}{k}$$

$$E'(k) = \frac{E(k)}{k} - \frac{F(k)}{k}$$

sowie die Gleichungen (1) und (2); dann ergeben sich leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - \left[(k - k^3) \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1 - k^2) - A(1 - \lambda^2) \right] F(k)$$

$$E\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1 - k^2} + \left[(k - k^3) \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} - \frac{n}{A} k^2 + A\lambda^2 \right] \cdot \frac{F\sqrt{1 - k^2}}{n}$$

Durch Zusammenstellung erhält man demnach:

(3)

$$F(\lambda) = AF(k)$$

$$F\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{A}{n} F\sqrt{1 - k^2}$$

mit der entsprechenden algebraischen Modular-Gleichung zwischen k und λ.

$$A^2 = n \cdot \frac{k - k^3}{\lambda - \lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{dk}$$

$$E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - BF(k)$$

$$E\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1 - k^2} + \left(\frac{A + B}{n} - \frac{1}{A} \right) F\sqrt{1 - k^2}$$

wenn gesetzt wird:

$$B = (k - k^3) \cdot \frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1 - k^2) - A(1 - \lambda^2)$$

Differentiirt man nun die Gleichungen

$$E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - BF(k)$$

$$E\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1 - k^2} + \left(\frac{A + B}{n} - \frac{1}{A} \right) F\sqrt{1 - k^2}$$

abermals nach k und benutzt die vorher angegebenen Relationen, so gewinnt man eine neue Beziehung zwischen A, B, λ, nämlich:

$$\frac{A^2(A + B)}{n}(1 - \lambda^2) = \left(\frac{n}{A} - B \right)(1 - k^2) + (k - k^3) \frac{dB}{dk}$$

so dass überhaupt zwischen diesen drei Grössen und dem Modul k folgende Gleichungen bestehen:

$$
(4)\quad \begin{cases}
A^2(\lambda-\lambda^3) = n(k-k^3)\dfrac{d\lambda}{dk} \\[2ex]
B = \dfrac{n}{A}(1-k^2) - A(1-\lambda^2) + (k-k^3)\,.\,\dfrac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} \\[2ex]
(k-k^3)\dfrac{dB}{dk} = \dfrac{A^2(A+B)}{n}(1-\lambda^2) + \left(B-\dfrac{n}{A}\right)(1-k^2)\,.
\end{cases}
$$

Durch Elimination von A und B gewinnt man die wichtige Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den beiden Moduln k und λ, welche zuerst von Jacobi, Fund. nova pag. 77 aufgestellt worden ist.

In mehr übersichtlicher Weise schreiben sich die Gleichungen (4), wenn man setzt:

$$
(4a)\quad \begin{cases}
A = \alpha\sqrt{n} \\
B = \sqrt{n}\left[-\beta + \dfrac{1-k^2}{\alpha} - (1-\lambda^2)\alpha\right]
\end{cases}
$$

und man erhält:

$$
(4b)\quad \begin{cases}
\dfrac{\alpha dk}{k-k^3} = \dfrac{d\alpha}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{d\lambda}{\lambda-\lambda^3} \\[2ex]
d(\beta^2) = k^2(1-k^2)\,d\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right) + \lambda^2(1-\lambda^2)\,d(\alpha^2)
\end{cases}
$$

Zu bemerken ist bei diesen Gleichungen der Umstand, dass wenn k in λ' und λ in k' übergehen, die Grösse α sich in $\frac{1}{\alpha}$ verwandelt, während β ungeändert bleibt. Gehen aber k in λ, λ in k über, so verwandeln sich n in $\frac{1}{n}$, α in $\frac{1}{\alpha}$, β in $-\beta$.

Bildet man aus den Gleichungen (3)

$$
F(\lambda)E\sqrt{1-\lambda^2} = F(k)E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{A^2+AB}{n} - 1\right)F(k)F\sqrt{1-k^2}
$$

$$
F\sqrt{1-\lambda^2}\,E(\lambda) = F\sqrt{1-k^2}\,E(k) - \qquad \frac{AB}{n} \qquad \cdot F(k)F\sqrt{1-k^2}
$$

$$
-F(\lambda)F\sqrt{1-\lambda^2} = \qquad - \qquad \frac{A^2}{n} \qquad \cdot F(k)F\sqrt{1-k^2}
$$

und addirt dieselben, so ergiebt sich:

$$F(\lambda)E\sqrt{1-\lambda^2}+F\sqrt{1-\lambda^2}E(\lambda)-F(\lambda)F\sqrt{1-\lambda^2}$$
$$=F(k)E\sqrt{1-k^2}+F\sqrt{1-k^2}E(k)-F(k)F\sqrt{1-k^2}$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen rationalen Wert von n; daher muss jede der beiden Seiten sich auf einen constanten Wert reduciren. Also:

$$F(k)E\sqrt{1-k^2}-\{F(k)-E(k)\}F\sqrt{1-k^2}=\text{Const.}$$

Dass $\{F(k)-E(k)\}F\sqrt{1-k^2}$ für abnehmende k sich der Nullgrenze nähert und $F(k)E\sqrt{1-k^2}$ die Grenze $\frac{\pi}{2}$ für $k=0$ erreicht, beweist man leicht aus den Integralen und leitet auf diese Weise den schönen Satz des Legendre aus der Transformation her.

Es mag nun in der algebraischen Modulargleichung zwischen k und λ unter der Voraussetzung, dass n eine positive rationale Zahl ist,

$$\lambda=\sqrt{1-k^2}$$

eingesetzt werden, so wird k eine specielle Zahl, welche nur von n abhängig ist und man gewinnt aus (3):

$$(5)\qquad \begin{cases} F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{n}\,F(k) \\ \sqrt{n}\,E(k)-E\sqrt{1-k^2}=B_0F(k) \end{cases}$$

wo B_0 der besondere Wert ist, welchen B in diesem Falle annimmt und den man in jedem einzelnen Falle von der Auflösung einer algebraischen Gleichung als abhängig anzusehen hat.

Durch Verbindung der zweiten Gleichung (5) mit der Gleichung von Legendre

$$F(k)E\sqrt{1-k^2}+F\sqrt{1-k^2}E(k)-F(k)F\sqrt{1-k^2}=\frac{\pi}{2}$$

erhält man die Resultate:

$$(6)\qquad \begin{cases} F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{n}\,.\,F(k) \\ E(k)=\left(\frac{1}{2}+\frac{B_0}{2\sqrt{n}}\right)F(k)+\frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{B_0}{2\sqrt{n}}\right)F\sqrt{1-k^2}+\frac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

$$(12)\quad\begin{cases} n=7; \qquad 2k\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{8}; \qquad k=\dfrac{3-\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \\ F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{7}\,.\,F(k) \\ E(k)=\left(\frac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)F(k)+\dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2}=\left(\frac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)F\sqrt{1-k^2}+\dfrac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

$$(13)\quad\begin{cases} n=8; \qquad k=\dfrac{1-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{1+\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}} \\ F\sqrt{1-k^2}=\sqrt{8}\,.\,F(k) \\ E(k)=\dfrac{1+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot F(k)+\dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2}=\dfrac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot F\sqrt{1-k^2}+\dfrac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

$$(14)\quad\begin{cases} n=9; \qquad 2k\sqrt{1-k^2}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^4}{4} \\ k=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{2}} \\ F\sqrt{1-k^2}=3F(k) \\ E(k)=\left(\frac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{3}}\right)F(k)+\dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2}=\left(\frac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{3}}\right)F\sqrt{1-k^2}+\dfrac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

u. s. w.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass wenn n ein Quadrat ist, die Grösse $F(k)$ sich stets durch $F\sqrt{\frac{1}{2}}$ darstellen lässt. So ist z. B.

$$\text{für } n=4; \qquad F(k)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{F\sqrt{\frac{1}{2}}}{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{,,}\quad n=9; \qquad F(k)=\frac{\sqrt{2}\,F\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{3}\,(3-\sqrt{3})}$$

Um die Resultate für gebrochene n ohne zu grossen Aufwand von Rechnung zu gewinnen, bemerke man, dass aus der Transformation $n$ter Ordnung (n ganz) die Gleichungen fliessen:

$$\left.\begin{aligned} &F(\lambda) = AF(k); \quad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A}{n} F\sqrt{1-k^2} \\ &E(\lambda) = \frac{n}{A} E(k) - BF(k) \\ &A^2 = n\frac{k-k^3}{\lambda-\lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \end{aligned}\right\} \text{cf. (3)}$$

$$B = (k-k^3)\frac{d\left(\frac{n}{A}\right)}{dk} + \frac{n}{A}(1-k^2) - A(1-\lambda^2)$$

und aus der Transformation $m$ter Ordnung (m ganz) die folgenden:

$$F(\lambda) = A_1 F(\mu); \quad F\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{A_1}{m} F\sqrt{1-\mu^2}$$

$$E(\lambda) = \frac{m}{A_1} E(\mu) - B_1 F(\mu)$$

$$A_1^2 = m\frac{\mu-\mu^3}{\lambda-\lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu}$$

$$B_1 = (\mu-\mu^3)\frac{d\left(\frac{m}{A_1}\right)}{d\mu} + \frac{m}{A_1}(1-\mu^2) - A_1(1-\lambda^2)$$

Durch Elimination der „λ“ folgt:

$$F(\mu) = \frac{A}{A_1} F(k): \quad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{A}{A_1} \cdot F\sqrt{1-k^2}$$

$$E(\mu) = \frac{n}{m} \cdot \frac{A_1}{A} \cdot E(k) - \frac{A_1 B - AB_1}{m} F(k)$$

$$\frac{A^2}{A_1^2} = \frac{n}{m} \cdot \frac{k-k^3}{\mu-\mu^3} \cdot \frac{d\mu}{dk} = A_2^2$$

$$\frac{A_1 B - AB_1}{m} = B_2 = (k-k^3)\frac{d\left(\frac{nA_1}{mA}\right)}{dk} + \frac{nA_1}{mA}(1-k^2) - \frac{A}{A_1}(1-\mu^2)$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass alle Gleichungen (3) selbst noch für gebrochene n gültig bleiben. Ferner ist klar, dass die Modulargleichung zwischen k und μ als das

Resultat der Elimination von λ aus den algebraischen Gleichungen zwischen λ und k, sowie zwischen λ und μ selber algebraisch wird.

Ich will der Kürze wegen die obige inverse Doppel-Transformation als eine Transformation von der Ordnung $\frac{n}{m}$ bezeichen; sowie die algebraische Gleichung zwischen den Moduln k und μ durch

$$f\left(k, \mu, \frac{n}{m}\right) = 0 \tag{15}$$

Setzt man nun:

$$F(\mu) = AF(k); \quad F\sqrt{1-\mu^2} = \frac{mA}{n} F\sqrt{1-k^2}$$

$$E(\mu) = \frac{n}{mA} E(k) - BF(k)$$

$$E\sqrt{1-\mu^2} = \frac{1}{A} E\sqrt{1-k^2} + \left(\frac{m(A+B)}{n} - \frac{1}{A}\right) F\sqrt{1-k^2}$$

so werden A und B algebraische Functionen von k und μ.

Ferner ergiebt sich, dass wenn $\mu = \sqrt{1-k^2}$ gemacht wird,

$$(16)\quad \begin{cases} F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{n}{m}} . F(k) \\ E\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{n}{m}} E(k) - B_0 F(k) \\ \left.\begin{aligned} E(k) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{B_0}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) F(k) + \frac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{B_0}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}\right) F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4F(k)} \end{aligned}\right\} \text{cf. (6)} \end{cases}$$

und B_0 eine algebraische Zahl wird, welche von der Grösse des Bruchs $\frac{n}{m}$ abhängt, sobald die algebraische Gleichung

$$f\left(k, \sqrt{1-k^2}, \frac{n}{m}\right) = 0$$

sich algebraisch lösen lässt.

Man gewinnt z. B. für $n = 3$, $m = 2$

$$(17)\quad\begin{cases} \sqrt{1-k^2} = (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.\,F(k) \\ E(k) = \dfrac{11-8\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\,F(k) + \dfrac{\pi}{4F\sqrt{1-k^2}} \\ E\sqrt{1-k^2} = \dfrac{8\sqrt{2}+6\sqrt{3}-11-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\,F\sqrt{1-k^2} + \dfrac{\pi}{4F(k)} \end{cases}$$

Um zu untersuchen, ob in dem Falle

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,F(k)$$

die vollen Integrale zweiter Gattung durch $F(k)$ und algebraische Zahlen ausgedrückt werden können, hat man die Modulargleichung für die Transformation siebenter Ordnung

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[8]{(1-k^2)(1-\lambda^2)} = 1$$

mit der Modulargleichung für die Transformation dritter Ordnung

$$\sqrt{\lambda\mu} + \sqrt[4]{(1-\lambda^2)(1-\mu^2)} = 1$$

zu verbinden, $\mu^2 = 1-k^2$ zu setzen und zu untersuchen, ob k aus beiden Gleichungen algebraisch dargestellt werden kann.

Man setze, wodurch beide Gleichungen erfüllt werden:

$$k^2\lambda^2 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^8;\quad k^2(1-\lambda^2) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^4$$

$$(1-k^2)(1-\lambda^2) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^8;\quad (1-k^2)\lambda^2 = \left(\frac{1+y}{2}\right)^4$$

Aus ihnen folgt zunächst

$$1-x^2 = 2\sqrt{1-y^2}$$

und dann durch Elimination

$$x^8+12x^6+22x^4+44x^2-15=0$$

mit den reellen Wurzeln

$$x^2 = 2\sqrt{7}-5$$

Ist der Kürze wegen

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2\sqrt{7}-5} \\ y &= x\sqrt{3} \\ &\text{so folgt:} \\ k^2 &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^8 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^4 \\ 1-k^2 &= \left(\frac{1-x}{2}\right)^8 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^4 \\ \lambda^2 &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^8 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^4 \\ 1-\lambda^2 &= \left(\frac{1-x}{2}\right)^8 + \left(\frac{1-y}{2}\right)^4 \end{aligned}\right.$$

und es sind in den Gleichungen

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\tfrac{7}{3}}\,F(k)$$

$$E(k) = g\,F(k) + \frac{\pi}{4\,F\sqrt{1-k^2}}$$

$$E\sqrt{1-k^2} = h\,F\sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{4\,F(k)}$$

k, g und h algebraisch darstellbare Zahlen.

Ich habe in einer grossen Anzahl von anderen Fällen die Moduln k, welche der Gleichung

$$F\sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,F(k)$$

genügen, in algebraischer Form gefunden. In allen diesen Fällen sind die vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung in $F(k)$ und algebraischen Zahlen darstellbar. Ob aber k immer als algebraische Zahl dargestellt werden kann, darüber wage ich keine Vermutung auszusprechen.

Kiel, im Januar 1874.

XXXII.

Harmonische Punktsysteme auf rationalen Curven dritter und vierter Ordnung.

Von

K. Zahradnik.

Die Gleichung einer rationalen Curve dritter Ordnung, nämlich C_4^3, wenn man die Doppelpunktstangenten zu Coordinatenachsen wählt, ist

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=hxy \tag{1}$$

oder mit Anwendung eines rationalen Parameters u

$$\begin{aligned} x&=\frac{hu}{a+bu+cu^2+du^3}\\ y&=\frac{hu^2}{a+bu+cu^2+du^3}\end{aligned} \tag{2}$$

Die Gl. (1) können wir auch in Form

$$ax^3+dy^3+xyA=0 \tag{1'}$$

schreiben, wo dann $A\equiv bx+cy-h$ ist. $A=0$ bedeutet, wie am anderen Orte *) bewiesen wurde, die Polare des Doppelpunktes in Bezug auf den Involutionskegelschnitt.

---

*) Sitzungsbericht vom 7. Nov. 1873 der Königl. böhm. Gesellsch. der Wissensch. Prag.

2. Die Gleichung der Tangente im Punkte u ist

$$x(du^4 - bu^2 - 2au) + y(a - cu^2 - 2du^3) + hu^2 = 0 \tag{3}$$

Fassen wir nun x, y als constant, als Coordinaten eines festen Punktes in der Ebene der C_4^3 auf, so geben die Wurzeln der Gleichung (3) in Bezug auf u die Parameter der Berührungspunkte der aus dem Punkte (x, y) zur C_4^3 gelegten Tangenten.

Wir können uns die Frage stellen, welches ist der Ort der Punkte (x, y), deren entsprechende Berührungspunkte sich aus dem Doppelpunkte in harmonischen Strahlenbüscheln projiciren.

Im allgemeinen sind nun vier Punkte, deren Parameter Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\alpha u^4 + 4\beta u^3 + 6\gamma u^2 + 4\delta u + \varepsilon = 0 \tag{4}$$

sind, harmonisch *), wenn

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \delta \\ \gamma, & \delta, & \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

ist. Ordnen wir demnach die Gl. (3) nach den Potenzen von u, und vergleichen ihre Coefficienten von u mit denen der Gl. (4), so folgt:

$$\begin{aligned} &\alpha = dx \qquad \beta = -\frac{d}{2}y \qquad \gamma = -\frac{A}{6} \\ &\delta = -\frac{a}{2}x \qquad \varepsilon = ay \end{aligned} \tag{6}$$

Führen wir nun diese Werte in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$A^3 - \lambda f(x, y) = 0 \tag{7}$$

wo $\lambda = \frac{27}{2}ad$, und $f(x, y) = ax^3 + dy^3 + xyA$ ist, als Gleichung des gesuchten Ortes. Wir sehen demnach, dass der Ort der Punkte (x, y), deren entsprechende Berührungspunkte harmonische Punktquadrupeln bilden, eine Curve dritter Ordnung Γ ist, welche durch die drei Inflexionspunkte der C_4^3 hindurchgeht und aus der Form der Gl. (7) sehen wir, dass $A = 0$ die Gleichung ihrer Verbindungslinie ist.

Für das Descartes'sche Blatt ist $A = 3a$ und $\lambda = \frac{27}{2}$, demnach geht die Gl. (6) über in

---

*) Dr. H. Durège: Ebene Curven dritter Ordnung. pg. 25. Teubner 1871.

$$x^3+y^3-3axy = 2a^3$$

Das Descartes'sche Blatt und dessen $\Gamma=0$ haben somit dieselben unendlich fernen Punkte. $\Gamma=0$ schneidet die C_4^3 in neun Punkten, von denen drei auf der Linie $A=0$ liegen, somit liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitte.

3. Die Wurzeln der Gl. (4) sind Parameter aequianharmonischer Punkte *), wenn

$$\alpha\varepsilon+3\gamma^2 = 4\beta\delta \tag{8}$$

Führen wir in diese Gleichung aus (6) die Werte ein, so geht dieselbe über in

$$A^2 = 0 \tag{9}$$

d. i.: Der geometrische Ort der Punkte (x, y), deren entsprechende Berührungspunkte auf C_4^3 sich aus dem Doppelpunkte in aequianharmonischen Büscheln projiciren, ist ein in eine doppelt zu zählende Gerade $A=0$ degenerirter Kegelschnitt.

Zieht man aus einem Punkte der Polare A des Doppelpunktes der C_4^3 in Bezug auf deren Involutionskegelschnitt Tangenten, so bilden die Berührungspunkte ein aequianharmonisches Punktsystem (nämlich dieselben projiciren sich aus dem Doppelpunkte in einem aequianharmonischen Strahlenbüschel).

4. Einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in Punktcoordinaten entspricht eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente in Liniencoordinaten. Sind ξ, η Coordinaten einer Tangente der Curve, so ist die Gleichung der C_3^4

$$a\xi^3+b\xi^2\eta+c\xi\eta^2+d\eta^3 = h\xi\eta$$

oder

$$a\xi^3+d\eta^3+\xi\eta A = 0$$

Diese Form ihrer Gleichung, welche ganz analog der Gl. (1) ist, setzt nachstehende Wahl der Coordinatenachsen: Die Doppeltangente fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen und die Tangenten ihrer Berührungspunkte (ausser der Doppeltangente) sind Coordinatenachsen und ihr Durchschnitt Coordinatenanfang. $A=0$ ist die Gleichung des Poles der Doppeltangente in Bezug auf den Involutionskegelschnitt.

Durch dieselbe Rechnung, wie sie oben durchgeführt wurde, ergeben sich entsprechende Sätze für C_3^4 und zwar:

---

*) Durège l. c. pg. 25.

Die Geraden, welche die C_3^4 in harmonischen Punkten schneiden, (d. i. die Tangenten der Durchschnittspunkte bestimmen auf der Doppeltangente harmonische Punktsysteme) hüllen eine Curve dritter Classe ein Γ, welche die durch den Punkt $A = 0$ gehenden Tangenten mit der C_3^4 gemein hat. Die übrigen sechs Tangenten, welche Γ mit C_3^4 gemeinschaftlich hat, hüllen einen Kegelschnitt ein.

II. Jede durch den Punkt $A = 0$ gehende Gerade schneidet die C_3^4 in einem aequianharmonischen Punktsysteme.

5. Die Gleichung einer durch die imaginären Kreispunkte gehenden C_3^3, wenn wir die Rückkehrtangente zur x Achse wählen, ist:

$$ax(x^2+y^2)+b(x^2+y^2) = cy^2$$

oder mittelst des rationalen Parameters u vermöge der Relation $x = uy$

$$x = \frac{cu}{au^3+bu^2+au+b}$$

$$y = \frac{c}{au^3+bu^2+au+b}$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte u ist

$$y(2au^3+bu^2-b)-x(3au^2+2bu+a)+c = 0$$

und der Normale in demselben Curvenpunkte u:

$$y(3a^2u^3+5abu^2+2b^2u+ab)+x(2a^2u^4+3abu^3+b^2u^2-abu-b^2)$$
$$-(2acu^2+bcu+ac) = 0$$

Ordnen wir diese Gleichung nach den Potenzen von u, so erhalten wir

$$2a^2xu^4+3a(ay+bx)u^3+(5aby+b^2x-2ac)u^2+(a^2y+2b^2y-2abx-bc)u$$
$$+(aby-b^2x-ac) = 0 \qquad (10)$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt, dass die Fusspunkte der Normalen eines jeden Punktes der Geraden

$$ay+bx = 0$$

auf einem Kreise liegen, denn in diesem Falle ist $(u)_1 = 0$.

Vergleichen wir nun die Coefficienten der Gleichung (10) mit denen der Gl. (4), so folgt

$$\alpha = 2a^2x, \qquad \beta = \frac{3a}{4}(ay+bx), \qquad \gamma = \tfrac{1}{6}(5aby+b^2x-2ac)$$

$$\delta = \tfrac{1}{4}(a^2y+2b^2y-2abx-bc), \qquad \varepsilon = aby-b^2x-ac$$

Führen wir diese Werte in die Gl. (5) und Gl. (8) ein, so besagen uns die resultirenden Gleichungen, dass

I. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Normalenfusspunkte harmonische Punktquadrupel bilden, ist eine Curve dritter Ordnung.

II. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Normalenfusspunkte aequianharmonische Punktquadrupel bilden, ist ein Kegelschnitt.

Für die Cissoide ist der letztere Ort eine Parabel, deren Gleichung

$$9y^2 + 24ax - 4a^2 = 0.$$

XXXIII.

Inhalt des Sechsflachs zwischen orthogonalen Flächen zweiten Grades und seiner Seiten.

Von

R. Hoppe.

---

1. Körperinhalt bei allgemeiner Bestimmung.

Die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}=1 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}=1 \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a-w}+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w}=1 \tag{3}$$

stellen bei Veränderung der Parameter u, v, w drei Scharen von Flächen 2. Grades dar, welche gemeinsamen Mittelpunkt, gemeinsame Axenstellung, gemeinsame Brennpunkte haben und sich rechtwinklig schneiden. Löst man die Gleichungen nach x^2, y^2, z^2 auf, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{b-c}{\Delta}(u-a)(v-a)(w-a) \\ y^2 &= \frac{c-a}{\Delta}(u-b)(v-b)(w-b) \\ z^2 &= \frac{a-b}{\Delta}(u-c)(v-c)(w-c) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo zur Abkürzung

$$\Delta = (b-c)(c-a)(a-b)$$

gesetzt ist. Vorausgesetzt ist, dass a, b, c von einander verschieden sind. Man kann daher annehmen:

$$a > b > c$$

Da bei Vertauschung von u, v, w das ganze Flächensystem ungeändert bleibt, so lässt sich ferner festsetzen

$$u \geqq v \geqq w$$

ohne dass dadurch irgend ein System dreier sich schneidenden Flächen ausgeschlossen würde. Eine leichte Betrachtung der Gl. (4) zeigt dann, dass nur

$$a \geqq u \geqq b \geqq v \geqq c \geqq w$$

sein kann, indem in jedem andern Falle eine der Coordinaten imaginär würde. Hieran erkennt man, dass die Flächen (1), (2), (3) bzhw. zweischalige, einschalige Hyperboloide und Ellipsoide sind.

Es soll nun der Inhalt des Sechsflachs gesucht werden, welches von den Flächen

$$\begin{array}{lll} u = u_0; & v = v_0; & w = w_0 \\ u = u_1; & v = v_1; & w = w_1 \end{array}$$

eingeschlossen ist. Das Körperelement nehmen wir von derselben Form, indem nur $u_1 - u_0$, $v_1 - v_0$, $w_1 - w_0$ unendlich klein zu setzen sind. Dann ist der gesuchte Inhalt

$$P = \int_{u_0}^{u_1} \partial u \int_{v_0}^{v_1} \partial v \int_{w_0}^{w_1} \partial w \, . \, D$$

wo D die Functionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Führt man die aus (4) entwickelten Werte der partiellen Differentialquotienten ein, so ergiebt sich:

$$D = \frac{(w-v)(u-w)(v-u)}{8\Delta xyz} = \frac{1}{8\Delta xyz}\begin{vmatrix} (u-h)^2 & u-h & 1 \\ (v-h)^2 & v-h & 1 \\ (w-h)^2 & w-h & 1 \end{vmatrix}$$

wo h eine willkürliche Grösse ist, die wir constant nehmen und bald mit c identificiren werden. Multiplicirt man die Ausdrücke (4) und setzt zur Abkürzung

$$U = (u-a)(u-b)(u-c)$$
$$V = (v-a)(v-b)(v-c)$$
$$W = (w-a)(w-b)(w-c)$$

so kommt:

$$\Delta^2 x^2 y^2 z^2 = UVW$$

Jetzt zerfällt jeder Term der Determinante D in 3 Factoren, die einzeln von u, v, w abhangen, und man kann schreiben:

$$\partial^3 P = D\partial u\partial v\partial w = \pm \begin{vmatrix} \frac{(u-h)^2\partial u}{2\sqrt{-U}} & \frac{(u-h)\partial u}{2\sqrt{-U}} & \frac{\partial u}{2\sqrt{-U}} \\ \frac{(v-h)^2\partial v}{2\sqrt{V}} & \frac{(v-h)\partial v}{2\sqrt{V}} & \frac{\partial v}{2\sqrt{V}} \\ \frac{(w-h)^2\partial w}{2\sqrt{-W}} & \frac{(w-h)\partial w}{2\sqrt{-W}} & \frac{\partial w}{2\sqrt{-W}} \end{vmatrix}$$

Sei also (5)

$$L = \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{\sqrt{-U}}; \quad L_1 = \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}\frac{(u-h)\partial u}{\sqrt{-U}}; \quad L_2 = \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}\frac{(u-h)^2\partial u}{\sqrt{-U}}$$

$$M = \tfrac{1}{2}\int_{v_0}^{v_1}\frac{\partial v}{\sqrt{V}}; \quad M_1 = \tfrac{1}{2}\int_{v_0}^{v_1}\frac{(v-h)\partial v}{\sqrt{V}}; \quad M_2 = \tfrac{1}{2}\int_{v_0}^{v_1}\frac{(v-h)^2\partial v}{\sqrt{V}}$$

$$N = \tfrac{1}{2}\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial w}{\sqrt{-W}}; \quad N_1 = \tfrac{1}{2}\int_{w_0}^{w_1}\frac{(w-h)\partial w}{\sqrt{-W}}; \quad N_2 = \tfrac{1}{2}\int_{w_0}^{w_1}\frac{(w-h)^2\partial w}{\sqrt{-W}}$$

dann giebt die Integration:

$$P = \mp \begin{vmatrix} L & L_1 & L_2 \\ M & M_1 & M_2 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Die hier auftretenden Integrale sind elliptische erster und zweiter Gattung von bequemster Gestalt zur Reduction auf die Grundformen.

Nach Gudermann'scher Bezeichnung, wo snp, cnp, dnp, elp bzhw. Sinusamplitude, Cosinusamplitude, Deltaamplitude von p und das Integral zweiter Gattung $\int\limits_0 dn^2p\partial p$ bedeuten, hat man zu setzen:

$$\text{Modul } k = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}; \quad \text{conjug. Mod. } k' = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \tag{7}$$

$$a-u = (a-b)\,sn^2p; \quad u-b = (a-b)\,cn^2p; \quad u-c = (a-c)\,dn^2p$$

woraus:

$$\sqrt{-U} = \pm (a-b)\sqrt{a-c}\; snp\, cnp\, dnp$$

$$\partial u = -2(a-b)\, snp\, cnp\, dnp\, \partial p$$

$$\int\limits_0 \frac{\partial u}{2\sqrt{-U}} = \mp \frac{p}{\sqrt{a-c}}; \quad \int\limits_0 \frac{(u-c)\,\partial u}{2\sqrt{-U}} = \mp \sqrt{a-c}\; elp$$

$$\int\limits_0 \frac{(u-c)^2\partial u}{2\sqrt{-U}} = \mp \tfrac{1}{3}(a-c)^{\frac{3}{2}}\{k^2 snp\, cnp\, dnp - k'^2 p + 2(1+k'^2)\, elp\}$$

Lässt man, wenn u in v und w übergeht, p in $iq+K+iK'$ und $r+iK'$ übergehen, so zeigt sich, dass q und r reell werden; denn man findet: (8)

$$a-v = (a-c)\,dn'^2q; \quad b-v = (b-c)\,cn'^2q; \quad v-c = (b-c)\,sn'^2q$$

$$a-w = \frac{a-c}{sn^2r}; \qquad b-w = \frac{a-c}{sn^2r}dn^2r; \qquad c-w = \frac{a-c}{sn^2r}cn^2r$$

Zugleich ist aber durch die Darstellung von u, v, w in gleichen Functionen dreier Argumente erreicht, dass in der dritten Verticalreihe der Determinante (6) die 2 transcendenten Terme als proportional der ersten und zweiten Verticalreihe weggehen, und nur der erste, algebraische Term in Rechnung kommt. Setzt man

$$\varphi p = snp\, cnp\, dnp$$

so wird

$$\int\limits_0 \frac{(u-c)^2\partial u}{2\sqrt{-U}} = \mp \tfrac{1}{3}(a-b)\sqrt{a-c}\,\varphi p + \int \frac{A(u-c)+B}{2\sqrt{-U}}\partial u$$

Ferner sei

$$\bar{q} = iq+K+iK'; \qquad \bar{r} = r+iK'$$

und bezeichne der Index 0 den entsprechenden Wert für die untere, der Index 1 für die obere Grenze der Integrale (5); dann ist ohne Beziehung des Doppelvorzeichens zu den vorigen

$$P_5 = \pm \frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\,.\,i \begin{vmatrix} 4K & 4E & 0 \\ \bar{q}_1-\bar{q}_0 & el\bar{q}_1-el\bar{q}_0 & \varphi\bar{q}_1-\varphi\bar{q}_0 \\ \frac{1}{2}K & \frac{E-1-k'}{2} & \frac{k'}{1-k'} \end{vmatrix}$$

$$P_4 = \mp \frac{a-b}{3}\sqrt{a-c} \begin{vmatrix} p_1-p_0 & elp_1-elp_0 & \varphi p_1-\varphi p_0 \\ 4K' & 4(K'-E') & 0 \\ \frac{1}{2}K & \frac{E-1-k'}{2} & \frac{k'}{1-k'} \end{vmatrix}$$

das ist entwickelt:

$$P_5 = \pm \frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\,.\,i\left\{-\frac{4Ek'}{1-k'}(\bar{q}_1-\bar{q}_0)+\frac{4Kk'}{1-k'}(el\bar{q}_1-el\bar{q}_0)\right.$$
$$\left.+2K(1+k')(\varphi\bar{q}_1-\varphi\bar{q}_0)\right\}$$

$$P_4 = \mp \frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\left\{4\frac{K'-E'}{1-k'}k'(p_1-p_0)-\frac{4K'k'}{1-k'}(elp_1-elp_0)\right.$$
$$\left.+[\pi-2K'(1+k')](\varphi p_1-\varphi p_0)\right\}$$

Betrachten wir diese Schalen als Differenzen der von $p=0$, $q=0$ an gerechneten Hyperboloidstücke, so haben wir zur Darstellung der letztern nur $p_0=0$, $p_1=p$ etc. zu setzen; dann gehen nach Einsetzung der Werte P_5, P_4 über in

$$P_5' = \mp \frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\left\{-\frac{4Ek'}{1-k'}q+\frac{4Kk'}{1-k}(q-el'q)\right.$$
$$\left.+\frac{2Kk'^2}{1-k'}sn'q\,cn'q\,dn'q\right\}$$

$$=\mp \frac{\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}}{3}\sqrt{b-c}\{4(K-E)q-4Kel'q$$
$$+2Kk'sn'q\,cn'q\,dn'q\}$$

$$P_4' = \mp \frac{\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}}{3}\sqrt{b-c}\left\{4(K'-E')p-4K'elp\right.$$
$$\left.+\frac{\pi(1-k')-2K'k^2}{k'}snp\,cnp\,dnp\right\}$$

Die Flächen (1) und (3) schliessen allein 3 Räume völlig ein, zu denen sich der Canal P_2 erweitern lässt. Es sind dies die 3 Teile, in welche der Ellipsoidkörper (3) durch die 2 Schalen des Hyper-

boloids (1) geteilt wird. Letzteres ist, wenn p von 0 bis K, oder u von a bis b variirt, anfangs die yz Ebene, erzeugt von da an mit jeder von beiden Schalen eine Hälfte des mittleren jener 3 Räume, und geht schliesslich in die xz Ebene über. Setzt man also, um das Ellipsoid zum vollen zu machen, erst $r_0 = K$; $r_1 = 1$; dann $p_0 = 0$; $p_1 = p$, so erhält man nach Multiplication mit 2 den mittleren Raum zwischen den Hyperboloidschalen

$$P_2' = \mp 2 \frac{a-b}{3} \sqrt{a-c} \begin{vmatrix} p & elp & snp\, cnp\, dnp \\ 4K' & 4(K'-E') & 0 \\ r-K & elr + \frac{cnr\, dnr}{snr} - E & -\frac{cnr\, dnr}{k^2 sn^3 r} \end{vmatrix}$$

$$= \mp \tfrac{8}{3}(a-b)\sqrt{a-c} \left\{ \left[K' elp - (K'-E')p \right] \frac{cnr\, dnr}{k^2 sn^3 r} \right.$$

$$\left. + \left[K' elr - (K'-E')r - \frac{\pi}{2} + K' \frac{cnr\, dnr}{snr} \right] snp\, cnp\, dnp \right\}$$

Setzt man statt dessen $p_0 = p$; $p_1 = K$, so erhält man einen der 2 Räume auf der concaven Seite des Hyperboloids.

$$P_2'' = \mp \frac{a-b}{3} \sqrt{a-c} \begin{vmatrix} K-p & E-elp & -snp\, cnp\, dnp \\ 4K' & 4(K'-E') & 0 \\ r-K & elr + \frac{cnr\, dnr}{snr} - E & -\frac{cnr\, dnr}{k^2 sn^3 r} \end{vmatrix}$$

$$= \mp \tfrac{4}{3}(a-b)\sqrt{a-c} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - K' elp + (K'-E')p \right] \frac{cnr\, dnr}{k^2 sn^3 r} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\pi}{2} - K' elr + (K'-E') - K' \frac{cnr\, dnr}{snr} \right] snp\, cnp\, dnp \right\}$$

Das einschalige Hyperboloid (2) durchbohrt das Ellipsoid (3) und teilt es in ein Niet P_1' und einen Ring P_1''. Das halbe Niet wird von der Fläche (2) erzeugt, indem sie aus der xz Ebene, d. i. von $v = b$ oder $q = K'$ an variirt, der halbe Ring, indem sie aus der xy Ebene, d. i. von $v = c$ oder $q = 0$ an variirt, nachdem die Fläche (1) bereits die Periode vollendet hat. Setzt man also $q_0 = q$; $q_1 = K'$; $r_0 = K$; $r_1 = r$, so geht P_1 über in

$$P_1' = \mp 2\frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\begin{vmatrix} 4K & 4E & 0 \\ K'-q & K'-E'-q+el'q & -\frac{k'^2}{k^2}sn'q\,cn'q\,dn'q \\ r-K & elr+\frac{cnr\,dnr}{snr}-E & -\frac{cnr\,dnr}{k^2 sn^3 r} \end{vmatrix}$$

$$= \mp \frac{8}{3}(a-c)^{\frac{3}{2}}\left\{\left[\frac{\pi}{2} - Kel'q + (K-E)q\right]\frac{cnr\,dnr}{sn^3 r}\right.$$

$$\left. - \left[Er - Kelr - K\frac{cnr\,dnr}{snr}\right]k'^2 sn'q\,cn'q\,dn'q\right\}$$

Setzt man statt dessen $q_0 = 0$; $q_1 = q$, so geht P_1 über in

$$P_1'' = \mp 2\frac{a-b}{3}\sqrt{a-c}\begin{vmatrix} 4K & 4E & 0 \\ q & q-el'q & \frac{k'^2}{k^2}sn'q\,cn'q\,dn'q \\ r-K & elr+\frac{cnr\,dnr}{snr}-E & -\frac{cnr\,dnr}{k^2 sn^3 r} \end{vmatrix}$$

$$= \mp \frac{8}{3}(a-c)^{\frac{3}{2}}\left\{\left[Kel'q - (K-E)q\right]\frac{cnr\,dnr}{sn^3 r}\right.$$

$$\left. + \left[Er - Kelr - K\frac{cnr\,dnr}{snr}\right]k'^2 sn'q\,cn'q\,dn'q\right\}$$

In Betreff der geometrischen Bedeutung ist noch zu bemerken, dass, wenn man den vor den Determinanten stehenden Factor $(a-b)\sqrt{a-c}$ in die dritte Verticalreihe zieht, deren Elemente

$$(a-b)\sqrt{a-c}\,\varphi p = \sqrt{-U}$$

$$i(a-b)\sqrt{a-c}\,\varphi\bar{q} = \sqrt{V}$$

$$(a-b)\sqrt{a-c}\,\varphi\bar{r} = \sqrt{-W}$$

die Halbaxenproducte der 3 Flächen (1) (2) (3) ausdrücken.

Der Fall $a = b$ oder $b = c$, den wir ausgeschlossen haben, lässt überhaupt keine Anwendung zu, weil hier keine 3 orthogonalen, concentrischen, homofocalen Flächenscharen existiren. Die Rotationsaxe nämlich würde allen dreien gemeinsam sein, und die Schnitte der Flächen sämmtlich in parallelen Ebenen liegen, mithin einander nicht in Punkten treffen. Dagegen wollen wir unter den möglichen Grenzfällen denjenigen in Betracht ziehen, wo alle 3 Flächenscharen zugleich in Paraboloide übergehen.

2. Inhalt des Körpers zwischen 3 Paar orthogonalen Paraboloiden.

Substituirt man für x, y, z bzhw. $\sqrt{a}-\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{a}}, \frac{z}{\sqrt{a}}$, und setzt dann $a=\infty$, so gehen die Gl. (1) (2) (3) über in

$$u-2x+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}=0 \tag{10}$$

$$v-2x+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}=0 \tag{11}$$

$$w-2x+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w}=0 \tag{12}$$

Die erste und dritte stellen elliptische Paraboloide in entgegengesetzter Axenstellung, die zweite hyperbolische Paraboloide dar; der gemeinsame Mittelpunkt liegt in unendlicher Entfernung auf der x Axe, die Brennpunkte der Hauptschnitte $z=0$ und $y=0$ haben auf derselben die constanten Abscissen $x=\frac{b}{2}$ und $x=\frac{c}{2}$. Das Gleichungssystem nach x, y^2, z^2 aufgelöst giebt:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= u+v+w-b-c \\ y^2 &= \frac{(u-b)(v-b)(w-b)}{b-c} \\ z^2 &= -\frac{(u-c)(v-c)(w-c)}{b-c} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Das Resultat der Kubatur lässt sich am einfachsten durch die aufgestellte Substitution ableiten. Es ist bloss zu beachten, dass infolge der Multiplication aller Lineardimensionen mit $\sqrt{a}$ zunächst die Functionaldeterminante D, dann demgemäss der Ausdruck von P mit $a^{\frac{3}{2}}$ zu multipliciren ist. Dies lässt sich vollziehen, indem man die 9 Integrale, aus denen er besteht, mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, wodurch diese endliche Werte erlangen. Nun ist für $a=\infty$

$$\sqrt{\frac{a}{-U}}=\frac{1}{\sqrt{(u-b)(u-c)}}; \quad \sqrt{\frac{a}{V}}=\frac{1}{\sqrt{(b-v)(v-c)}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{-W}}=\frac{1}{\sqrt{(b-w)(c-w)}}$$

Setzt man

$$u=\frac{b+c}{2}-\frac{b-c}{2}\cos(i\varphi+\pi); \quad v=\frac{b+c}{2}-\frac{b-c}{2}\cos\chi$$

$$w=\frac{b+c}{2}-\frac{b-c}{2}\cos i\psi$$

so ist, abgesehen von einem gemeinsamen Doppelvorzeichen,

$$\int \frac{\partial v}{\sqrt{(b-v)(v-c)}} = \chi; \quad \int \frac{\left(v - \frac{b+c}{2}\right)\partial v}{\sqrt{(b-v)(v-c)}} = -\frac{b-c}{2}\sin\chi$$

$$\int \frac{\left(v - \frac{b+c}{2}\right)^2 \partial v}{\sqrt{(b-v)(v-c)}} = \frac{(b-c)^2}{8}(\chi + \sin\chi\cos\chi)$$

Die übrigen Integrale ergeben sich durch Substitution von $i\varphi + \pi$ und $i\psi$ für χ bei gleichzeitiger Multiplication mit i. Auch hier besteht die dritte Verticalreihe aus 2 Teilen, deren erster als proportional der ersten Verticalreihe wegfällt. Man erhält:

$$P = \pm \frac{(b-c)^3}{64} \begin{vmatrix} \varphi_1 - \varphi_0 & i\sin i\varphi_1 - i\sin i\varphi_0 & -i\sin 2i\varphi_1 + i\sin 2i\varphi_0 \\ \chi_1 - \chi_0 & \sin\chi_1 - \sin\chi_0 & \sin 2\chi_1 - \sin 2\chi_0 \\ \psi_1 - \psi_0 & -i\sin i\psi_1 + i\sin i\psi_0 & -i\sin 2i\psi_1 + i\sin 2i\psi_0 \end{vmatrix}$$

Nur die χ haben eine Periode, nach deren Durchlaufung das Sechsflach in den vierkantigen ringförmigen Canal P_2 übergeht. Man findet:

$$P_2 = \pm \frac{\pi}{32}(b-c)^3 \begin{vmatrix} \sin i\psi_1 - \sin i\psi_0 & -\sin 2i\psi_1 + \sin 2i\psi_0 \\ \sin i\varphi_1 - \sin i\varphi_0 & \sin 2i\varphi_1 - \sin 2i\varphi_0 \end{vmatrix}$$

Hieraus erhält man den von den beiden elliptischen Paraboloiden allein begrenzten Raum, indem man $\varphi_0 = 0$; $\psi_0 = 0$ setzt; dieser ist

$$P_2'' = \mp \frac{\pi}{32}(b-c)^3 \begin{vmatrix} \sin i\psi & -\sin 2i\psi \\ \sin i\varphi & \sin 2i\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{\pi}{16}(b-c)^3 \sin i\varphi \sin i\psi (\cos i\varphi + \cos i\psi)$$

$$= \pm \frac{\pi}{8}(b-c)^2 (u-w) \sin i\varphi \sin i\psi$$

$$= \pm \frac{\pi}{2}(u-w)\sqrt{(u-b)(u-c)(b-w)(c-w)}$$

3. Complanation der Seiten des Sechsflachs.

Es handelt sich hier um die Aufgabe, den Flächeninhalt eines von 2 Paar Krümmungslinien auf einer Fläche 2. Grades gebildeten Vierecks zu berechnen. Die gegenüberliegenden Seiten des Sechsflaches repräsentiren nur je ein solches Viereck für je 2 Parameterwerte; es bleiben demnach im ganzen 3 Krümmungslinienvierecke und

zwar auf 3 verschieden gearteten Flächen, auf zweischaligem, einschaligem Hyperboloid und Ellipsoid. Die Aufgabe für das Ellipsoid ist von Legendre, Traité des fonctions elliptiques, tome I. Application à la géométrie, section II. p. 350. gelöst. Doch sollte die Berechnung augenscheinlich nur als Mittel dienen den Flächeninhalt des ganzen Ellipsoids abzuleiten. Ausschliesslich in diesem Sinne wird sie auch von Spätern angeführt und reproducirt, ihr sogar ebendarum geringer Wert zugeschrieben, weil es zur Berechnung der ganzen Oberfläche andere und recht sinnreiche Methoden giebt. Nirgends aber findet sich der Vorzug ans Licht gestellt, dass wir an den Krümmungslinienvierecken doppelt variabele Flächenstücke von ziemlich einfach darstellbaren Inhalt besitzen anwendbar auf alle Flächen 2. Grades. Um die 3 Arten centraler Flächen 2. Grades leichter und übersichtlicher unter einer Form behandeln zu können, fasse ich die Krümmungslinienvierecke als Seiten eines Sechsflachs auf, womit noch der Vorteil verbunden ist, dass jeder Parameter nebst dessen Functionen zweimal zur Verwendung kommt.

Die Complanationsformel für die Fläche $u = \text{const.}$ ist

$$T = \int\int t \partial u \partial w$$

$$t^2 = \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \right\}$$

Durch Differentiation der Gl. (4) findet man:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{(w-u)(u-v)}{4U}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{(u-v)(v-w)}{4V}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = \frac{(v-w)(w-u)}{4W}$$

Bezeichnet man mit t_1, T_1, mit t_2, T_2 die analogen Grössen von t, T für die Flächen $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$, so ist hiernach

$$t = \frac{v-w}{4}\sqrt{\frac{u-v}{V}\frac{w-u}{W}}$$

$$t_1 = \frac{w-u}{4}\sqrt{\frac{v-w}{W}\frac{u-v}{U}}$$

$$t_2 = \frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{w-u}{U}\frac{v-w}{V}}$$

wo $B = E + i(K' - E')$ als Constante nicht in Rechnung kommt; endlich

$$D_1(\bar{p}, \varepsilon) = i\,sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon \int \frac{dn'^2 p'\, \partial p'}{1 - sn^2\varepsilon\, dn'^2 p'} = iD_4'(p', \varepsilon)$$

wo nach Gudermann gesetzt ist

$$D_4(p, \varepsilon) = sn'\varepsilon\, cn'\varepsilon\, dn'\varepsilon \int_0 \frac{dn^2 p\, \partial p}{1 - sn'^2\varepsilon\, dn^2 p}$$

Führt man dies ein und dividirt durch i, so erhält man, mit Weglassung sich hebender Terme:

$$F_0(p') = \frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} p' + D_4'(p', \varepsilon) \tag{19}$$

$$2F_1(p') = \frac{c - h}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon}\left(- \frac{k'^2 sn^4\varepsilon\, sn'p'\, cn'p'\, dn'p'}{1 - sn^2\varepsilon\, dn'^2 p'} - p' + el'p'\, sn^2\varepsilon \right)$$

In diese Functionen sind noch die den Grenzen der v und u entsprechenden Grenzen der q und p' einzusetzen, so dass die definitiven Werte der Integrale (15) lauten:

$$\left.\begin{array}{ll} F_0 = F_0(p_1') - F_0(p_0'); & F_1 = F_1(p_1') - F_1(p_0') \\ G_0 = G_0(q_1) - G_0(q_0); & G_1 = G_1(q_1) - G_1(q_0) \end{array}\right\} \tag{20}$$

Sie entsprechen für $h = w$ dem Krümmungslinienviereck T_2 auf dem Ellipsoid (3) ausgedrückt in (17).

Hieraus lassen sich nun die Werte der Sechsflachseiten T, T_1 durch einfache Substitution ableiten. Lässt man nämlich a, b, c und gleichzeitig u, v, w cyklisch in einander übergehen, so zeigt sich, dass die Moduln f, g, k und die elliptischen Argumente p, q, r und p', q', r' reell werden, während nur die elliptischen Parameter die 3 Formen annehmen

$$\bar{\gamma} = \gamma + iK', \qquad \bar{\delta} = i\delta + K + iK', \qquad \varepsilon$$

Durch letztere allein sind die Ausdrücke der Krümmungslinienvierecke auf den Hyperboloiden verschieden von denen auf dem Ellipsoid. Die cyklische Vertauschung der Elemente ergiebt:

1) Zur Anwendung auf das zweischalige Hyperboloid:

$$\text{Modul } f = \sqrt{\frac{h - b}{h - c}\,\frac{a - c}{a - b}}; \qquad \text{conj. Mod. } f' = \sqrt{\frac{a - h}{h - c}\,\frac{b - c}{a - b}}$$

$$sn^2\bar{\gamma} = \frac{1}{f^2 sn^2\gamma} = \frac{a - b}{h - b}; \qquad sn^2\gamma = \frac{h - c}{a - c}$$

$$-cn^2\bar{\gamma} = \frac{dn^2\gamma}{f^2 sn^2\gamma} = \frac{a-h}{h-b}; \quad cn^2\gamma = \frac{a-h}{a-c}$$

$$-dn^2\bar{\gamma} = \frac{cn^2\gamma}{sn^2\gamma} = \frac{a-h}{h-c}; \quad dn^2\gamma = \frac{a-h}{a-b}$$

$$h-w = -\frac{a-h}{1-f^2 sn^2\bar{\gamma}\, sn^2 r} = \frac{(a-h)\, sn^2\gamma}{sn^2 r - sn^2\gamma}$$

$$D_1(r, \bar{\gamma}) = r\frac{cn\gamma}{sn\gamma\, dn\gamma} + D_3(r, K-\gamma)$$

wo

$$D_3(r, \gamma) = f^2 sn\gamma\, cn\gamma\, dn\gamma \int_0 \frac{dn^2 r\, \partial r}{f'^2 - dn^2\gamma\, dn^2 r}$$

zu definiren ist. Hiernach erhält man aus (18)

$$iH_0(r) = \frac{f^2 sn\gamma\, cn\gamma}{dn\gamma} r + D_3(r, K-\gamma) \tag{21}$$

$$2iH_1(r) = \frac{a-h}{cn\gamma\, dn\gamma} sn\gamma \left(\frac{snr\, cnr\, dnr}{sn^2 r - sn^2\gamma} - r\, dn^2\gamma + elr\right)$$

Lässt man hier gleichzeitig w in v, und r in

$$\bar{q} = iq' + K + iK'$$

übergehen, so gehen H_0, H_1 über in G_0, G_1. Definirt man

$$h-v = \frac{(a-h)sn^2\gamma}{sn^2\bar{q} - sn^2\gamma} = \frac{(a-h)f^2 sn^2\gamma}{dn^2\gamma - f'^2 sn'^2 q'}$$

$$D_2(q, \gamma) = f'^2 sn'\gamma\, cn'\gamma\, dn'\gamma \int_0 \frac{sn^2 q\, \partial q}{1 - dn'^2\gamma\, sn^2 q}$$

so wird

$$D_3(\bar{q}, K-\gamma) = iD_2'(q', K-\gamma)$$

und man erhält nach Division durch i:

$$G_0(q') = \frac{f^2 sn\gamma\, cn\gamma}{dn\gamma} q' + D_2'(q', K-\gamma) \tag{22}$$

$$2G_1(q') = \frac{a-h}{cn\gamma\, dn\gamma} sn\gamma \left(\frac{f'^2 sn'q'\, cn'q'\, dn'q'}{f'^2 sn'^2 q' - dn^2\gamma} + q' f^2 sn^2\gamma - el'q'\right)$$

In diese unbestimmten Integrale sind noch die Integralgrenzen einzusetzen, so dass

$$\left.\begin{array}{ll} G_0 = G_0(q_1') - G_0(q_0'); & G_1 = G_1(q_1') - G_0(q_0') \\ H_0 = H_0(r_1) - H_0(r_0); & H_1 = H_1(r_1) - H_0(r_0) \end{array}\right\} \quad (23)$$

wird. Diese Werte entsprechen für $h = u$ der Gl. (14), welche das Krümmungslinienviereck T auf dem zweischaligen Hyperboloid (1) ausdrückt.

2) Zur Anwendung auf das einschalige Hyperboloid ergiebt die nochmalige cyklische Vertauschung:

$$\text{Modul } g = \sqrt{\frac{h-c}{a-h}\,\frac{a-b}{b-b}}; \qquad \text{conj. Mod. } g' = \sqrt{\frac{b-h}{a-h}\,\frac{a-c}{b-c}}$$

$$sn^2\bar{\delta} = \frac{dn'^2\delta}{g^2} = \frac{b-c}{h-c}; \quad sn'^2\delta = \frac{b-c}{a-c}$$

$$-cn^2\bar{\delta} = \frac{g'^2 cn'^2\delta}{g^2} = \frac{b-h}{h-c}; \quad cn'^2\delta = \frac{a-b}{a-c}$$

$$dn^2\bar{\delta} = g'^2 sn'^2\delta = \frac{b-h}{a-h}; \quad dn'^2\delta = \frac{a-b}{a-h}$$

$$u - h = \frac{b-h}{1-g^2 sn^2\bar{\delta}\, sn^2 p} = \frac{b-h}{1-dn'^2\delta\, sn^2 p}$$

$$D_1(p, \bar{\delta}) = -iD_2(p, \delta)$$

Hiernach leitet man die Gl. (18) durch Substitution über in

$$F_0(p) = -\frac{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta}{dn'\delta}p - D_2(p, \delta) \quad (24)$$

$$2F_1(p) = \frac{b-h}{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta\, dn'\delta}\left(\frac{dn'^4\delta\, snp\, cnp\, dnp}{1-dn'^2\delta\, sn^2 p} + pg'^2 cn'^2\delta - elp\, dn'^2\delta\right)$$

Lässt man u in w und p in

$$\bar{r} = ir' + K + iK'$$

übergehen, so gehen F_0, F_1 über in H_0, H_1. Definirt man

$$h - w = -\frac{b-h}{1-dn'^2\delta\, sn^2\bar{r}} = \frac{(b-h)g^2}{dn'^2\delta\, dn'^2 r' - g^2}$$

dann wird

$$D_2(\bar{r}, \delta) = iD_3'(r', \delta)$$

und man erhält nach Multiplication mit i:

$$iH_0(r') = \frac{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta}{dn'\delta} r' + D_3'(r', \delta) \tag{25}$$

$$2iH_1(r') = \frac{b-h}{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta\, dn'\delta}\left(\frac{g'^2 eln'^4\delta\, sn'r'\, cn'r'\, dn'r'}{g^2 - dn'^2\delta\, dn'^2 r'} + g^2 r' - el'r'\, dn'^2\delta\right.$$

Nach Einsetzung der Integralgrenzen erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 = H_0(r_1') - H_0(r_0'); & H_1 = H_1(r_1') - H_1(r_0') \\ F_0 = F_0(p_1) - F_0(p_0); & F_1 = F_1(p_1) - F_1(p_0) \end{array}\right\} \tag{26}$$

Diese Werte entsprechen für $h = v$ der Gl. (16), welche das Krümmungslinienviereck T_1 auf dem einschaligen Hyperboloid (2) ausdrückt.

Um hieraus einige specielle Resultate zu ziehen, möge q' seine Periode durchlaufen. Für $q_0' = 0$, $q_1' = 4K'$ geben die Gl. (22):

$$G_0 = 4K' el\gamma - 4(K' - E')\gamma$$

$$G_1 = 2\frac{a-h}{cn\gamma\, dn\gamma} sn\gamma (K' f^2 sn^2\gamma - E')$$

Dies nebst den Werten (21) in T eingesetzt giebt für $h = u$ den Flächeninhalt des geschlossenen Streifens auf dem zweischaligen Hyperboloid zwischen 2 Krümmungslinien, Schnitten zweier Ellipsoide. Dieser Streifen wird zur Calotte, indem er sich von den Nabelpunkten bis zum Scheitel zusammenklappt, wenn man $w_0 = c$, d. i. $r_0 = K$ setzt. Dann erhält man:

$$iH_0(r_0) = K el\gamma - E\gamma$$

$$2iH_1(r_0) = \frac{a-h}{cn\gamma\, dn\gamma} sn\gamma (E - K dn'^2\gamma)$$

und nach Einführung:

$$T = \frac{2(a-u) sn\gamma}{cn\gamma\, dn\gamma}\left\{\left[K' el\gamma - (K' - E')\gamma\right]\left(\frac{snr\, cnr\, dnr}{sn^2 r - sn^2\gamma} - r\, dn^2\gamma + elr\right)\right.$$

$$\left. - (K' f^2 sn^2\gamma - E')\left[\frac{f^2 sn\gamma\, cn\gamma}{dn\gamma} r + D_3(r, K - \gamma)\right] + \frac{\pi}{2}(\gamma\, dn^2\gamma - el\gamma)\right\}$$

Für $r = \frac{1}{2}K$ reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$T = \frac{(a-u) sn\gamma}{2 cn\gamma\, dn\gamma}\left\{\pi(\gamma dn^2\gamma - el\gamma) + (E' - K' f^2 sn^2\gamma)\log\frac{(1+f') sn\gamma cn\gamma - dn\gamma}{(1+f') sn\gamma cn\gamma + dn\gamma}\right\}$$

Da jedoch w sein ganzes Integral von c bis $-\infty$ durchläuft, wenn r von K bis γ variirt, so hat der letztere Ausdruck nur Gültigkeit für $\gamma < \frac{1}{2}K$, d. i. für $u < a - b + c$.

Ferner möge p seine Periode von $p_0 = 0$ bis $p_1 = 4K$ ganz durchlaufen; dann geben die Gl. (24):

$$F_0 = -4K\left(\frac{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta}{dn'\delta} + \delta - el'\delta\right) + 4E\delta - 2\pi$$

$$F_1 = 2\frac{(b-h)(Kg'^2 cn'^2\delta - E dn'^2\delta)}{g'^2 sn'\delta\, cn'\delta\, dn'\delta}$$

Dies nebst den Werten (25) in T_1 eingesetzt giebt für $h = v$ den Flächeninhalt des geschlossenen Streifens auf dem einschaligen Hyperboloid zwischen 2 Krümmungslinien, Schnitten zweier Ellipsoide.

Auf dem Ellipsoid lassen sich geschlossene Streifen nach zweierlei Verlauf angeben. Vollenden die q ihre Periode, so gehen die Gl. (18) über in

$$\left.\begin{aligned} iG_0 &= 4K\left(\frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} + el\varepsilon\right) - 4E\varepsilon \\ iG_1 &= -2\frac{(c-h)(K cn^2\varepsilon + E sn^2\varepsilon)}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Dies nebst den Werten (19) in T_2 eingesetzt giebt für $h = w$ den Flächeninhalt des geschlossenen Streifens vom Ellipsoid zwischen 2 zweischaligen Hyperboloiden.

Vollenden dagegen die p' ihre Periode, so geben die Gl. (19):

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= 4K'\left(\frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} + el\varepsilon - \varepsilon\right) + 4E'\varepsilon \\ F_1 &= 2\frac{(c-h)(E' sn^2\varepsilon - K')}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Dies nebst den Werten (18) in T_2 eingesetzt giebt für $h = w$ den Flächeninhalt des geschlossenen Streifens auf dem Ellipsoid zwischen 2 einschaligen Hyperboloiden.

Lässt man von q, p' das eine die ganze, das andre die halbe Periode durchlaufen, so wird die ganze Oberfläche des Ellipsoids erzeugt. Man hat dann die Werte (27) und (28) in (14) zugleich einzusetzen und durch 2 zu dividiren; dann kommt:

$$T_2 = 4\frac{c-w}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon}\begin{vmatrix} K\left(\frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} + el\varepsilon\right) - E\varepsilon & K cn^2\varepsilon + E sn^2\varepsilon \\ K'\left(\frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} + el\varepsilon\right) - (K'-E')\varepsilon & K' cn^2\varepsilon + (K'-E') sn^2\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$= 4\frac{c-w}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon}\begin{vmatrix} K & E \\ K' & K'-E' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{cn\varepsilon\, dn\varepsilon}{sn\varepsilon} + el\varepsilon & -\varepsilon \\ cn^2\varepsilon & sn^2\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$= 2\pi(c-w)\left(1 + \frac{\varepsilon\, cn^2\varepsilon + el\varepsilon\, sn^2\varepsilon}{sn\varepsilon\, cn\varepsilon\, dn\varepsilon}\right) \quad (29)$$

4. Flächeninhalt der Krümmungslinienvierecke auf den Paraboloiden.

Zur Uebertragung der Complanationsformeln auf die Paraboloide haben wir, wie es bei der Kubatur geschehen, für x, y, z zu setzen $\sqrt{a}-\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{a}}, \frac{z}{\sqrt{a}}$ und für $a=\infty$ die Grenzwerte zu nehmen. Hierbei bekommen die Grössen t und T den Divisor a, den wir auf die F, G, H so verteilen, dass jedes den Divisor $\sqrt{a}$ erhält. Nach Multiplication mit demselben erlangen sie dann die endlichen Werte

$$F_0=\tfrac{1}{2}\int\limits_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{\frac{u-h}{(u-b)(u-c)}};\quad F_1=\tfrac{1}{2}\int\limits_{u_0}^{u_1}\partial u\,\frac{(u-h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(u-b)(u-c)}}$$

$$G_0=\tfrac{1}{2}\int\limits_{v_0}^{v_1}\partial v\sqrt{\frac{v-h}{(v-b)(v-c)}},\quad G_1=\tfrac{1}{2}\int\limits_{v_0}^{v_1}\partial v\,\frac{(v-h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(v-b)(v-c)}}$$

$$H_0=\tfrac{1}{2}\int\limits_{w_0}^{w_1}\partial w\sqrt{\frac{w-h}{(w-b)(w-c)}};\quad H_1=\tfrac{1}{2}\int\limits_{w_0}^{w_1}\partial w\,\frac{(w-h)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(w-b)(w-c)}}$$

und die Ausdrücke (14) (16) (17) bleiben in Geltung.

Hier ist rücksichtlich der Anwendung auf das Paraboloid (12) zu setzen:

$$\text{Modul } k=\sqrt{\frac{b-c}{b-h}};\quad \text{conj. Mod. } k'=\sqrt{\frac{c-h}{b-h}}$$

$$b-v=(b-c)\,sn^2q;\quad v-c=(b-c)\,cn^2q;\quad v-h=(b-h)\,dn^2q$$

und es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} iG_0(q) &= \sqrt{b-h}\,el\,q \\ iG_1(q) &= \tfrac{1}{3}(b-h)^{\frac{3}{2}}(k^2 snq\,cnq\,dnq-k'^2q)+A\,el\,q \end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

wo der letzte Term in der Determinante sich hebt. Die gleiche Form erhält dann der Ausdruck für F_0, F_1, wenn man v in u und q in ip' übergehen lässt. Es wird dann

$$u-b=(b-c)\frac{sn'^2p'}{cn'^2p'};\quad u-c=\frac{b-c}{cn'^2p'};\quad u-h=(b-h)\,\frac{dn'^2p'}{cn'^2p'}$$

$$F_0(p')=\sqrt{b-h}\left(p'-el'p'+\frac{sn'p'\,dn'p'}{cn'p'}\right)$$

$$F_1(p')=\tfrac{1}{3}(b-h)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{k^2 sn'p'\,dn'p'}{cn'^3p'}-k'^2p'\right)$$

woraus die in T_2 einzusetzenden bestimmten Integrale nach (2
vorgehen.

Die analogen Formeln für T erhält man, indem man b mi
Moduln f, g, k, nebst den Parametern u, v, w cyklisch ver
und q in ir, p' in iq' übergehen lässt. Dann wird

$$\text{Modul } f = \sqrt{\frac{b-c}{h-c}}; \quad \text{conj. Mod. } f' = \sqrt{\frac{h-b}{h-c}}$$

$$c-w = -(b-c)sn^2 ir; \quad b-w = (b-c)cn^2 ir; \quad h-w = (h-$$
$$v-c = (b-c)sn^2 q'; \quad b-v = (b-c)cn^2 q'; \quad h-v = (h-$$

die G gehen in die H, die H in die F über. Es ist jedoch le
sehen, dass alsdann die neuen iH genau die Form der alten
die neuen G die Form der alten iG haben, dass also T sich
darstellt wie T_2, nur mit vertauschten b und c, q und q', p'
Beide sind Krümmungslinienvierecke auf elliptischen Parabolo
verschiedener Lage.

Für das hyperbolische Paraboloid (11) setzen wir

$$\text{Modul } g = \sqrt{\frac{b-h}{b-c}}; \quad \text{conj. Mod. } g' = \sqrt{\frac{h-c}{b-c}}$$

$$u-b = -(b-h)sn^2 ip; \quad u-h = (b-h)cn^2 ip; \quad u-c = (b-$$
$$b-w = (b-h)\,sn^2\bar{p}; \quad h-w = -(b-h)\,cn^2\bar{r}; \quad c-w = -(b-$$
$$\bar{r} = r' + iK'$$

dann kommt:

$$F_0(p) = \sqrt{b-c}\,\frac{g^2}{i}\int cn^2 ip\,\partial ip = \sqrt{b-c}\,\frac{el\,ip - g'^2 ip}{i}$$
$$= \sqrt{b-c}\left(g^2 p - el' p + \frac{sn' p\, dn' p}{cn' p}\right.$$

$$F_1(p) = (b-c)^{\frac{3}{2}}\frac{g^4}{i}\int cn^4 ip\,\partial ip = (b-c)^{\frac{3}{2}}\frac{g^2}{3i}(sn\,ip\,cn\,ip\,dn\,ip + g$$
$$= \frac{b-h}{3}\sqrt{b-c}\left(\frac{sn' p\, dn' p}{cn'^3 p} + g'^2 p\right)$$

nach Substitution von $\bar{r}$ für ip

$$H_0(r') = \sqrt{b-c}\,(el\,\bar{r} - g'^2\,\bar{r})$$
$$= \sqrt{b-c}\left(el\,r' - g'^2 r' + \frac{cn\,r'\,dn\,r'}{sn\,r'}\right)$$

$$iH_1(r') = \tfrac{1}{3}(b-c)^{\frac{3}{2}} g^2 (sn\,\bar{r}\; cn\,\bar{r}\; dn\,\bar{r} + g'^2\,\bar{r})$$
$$= \frac{b-h}{3}\sqrt{b-c}\left(-\frac{cn\,r'\; dn\,r'}{g^2\, sn^3 r'} + g'^2 r'\right)$$

wo die bei Einsetzung der Integralgrenzen und bei Einführung in die Determinante sich hebenden Terme weggelassen sind. Hieraus ergeben sich nach (26) die Elemente der Determinante T_1, welche das Krümmungslinienviereck auf dem hyperbolischen Paraboloid (11) darstellt.

Lässt man in (30) q die ganze Periode durchlaufen, so wird

$$iG_0 = 4E\sqrt{b-h}; \quad iG_1 = -\tfrac{4}{3}Kk'^2(b-h)^{\frac{3}{2}}$$

und T_2 geht in den geschlossenen Streifen des elliptischen Paraboloids (12) zwischen den Schnitten zweier elliptischen Paraboloide (10) über. Dieser Streifen wird zur Calotte, indem die eine Grenzlinie in den Hauptschnittsbogen zwischen beiden Nabelpunkten zusammenklappt, wenn man die untere Grenze $u_0 = b$, d. i. $p_0' = 0$ setzt. Da $F_0(0) = 0$ ist, so wird

$$F_0 = F_0(p'); \quad F_1 = F_1(p')$$

und man findet:

$$T_2 = \tfrac{4}{3}(b-w)^2\left\{k'^2[(K-E)p' - Kel'p'] + \frac{sn'p'\,dn'p'}{cn'p'}\left(Kk'^2 + \frac{Ek^2}{cn'^2p'}\right)\right\}$$

das ist für $p' = \tfrac{1}{2}K'$:

$$T_2 = \tfrac{2}{3}(b-w)^2\left\{(Kk'^2 + 2Ek)(1+k) - \frac{\pi}{2}k'^2\right\}$$

Die Streifen auf dem hyperbolischen Paraboloid verlaufen für beide Krümmungslinienscharen ins Unendliche.

5. Vergleichbare Flächenstücke auf heterogenen Flächen.

Man kann untersuchen, ob sich zwischen irgend zwei verschieden gearteten Seiten eines speciellen Sechsflachs oder wenigstens zwischen den Integralen, welche nach (14) (16) (17) die Bestandteile ihrer Ausdrücke bilden, Relationen finden. Es zeigt sich in der Tat, dass es in jedem orthogonalen Flächensystems 2. Grades 3 solche Sechsfläche giebt, auf denen 2 in einer Krümmungslinie zusammenstossende Seitenflächen der Art verbunden sind, dass die elliptischen Moduln gleich oder conjugirt, die elliptischen Parameter gleich oder complementär, die elliptischen Argumente paarweise gleich sind, und dass nach Eli-

mination aller elliptischen Integrale 2 lineare Relationen zwischen den 2 mal 4 Elementen der betreffenden Determinanten übrig bleiben; dass es ferner einen besondern Fall des Flächensystems giebt, wo 2 Seiten einer Schar von Sechsflächen in noch näherer Verbindung stehen, indem hier alle 4 Elemente mit den entsprechenden einzeln Summen oder Differenzen frei von elliptischen Functionen bilden, und eine Relation zwischen den Seitenflächen selbst hervorgeht.

Ehe wir an diese Untersuchung gehen, wollen wir die gefundenen Formeln auf die geringste Anzahl unabhängiger Grössen reduciren, und setzen deshalb

$$a-b=\alpha; \quad b-c=\alpha\beta$$

Dann ist β eine positive, sonst beliebige Constante für ein bestimmtes Flächensystem, deren Wert für alle ähnlichen Systeme derselbe ist, während α nur einen die Lineardimensionen des Ganzen bestimmenden Factor ausdrückt. Ferner sei

$$a-u=\alpha u_1; \quad b-v=\alpha v_1; \quad c-w=\alpha w_1$$

dann sind auch die neuen Flächenparameter u_1, v_1, w_1 unabhängig von den Lineardimensionen, und man hat:

$$u_1=\frac{(1+\beta)f'^2}{\beta+f'^2}; \quad v_1=\frac{\beta g'^2}{1+\beta g^2}; \quad w_1=\frac{\beta(1+\beta)k'^2}{k^2-\beta k'^2} \tag{31}$$

d. h. diese 3 Werte haben die Parameter für die 3 Flächen, auf denen die Moduln f, g, h gelten. Führt man dieselben in die Ausdrücke der elliptischen Parameter γ, δ, ε ein, so erhält man:

$$sn^2\gamma=\frac{\beta}{\beta+f'^2} \qquad cn^2\gamma=\frac{f'^2}{\beta+f'^2} \qquad dn^2\gamma=\frac{(1+\beta)f'^2}{\beta+f'^2}$$

$$sn'^2\delta=\frac{\beta}{1+\beta} \qquad cn'^2\delta=\frac{1}{1+\beta} \qquad dn'^2\delta=\frac{1+\beta g^2}{1+\beta}$$

$$sn^2\varepsilon=\frac{k^2-\beta k'^2}{k^2} \qquad cn^2\varepsilon=\frac{\beta k'^2}{k^2} \qquad dn^2\varepsilon=(1+\beta)k'^2$$

Ebenso können wir jetzt die elliptischen Argumente p, q, r, p', q', r' in den Moduln der schneidenden Flächen darstellen. Man findet:

auf der Fläche (u) $\quad sn'(K'-q')=g; \quad sn(K-r)=k' \quad$ (Mod. f)
auf der Fläche (v) $\quad sn'(K'-r')=k; \quad sn(K-p)=f' \quad$ (Mod. g)
auf der Fläche (w) $\quad sn'(K'-p')=f; \quad sn(K-q)=g' \quad$ (Mod. k)

Diese Argumente sind also von der specifischen Grösse β, d. i. dem Verhältniss der Exentricitäten, unabhängig, mithin allen orthogonalen

confocalen Flächensystemen 2. Grades gemeinsam und bezeichnen auf denselben entsprechende Punkte.

Mittelst der vorstehenden Formeln wollen wir endlich noch die algebraischen Bestandteile der Ausdrücke der F, G, H auf dieselben Grössen reduciren. Auf der Fläche (u) kommen folgende 4 Integralfunctionen in Anwendung:

$$G_0(q') = Aq' + D_2'(q', K-\gamma); \quad G_1(q') = \frac{\alpha}{2} A_0 (A_1 + A_3 q' - el' q')$$

$$iH_0(r) = Ar + D_3(r, K-\gamma); \quad iH_1(r) = \frac{\alpha}{2} A_0 (A_2 + A_4 r + el r)$$

$$A = f^2 \sqrt{\frac{\beta}{(1+\beta)(\beta+f'^2)}}; \quad A_0 = \sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{\beta+f'^2}}$$

$$A_1 = -\frac{\beta+f'^2}{1+\beta g^2} \frac{gg'}{\sqrt{1-g^2 f'^2}}; \quad A_2 = \frac{\beta+f'^2}{k^2-\beta k'^2} \frac{kk'}{\sqrt{1-f^2 k'^2}}$$

$$A_3 = \frac{\beta f^2}{\beta+f'^2}; \qquad A_4 = -\frac{(1+\beta)f'^2}{\beta+f'^2}$$

auf der Fläche (v):

$$iH_0(r') = Br' + D_3'(r', \delta); \quad iH_1(r') = \frac{\alpha}{2} B_0 (B_1 + B_3 r' - el' r')$$

$$F_0(p) = -Bp - D_2'(p, \delta); \quad F_1(p) = \frac{\alpha}{2} B_0 (B_2 + B_4 p - el p)$$

$$B = g'^2 \sqrt{\frac{\beta}{(1+\beta)(1+\beta g^2)}}; \quad B_0 = \sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta g^2}}$$

$$B_1 = -\frac{1+\beta g^2}{k^2-\beta k'^2} \frac{kk'}{\sqrt{1-k^2 g'^2}}; \quad B_2 = \frac{1+\beta g^2}{\beta+f'^2} \frac{ff'}{\sqrt{1-g^2 f'^2}}$$

$$B_3 = \frac{(1+\beta)g^2}{1+\beta g^2}; \qquad B_4 = \frac{g'^2}{1+\beta g^2}$$

auf der Fläche (w):

$$F_0(p') = Cp' + D_4'(p', \varepsilon); \quad F_1(p') = \frac{\alpha}{2} C_0 (C_1 + C_3 p' + el' p')$$

$$iG_0(q) = Cq + D_1(q, \varepsilon); \quad iG_1(q) = \frac{\alpha}{2} C_0 (C_2 + C_4 q - el q)$$

$$C = k'^2 \sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{k^2-\beta k'^2}}; \qquad C_0 = \sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{k^2-\beta k'^2}}$$

$$C_1 = -\frac{k^2-\beta k'^2}{\beta+f'^2}\frac{ff'}{\sqrt{1-f^2k'^2}};\quad C_2 = \frac{k^2-\beta k'^2}{1+\beta g^2}\frac{gg'}{\sqrt{1-k^2g'^2}}$$

$$C_3 = -\frac{k^2}{k^2-\beta k'^2};\qquad C_4 = -\frac{\beta k'^2}{k^2-\beta k'^2}$$

Wir verbinden zuerst die Flächen (v) und (w). Aus den für die Sinuscoamplituden aufgestellten Formeln ist sofort zu ersehen, dass die Argumente paarweise gleich werden, wenn man setzt:

$$\text{I.}\quad g' = k;\quad f = f' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

denn dann ist

$$r' = q;\quad p' = p$$

Soll auch $\delta = \varepsilon$ werden, so ist die Bedingung

$$\frac{k^2}{k'^2} = \beta(1+\beta)$$

Wir betrachten k als gemeinsamen Modul und verwenden ihn neben β, um die Ausdrücke so einfach als möglich zu gestalten. Dann stellen sich die Werte der Coefficienten B, C u. s. w. folgendermassen dar:

$$B = \frac{\beta k'^2}{k}\quad\Big|\quad B_0 = \frac{\beta}{k}\quad\Big|\quad B_1 = -\frac{k^5}{\beta^4 k'^4\sqrt{1+k^2}}\quad\Big|\quad B_3 = \frac{\beta k'^2}{k^2}$$

$$C = \frac{k}{\beta}\quad\Big|\quad C_0 = \frac{k}{\beta k'^2}\quad\Big|\quad C_2 = \frac{\beta^4 k'^4}{k^3\sqrt{1+k^2}}\quad\Big|\quad C_4 = -\frac{1}{\beta}$$

$$B_2 = \frac{k^4}{(1+2\beta)\beta^2 k'^2}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}\quad\Big|\quad B_4 = \frac{\beta^2 k'^2}{k^2}$$

$$C_1 = -\frac{\beta^2 k'^2}{1+2\beta}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}\quad\Big|\quad C_3 = -\frac{k^2}{\beta^2 k'^2}$$

Bekanntlich sind $D_1 + D_3$ und $D_2 + D_4$ in Logarithmen und Arcus darstellbar. Verbindet man demgemäss und eliminirt die elliptischen Integrale 2. Gattung, so erhält man:

$$iG_0^{(w)}(q) + iH_0^{(v)}(q) = \frac{q}{k} + \log\frac{\sqrt{1+k^2}-1}{k}$$

$$\frac{2i}{\alpha}\{\beta G_1^{(w)}(q) - (1+\beta)H_1^{(v)}(q)\} = \frac{1+2k^2-k^4}{k^2k'^2\sqrt{1+k^2}} - \frac{1+2\beta}{k}q$$

$$F_0^{(w)}(p) - F_0^{(v)}(p) = \frac{p}{k} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$$

$$\frac{2}{\alpha}\{\beta F_1^{(w)}(p)+(1+\beta)F_1^{(v)}(p)\}=k\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}-\frac{1+2\beta}{k}p$$

Eliminirt man auch noch die Integrale 1. Gattung p, q, so kommt:

$$(1+2\beta)\left\{iG_0^{(w)}(q)+iH_0^{(v)}(q)+\log\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{k}\right\}$$
$$+\frac{2i}{\alpha}\{\beta G_1^{(w)}(q)-(1+\beta)H_1^{(v)}(q)\}=\frac{1+2k^2-k^4}{k^2k'^2\sqrt{1+k^2}}$$

$$(1+2\beta)\left\{F_0^{(w)}(p)-F_0^{(v)}(p)-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}\right\}$$
$$+\frac{2}{\alpha}\{\beta F_1^{(w)}(p)+(1+\beta)F_1^{(v)}(p)\}=k\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$$

Wollte man statt dessen $\delta+\varepsilon=K$ setzen, so wäre die Bedingung $k=1$.

Verbindet man ferner die Flächen (w) und (u), so werden die Argumente sichtlich paarweise gleich, wenn man setzt:

$$\text{II.}\quad f=g=k$$

denn dann ist

$$q'=p';\quad r=q$$

Hier kann man die elliptischen Parameter gleich oder complementär machen. Sei

$$\text{A)}\quad \varepsilon+\gamma=K$$

wofür die Bedingung ist

$$\beta=\frac{k^2}{k'^2}-1,\qquad \text{oder } k^2=\frac{1+\beta}{2+\beta}$$

dann sind die Werte der Coefficienten:

$$C=\sqrt{\frac{\beta(1+\beta)}{2+\beta}}\qquad C_0=\sqrt{\beta(1+\beta)(2+\beta)}$$

$$A=\sqrt{\frac{\beta}{(1+\beta)(2+\beta)}}\qquad A_0=\sqrt{\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}}$$

$$C_1=-\frac{(1+\beta)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3+3\beta+\beta^2}}\qquad C_3=-(1+\beta)$$

$$A_1=-\frac{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}}{(2+2\beta+\beta^2)\sqrt{3+3\beta+\beta^2}}\qquad A_3=\frac{\beta}{1+\beta}$$

$$C_2 = \frac{1}{2+2\beta+\beta^2}\sqrt{\frac{1+\beta}{3+3\beta+\beta^2}} \qquad \Big| \qquad C_4 = -\beta$$

$$A_1 = \frac{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+3\beta+\beta^2}} \qquad \Big| \qquad A_4 = -\frac{1}{1+\beta}$$

Eliminirt man wie oben die Integrale 3. und 2. Gattung, so kommt:

$$F_0^{(w)}(q') + G_0^{(u)}(q') = \sqrt{\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}}\, q' + \operatorname{arctg} \frac{1+\beta}{\sqrt{\beta(2+\beta)(3+3\beta+\beta^2)}}$$

$$\frac{2}{\alpha}\frac{F_1^{(w)}(q') + (1+\beta)\, G_1^{(u)}(q')}{\sqrt{\beta(1+\beta)(2+\beta)}} = -\frac{(1+\beta)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+\beta} + (1+\beta)^{\frac{3}{2}}}{(2+2\beta+\beta^2)\sqrt{3+3\beta+\beta^2}} - \frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}\, q'$$

$$iG_0^{(w)}(q) + iH_0^{(u)}(q) = \sqrt{\frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta}}\, q - \log \frac{(1+\beta)\sqrt{2+\beta} + \sqrt{\beta(3+3\beta+\beta^2)}}{\sqrt{2+2\beta+3\beta^2}}$$

$$\frac{2i}{\alpha}\frac{G_1^{(w)}(q) + (1+\beta)\, H_1^{(u)}(q)}{\sqrt{\beta(1+\beta)(2+\beta)}} = \frac{1+2(1+\beta)^2}{1+(1+\beta)^2}\sqrt{\frac{1+\beta}{3+3\beta+\beta^2}} - \frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}$$

woraus nach Elimination von q', q:

$$(1+\beta+\beta^2)\left\{F_0^{(w)}(q') + G_0^{(u)}(q') - \operatorname{arctg}\frac{1+\beta}{\sqrt{\beta(2+\beta)(3+3\beta+\beta^2)}}\right\}$$
$$+ \frac{2}{\alpha}\{F_1^{(w)}(q') + (1+\beta)\, G_1^{(u)}(q')\}$$
$$= -\frac{1+(1+\beta)^2+(1+\beta)^4}{1+\beta++(1+\beta)^3}\sqrt{\frac{\beta(2+\beta)}{3+3\beta+\beta^2}}$$

$$(1+\beta+\beta^2)\left\{iG_0^{(w)}(q) + iH_0^{(u)}(q) + \log\frac{(1+\beta)\sqrt{2+\beta} + \sqrt{\beta(3+3\beta+\beta^2)}}{\sqrt{2+2\beta+3\beta^2}}\right\}$$
$$+ \frac{2i}{\alpha}\{G_1^{(w)}(q) + (1+\beta)\, H_1^{(u)}(q)\}$$
$$= \frac{1+2(1+\beta)^2}{1+(1+\beta)^2}\,\frac{1+\beta}{\sqrt{\beta(2+\beta)(3+3\beta+\beta^2)}}$$

Sei statt dessen

$$\text{B)} \quad \gamma = \varepsilon$$

wofür die Bedingung ist

$$k^2 = \beta < 1$$

dann haben die Coefficienten folgende Werte:

$$C = (1-\beta)\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}} \quad \Big| \quad C_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}} \quad \Big| \quad C_1 = -\beta^2\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta+\beta^2}}$$

$$A = \beta\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \quad \Big| \quad A_0 = \sqrt{\beta(1+\beta)} \quad \Big| \quad A_1 = -\frac{1}{1+\beta^2}\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta+\beta^2}}$$

$$C_3 = -\frac{1}{\beta} \quad \Big| \quad C_2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta+\beta^2}} \quad \Big| \quad C_4 = -\frac{1-\beta}{\beta}$$

$$A_3 = \beta^2 \quad \Big| \quad A_2 = \frac{1}{\beta^2}\sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta+\beta^2}} \quad \Big| \quad A_4 = -(1-\beta^2)$$

Die Elimination der Integrale 3. und 2. Gattung ergiebt:

$$F_0^{(w)}(q') - G_0^{(u)}(q') = (1-\beta)\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}\,q' + \operatorname{arctg}\left(\beta\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta^3}}\right)$$

$$\frac{2}{\alpha}\{\beta F_1^{(w)}(q') + G_1^{(u)}(q')\} = -\frac{1+\beta^2+\beta^4}{1+\beta^2}\,\frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta+\beta^2}} - (1-\beta^3)\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}\,q'$$

$$iG_0^{(w)}(q) - iH_0^{(u)}(q) = (1-\beta)\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}\,q + \log\frac{\sqrt{1+\beta^3} - \sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta(1+\beta^2)}}$$

$$\frac{2i}{\alpha}\{\beta G_1^{(w)}(q) + H_1^{(u)}(q)\} = \frac{1+\beta^2+\beta^4}{\beta(1+\beta^2)}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta(1-\beta+\beta^2)}} - (1-\beta^3)\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}\,q$$

und die Elimination von q', q:

$$(1+\beta+\beta^2)\left\{F_0^{(w)}(q') - G_0^{(u)}(q') - \operatorname{arctg}\left(\beta\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta^3}}\right)\right\}$$
$$+\frac{2}{\alpha}\{\beta F_1^{(w)}(q') + G_1^{(u)}(q')\} = -\frac{1+\beta^2+\beta^4}{1+\beta^2}\,\frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta+\beta^2}}$$

$$(1+\beta+\beta^2)\left\{iG_0^{(w)}(q) - iH_0^{(u)}(q) - \log\frac{\sqrt{1+\beta^3} + \sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta(1+\beta^2)}}\right\}$$
$$+\frac{2i}{\alpha}\{\beta G_1^{(w)}(q) + H_1^{(u)}(q)\} = \frac{1+\beta^2+\beta^4}{\beta(1+\beta^2)}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta(1-\beta+\beta^2)}}$$

Verbindet man endlich die Flächen (u) und (v), so werden die Argumente paarweise gleich, wenn man setzt

$$\text{III.} \quad f = g'; \quad k = k' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

denn dann ist

$$q' = p; \quad r' = r$$

Wollte man $\gamma = \delta$ setzen, so würde $f = 0$. Für $\gamma + \delta = K$ erhält man $\beta = 1$. In diesem Falle wird

$$r = \gamma = K - \delta$$

daher erreichen die Integrale $D_3(r, \delta)$ an der obern Grenze gerade ihren Unstetigkeitspunkt und werden unendlich, wie auch die Terme A_2, B_1. Dieser Umstand steht jedoch der Bildung der Relation nicht entgegen; denn $A_2 + B_1$ hat einen endlichen Grenzwert, und $D_3(r', \delta) - D_3(r, K-\gamma)$ verschwindet, wenn man nur zuerst $\beta = 1$, $f = g'$ setzt, nachher k stetig in $\sqrt{\frac{1}{2}}$ übergehen lässt. Die Coefficienten werden

$$A = B = \frac{f^2}{\sqrt{2(1+f'^2)}}; \quad A_0 = B_0 = \sqrt{\frac{2}{1+f'^2}}$$

$$-A_1 = B_2 = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}; \quad A_3 = B_4 = \frac{f^2}{1+f'^2}$$

$$A_2 + B_1 = -\frac{f^2}{\sqrt{2(1+f'^2)}}; \quad -A_4 = B_3 = \frac{2f'^2}{1+f'^2}$$

daher

$$G_0^{(u)}(p) = -F_0^{(v)}(p); \quad G_1^{(u)}(p) = F_1^{(v)}(p) - \frac{\alpha f' \sqrt{2}}{1+f'^2}$$

$$iH_0^{(u)}(r) = iH_0^{(v)}(r); \quad iH_1^{(u)}(r) = -iH_1^{(v)} + \frac{\alpha}{2}\frac{f^2}{1+f'^2}$$

Will man von den vorstehenden Relationen Anwendung auf die Flächenstücke machen, so hat man erst die untern Grenzen der Integrale F, G, H zu bestimmen. Die F und G kann man von den Argumentwerten 0 an rechnen, so dass

$$G_0^{(u)} = G_0(q'); \quad G_1^{(u)} = G_1(q'); \quad F_0^{(v)} = F_0(p); \quad F_1^{(v)} = F_1(p)$$
$$F_0^{(w)} = F_0(p'); \quad F_1^{(w)} = F_1(p'); \quad G_0^{(w)} = G_0(p); \quad G_1^{(w)} = G_1(p)$$

wird. Die Integrale $H^{(u)}$, in denen das Intervall von 0 bis zum Unstetigkeitspunkt keine geometrische Bedeutung hat, lassen sich statt dessen vom Quadranten an rechnen; dann wird

$$iH_0^{(u)} = iH_0(r) - AK - E(K-\gamma) + Kel(K-\gamma)$$
$$= iH_0(r) + E\gamma - Kel\gamma$$

$$iH_1^{(u)} = iH_1(r) - \frac{\alpha}{2}A_0(A_4K + E) \quad (\text{Mod. } f)$$

Von den Integralen $H^{(v)}$ ist im Gegenteil das Intervall vom Unstetigkeitspunkt bis zum Ende des Quadranten ohne geometrische Bedeutung; wir können nur 0 zur untern Grenze nehmen, so dass

$$iH_0^{(v)} = iH_0(r'); \quad iH_1^{(v)} = iH_1(r')$$

wird; dann gehen die Resultate von III. über in

$$G_0^{(u)} = -F_0^{(v)}; \quad G_1^{(u)} = F_1^{(v)} - \frac{\alpha f'\sqrt{2}}{1+f'^2}$$

$$iH_0^{(u)} = iH_0^{(v)} + E\gamma - Kel\gamma$$

$$iH_1^{(u)} = iH_1^{(v)} + \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{f^2}{1+f'^2} + \left(\frac{2}{1+f'^2}\right)^{\frac{3}{2}} f'^2 K - E\sqrt{\frac{2}{1+f'^2}}\right\}$$

woraus:

$$T + T_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2(1+f'^2)}}\left\{2f' iH_0^{(v)} - \left(\frac{f^2}{\sqrt{2}} + \frac{2f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}K - \sqrt{1+f'^2}E\right)F_0^{(v)}\right\}$$
$$- (E\gamma - Kel\gamma)\, G_1^{(u)}$$

Die Begrenzungen der Flächenstücke sind hiernach folgende. Für $q' = 0$ wird $v = b$, $y = 0$; für $r = K$ wird $w = c$, $z = 0$; daher wird T begrenzt von den Hauptschnitten $y = 0$ und $z = 0$ und von den Schnitten der Flächen (v_1), (w_1) gemäss (31), wo für g, k, β die respectiven Werte zu setzen sind, also in III. von den Flächen

$$v_1 = \frac{f^2}{1+f'^2}; \quad w_1 = \infty$$

oder, in den ursprünglichen Grössen dargestellt,

$$v = 2b - u; \quad w = -\infty$$

Für $r' = 0$ wird $w = c$, $z = 0$; für $p = 0$ wird $u = b$, $y = 0$. Daher ist T_1 begrenzt von den 2 Hauptschnitten $y = 0$, $z = 0$ und von den Schnitten der Flächen (u_1), (w_1) gemäss (31), also in III. von den Flächen

$$u_1 = \frac{2f'^2}{1+f'^2}; \quad w_1 = \infty$$

das ist

$$u = 2b - v; \quad w = -\infty$$

Für $p' = 0$ wird $u = a$, $x = 0$; für $q = 0$ wird $v = c$, $z = 0$. Daher ist T_2 begrenzt von den 2 Hauptschnitten $x = 0$, $z = 0$ und den Schnitten der Flächen (u_1), (v_1).

Bei den Paraboloiden setzen wir

$$b - c = \alpha^2; \quad u - b = \alpha^2 u_1; \quad b - v = \alpha^2 v_1; \quad c - w = \alpha^2 w_1$$

Hier bildet α nur einen Factor der Integrale; im übrigen lassen sich alle Grössen in den blossen Moduln ausdrücken. Man findet:

$$u_1 = \frac{f'^2}{f^2}; \quad v_1 = g^2; \quad w_1 = \frac{k'^2}{k^2}$$

auf der Fläche (u)	auf der Fläche (v)	auf der Fläche (w)
$snq' = g'$	$snr' = k$	$sn'p' = f'$
$sn'r = k'$	$sn'(K'-p) = f$	$snq = g$
(Mod. f)	(Mod. g)	(Mod. k)

Da die Flächen (u), (w) gleichartig sind, so vergleichen wir nur die Vierecke auf den Flächen (v), (w). Hier werden die Argumente paarweise gleich oder complementär für

$$f' = g' = k$$

Betrachten wir k als gemeinsamen Modul, so wird

$$sn'r' = sn'p' = k; \qquad sn(K-p) = snq = k'$$

also

$$r' = p'; \qquad q = K - p$$

Die Integralfunctionen auf der Fläche (v) sind

$$iH_0(p') = \alpha\left(\frac{k'}{k}\sqrt{1-k^2k'^2} - k^2p' + el'p'\right)$$

$$iH_1(p') = \tfrac{1}{3}\alpha^3k'^2\left(-\frac{\sqrt{1-k^2k'^2}}{k^3k'} + k^2p'\right)$$

$$F_0(p) = \alpha\left(\frac{k}{k'\sqrt{1-k^2k'^2}} + k'^2p - elp\right)$$

$$F_1(p) = \tfrac{1}{3}\alpha^3k'^2\left(\frac{\sqrt{1-k^2k'^2}}{kk'} + k^2p\right)$$

auf der Fläche (w)

$$F_0(p') = \frac{\alpha}{k}\left(\frac{k}{k'}\sqrt{1-k^2k'^2} + p' - el'p'\right)$$

$$F_1(p') = \frac{\alpha^3}{3k^3}\left(\frac{k^3}{k'^3}\sqrt{1-k^2k'^2} - k'^2p'\right)$$

$$iG_0(q) = \frac{\alpha}{k}\left(\frac{k^3k'}{\sqrt{1-k^2k'^2}} + E - elp\right)$$

$$iG_1(q) = \frac{\alpha^3}{3k^3}(k^3k'\sqrt{1-k^2k'^2} - k'^2K + k'^2p)$$

Eliminirt man die Integrale 2. Gattung, so kommt:

$$iH_0(p') + kF_0(p') = \alpha\left(\frac{\sqrt{1-k^2k'^2}}{kk'} + k'^2p'\right)$$

$$F_0(p) - kiG_0(q) = \alpha\left(\frac{k}{k'}\sqrt{1-k^2k'^2} - E + k'^2p\right)$$

Jetzt kann man die Integrale 1. Gattung zwischen je 3 Gleichungen eliminiren und erhält:

$$iH_0(p') + kF_0(p') - \frac{3iH_1(p')}{\alpha^2k^2} = \frac{\alpha}{k^5k'}(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$iH_0(p') + kF_0(p') + \frac{3k^3}{\alpha^2}F_1(p') = \frac{\alpha}{kk'^3}(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F_0(p) - kiG_0(q) - \frac{3F_1(p)}{\alpha^2k^2} = \alpha\left(\frac{k^4-k'^2}{k^3k'}\sqrt{1-k^2k'^2} - E\right)$$

$$F_0(p) - kiG_0(q) - \frac{3k^3}{\alpha^2}iG_1(q) = \alpha\left\{\frac{k}{k'}(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}} + k'^2K - E\right\}$$

$$iH_1(p') + k^5F_1(p') = \frac{\alpha^3}{3}\,\frac{k^4-k'^2}{k^3k'^3}(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F_1(p) - k^5iG_1(q) = \frac{\alpha^3}{3}k'\left(\frac{1-k^6}{k}\sqrt{1-k^2k'^2} + k^2k'K\right)$$

Die untere Grenze der Integrale F, G lässt sich $=0$ setzen, die der H muss der Quadrant K' sein, so dass

$$iH_0^{(v)} = iH_0(p') + \alpha(k^2K' - E')$$

$$iH_1^{(v)} = iH_1(p') - \frac{\alpha^3}{3}k^2k'^2K'$$

wird. Stellt man nach diesen Formeln die Elemente der Determinante T_1 in Elementen der Determinante T_2 dar, so kommt:

$$\begin{aligned}T_1 + k^6T_2 = \alpha&\left\{\left[\frac{(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}}}{k^5k'} + K' - E'\right]F_1^{(v)} + \left(\frac{k^4-k'^2}{k^3k'}\sqrt{1-k^2k'^2} + E\right)iH_1^{(v)}\right\}\\ &-\frac{\alpha^3}{3}\left\{\left[(1-k^6)k'\sqrt{1-k^2k'^2} + k^3k'^2K\right]F_0^{(w)}\right.\\ &\left.+\left[\frac{k^4-k'^2}{k^2k'^3}(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}} - k^3k'^2K'\right]iG_0^{(w)}\right\}\end{aligned}$$

und zwar ist T_1 begrenzt von den Hauptschnitten $y = 0$ und $z = 0$ und den Schnitten der Flächen

$$u = \frac{(b-c)^2}{b-v} - c; \qquad w = b - \frac{(b-c)^2}{v-c}$$

T_2 von dem Hauptschnitt $y = 0$, der vom Nabelpunkt aus zwei Vierecksseiten bildet, die einen Winkel $= \pi$ einschliessen, und den Schnitten der Flächen

$$u = \frac{(b-c)^2}{c-w} + b; \qquad v = \frac{(b-c)^2}{b-w} + c$$

XXXIV.

Zur Theorie der Tangentenbussole.

Von

Herrn Dr. *A. Oberbeck*

in Berlin.

Wenngleich die Theorie dieses Instruments schon mehrfach ausführlich entwickelt worden ist [1]), so hielt ich es doch nicht für überflüssig, hier nochmals auf diesen Gegenstand einzugehen, weil ich gefunden zu haben glaube, dass sich derselbe in viel einfacherer Weise behandeln lässt, als es gewöhnlich geschieht.

Die hierbei gestellte Aufgabe: die Einwirkung eines Stromkreises auf eine Magnetnadel zu berechnen, lässt sich in verschiedener Weise lösen. Man kann das Biot-Savort'sche Elementargesetz zu Grunde legen und demnach die Summe der Wirkungen aller Elemente des Kreises auf die Nadel berechnen. Man kann aber auch von dem elektromagnetischen Potential des Drahtkreises auf die Nadel ausgehen und aus demselben das gesuchte Drehungsmoment durch Differentiation herleiten. Und auch hier kann man verschiedene Wege einschlagen. Jenes Potential wird gewöhnlich auf elliptische Integrale zurückgeführt, die in Reihen aufgelöst werden. Man kann aber von Anfang an das Potential in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickeln. In der letzt genannten Form soll die Aufgabe hier behan-

---

1) Vergl. Wiedemann, Galvanismus und Elektromagnetismus. 1873, II. 182—190; wo man ausführliche Litteraturangaben findet.

delt werden [1]), und zwar werde ich zuerst den einfacheren Fall untersuchen, wo der Nadelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Stromkreises zusammenfällt, dann aber auf die Bussolen von Helmholtz und Gangain eingehen, bei welchen die Nadel excentrisch aufgehängt ist.

Bekanntlich ist das Potential eines geschlossenen Stromes in Bezug auf einen Magnetpol identisch mit dem Potential einer magnetischen Doppelfläche, welche, beliebig gekrümmt, die einzige Bedingung erfüllen muss, dass sie von der Stromcurve begrenzt wird. Wie Riecke [2]) gezeigt hat, bedarf indes der Fall einer besonderen Untersuchung, wenn der Magnetpol in der Doppelfläche selbst liegt. Diese Schwierigkeit kann hier leicht umgangen werden, wenn man als Doppelfläche nicht die ebene Kreisfläche, sondern die Halbkugel wählt, welche von dem Drahtkreise der Tangentenbussole begrenzt wird. Ist:

μ das magnetische Potential in dem einen Pole der Nadel,
i die Stromintensität,
ϱ die Entfernung des Flächenelements $d\omega$ von μ,
R der Radius des Stromkreises,

so ist das Potential der Doppelfläche:

$$(1) \qquad V = \mu i \int d\omega \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn},$$

wo die Differentiation nach der Kugelnormale auszuführen, die Integration aber über die Halbkugel mit dem Radius R auszudehnen ist. Da das Potential symmetrisch um die Halbkugelaxe ist, so kann die Art der Berechnung benutzt werden, welche Thomson und Tait in ihrem „Handbuch der theoretischen Physik" [3]) angeben.

Wenn nämlich eine Function f

1) die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

erfüllt,

---

1) Entwicklungen nach dieser Methode, doch in anderer Form, findet man bei Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, 1873; II, 305, 316.

2) Pogg. Ann. CXLV, 218—234.

3) Deutsch von Helmholtz und Wertheim Bd. I. Th. II, 80.

2) symmetrisch um eine Axe ist, so lässt sie sich nach einer der beiden Reihen entwickeln:

$$\Sigma A_n r^n . P_n(\cos\vartheta), \quad \text{oder} \quad \Sigma \frac{B_n}{r^n} \cdot P_n(\cos\vartheta), \tag{2}$$

von denen, je nach der Lage des Punktes entweder die eine oder die andere convergirt. Hier bedeutet: P_n die $n$te Kugelfunction einer Veränderlichen und r den Radius-Vector des Punktes, dessen Winkel mit der Symmetrieaxe ϑ ist. Liegt der Punkt auf dieser Axe selbst, ist also $\vartheta = 0$, $P_n(1) = 1$, und ist

$$f = \Sigma A_n r^n \quad \text{oder} \quad = \Sigma \frac{B_n}{r^n}$$

bekannt, so sieht man, dass man auch sofort den allgemeinsten Wert von f aus (2) für jeden Punkt im Raume erhält.

Es ist daher nur nötig V für einen Punkt der Symmetrieaxe zu berechnen.

Wenn man setzt: (Fig. 1)

$$\varrho^2 = r^2 + n^2 - 2rn . \cos\alpha,$$

so ist:

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} = \frac{1}{2n}\left\{\frac{r^2 - n^2}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho}\right\}.$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so ist:

$$V = \frac{\mu i}{2n}\left\{(r^2 - n^2)\int \frac{d\omega}{\varrho^3} - \int \frac{d\omega}{\varrho}\right\},$$

wo dann noch $n = R$ zu setzen ist.

Bei der Integration über die Halbkugel, ist in ähnlicher Weise die Lage des Punktes A zu berücksichtigen, wie bei der Bildung des Potentials einer Kugelschale.

Der Wert des Potentials fällt verschieden aus, je nachdem A links oder rechts von N liegt. Da wir an der Annahme festhalten dürfen, dass die Nadellänge (resp. die Entfernung ihrer Pole) kleiner als der Durchmesser des Kreises ist, d. h. $r < R$, so können wir uns auf den Fall beschränken, wo A zwischen M und N liegt. Dann ist das Resultat der Integration:

$$V = -2\pi\mu i\left\{1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right\}. \tag{3}$$

(11) $$V = -2\pi\mu i \left\{1 + \frac{x+y}{\sqrt{1+(x+y)^2}}\right\}$$

Sieht man V als Potenz von x allein an, so kann man in Form der Mac-Laurin'schen Reihe nach Potenzen von x entwickeln und erhält:

(12) $$\begin{cases} V = -2\pi\mu i \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[y + x\left(\frac{1}{1+y^2}\right) - x^2\left(\frac{3}{2}\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. + x^3\left(\frac{1}{2}\frac{4y^2-1}{(1+y^2)^2}\right)\right] - \ldots\right\} \end{cases}$$

Dann ist das Potential des Stromkreises in dem Punkte A (Fig. 4.):

(13)

$$V_1 = -2\pi\mu i \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[y + x . P_1\left(\frac{1}{1+y^2}\right) - x^2 . P_2\left(\frac{3}{2}\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)\right] + \ldots\right\}$$

Pn ist hier wieder die Kugelfunction der Veränderlichen: $\cos\vartheta$, wo ϑ den Winkel AON bedeutet.

Das Potential V_2 für den andern Pol B der Nadel erhält man, wenn man ϑ in $\pi - \vartheta$ verwandelt. Setzt man wieder:

$$W = V_1 - V_2$$

so ist:

(14) $$W = -\frac{4\pi\mu i x}{(\sqrt{1+y^2})^3}\left\{P_1(\cos\vartheta) + \frac{x^2}{2}P_3\left(\frac{4y^2-1}{(1+y^2)^2}\right) - \ldots\right\}$$

Führt man an Stelle von x und y die eigentlichen Werte wieder ein und setzt:

$$R^2 + d^2 = \varrho^2,$$
$$2\mu l = m,$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

so ist:

(15) $$W = -\frac{2\pi R^2 m i}{\varrho^3}\left\{\sin\psi + \frac{5}{4}\frac{l^2(4d^2-R^2)}{\varrho^4}\left(\sin^3\psi - \frac{3}{5}\sin\psi\right) - \ldots\right\}$$

und endlich das Drehungsmoment:

(16)

$$D = -\frac{dW}{d\psi} = \frac{2\pi R^2 m i}{\varrho^3}\cos\psi\left\{1 - \frac{3}{4}\frac{l^2(4d^2-R^2)}{\varrho^4}(1 - 5\sin^2\psi) - \ldots\right\}$$

In derselben Weise wie bei (8) und (9) erhält man auch hier die Formel zur Messung der Stromintensität:

$$(17)\quad \begin{cases} i = \dfrac{\varrho^3 . \operatorname{tg}\psi . T}{2\pi R^2} . \dfrac{1}{f'}, \quad \text{wo} \\ f' = 1 - \dfrac{3}{4}\,\dfrac{l^2(4d^2 - R^2)}{\varrho^4}(1 - 5\sin^2\psi) - \dots \end{cases}$$

Aus den Ausdrücken (9) und (17) ergiebt sich die Stromintensität nach absolutem, elektromagnetischen Maass, wenn die Dimensionen des Apparats bekannt und der Winkel ψ gemessen ist. Hierauf einzugehen liegt ausser dem Plane der Arbeit, welche nur eine mathematisch einfachere Ableitung bekannter Formeln zu geben bezweckte.

XXXV.

Ueber stationäre Inductionsströme in bewegten, körperlichen Leitern.

Von

A. Oberbeck.

1.

Wenn ein leitender, von einer Rotationsfläche begrenzter Körper unter der Einwirkung fester Magnete oder geschlossener elektrischer Ströme um seine Axe gleichmässig rotirt, so wird in demselben ein System von Strömen inducirt, die eine im Raume unveränderte Lage einnehmen. Diese Stromsysteme sind in einer Reihe specieller Fälle genauer experimentell untersucht worden [1]). Doch nur in einem besonderen Falle folgte dem Experimente eine mathematische Untersuchung, die einen Vergleich von Theorie und Erfahrung zuliess. Theoretisch behandelt [2]) ist nur die gleichmässige Rotation einer unendlich grossen, leitenden Scheibe, unter der Einwirkung eines über ihr liegenden Magnetpols.

Als Resultat dieser Untersuchung ergeben sich Gleichungen:

1) für das Curvensystem der stationären, inducirten Ströme,

2) für das System der Curven gleichen Potentials für die freie Oberfläche.

---

1) Wiedemann, Galvanismus und Elektromagnetismus. 1861. II. 709—739.

2) Jochmann, Crelle J. LXIII, 158. Pogg. Ann. CXXII.

Das letztere System stimmt mit demjenigen vollständig überein, welches Matteucci[1]) durch Versuche gefunden hat. Dagegen stellt sich heraus, dass das System der Stromcurven von Matteucci unrichtig angegeben ist, weil derselbe von der falschen Annahme ausging, dass beide Systeme orthogonal sein müssten. Ein besonderer Umstand, der bei den Versuchen zuerst bemerkt wurde, hat indes noch nicht seine theoretische Erledigung gefunden. Bei schneller Rotation der leitenden Scheibe hat sich herausgestellt, dass die erwähnten Curvensysteme im Sinne der Rotation verschoben sind. Hiermit steht in engem Zusammenhang eine andere schon bei der ersten Entdeckung des sog. Rotationsmagnetismus beobachtete Erscheinung[2]). Das inducirte Stromsystem übt nämlich auf den inducirenden Pol eine abstossende Wirkung aus, die nur dadurch erklärt werden kann, dass jenes Curvensystem keine symmetrische Lage gegen den Magnetpol hat. Zur Begründung dieser Erscheinungen sind mehrfach neue Hypothesen aufgestellt worden. So nimmt z. B. F. Neumann[3]) an, dass der Inductionsact kein momentaner ist, sondern innerhalb einer gewissen Zeit vor sich geht. Wenngleich diese Hypothese geeignet ist, die erwähnten Erscheinungen im Wesentlichen zu erklären, so scheint es doch nicht geraten, zu derselben zu greifen, bevor man sich nicht überzeugt hat, dass die gewöhnliche Theorie der Inductionsströme zu ihrer Erklärung durchaus unzureichend ist. Dabei ist zunächst zu bemerken, dass in der Jochmann'schen Rechnung die Inductionswirkungen höherer Ordnung vernachlässigt sind, d. h. die Einwirkung der durch den Magnetpol inducirten Ströme auf den rotirenden Leiter. Diese Ströme sind für die Kugel mit berücksichtigt worden in einer Arbeit von Lorberg[4]). Doch ist derselbe nicht auf den Fall „stationärer" Inductionsströme eingegangen. Zur Erledigung der vorliegenden Frage schien es mir daher wünschenswert an einem einfachen Beispiel zu untersuchen, ob die erwähnte Verschiebung des stationären Stromsystems sich durch die Inductionsströme höherer Ordnung allein erklären lässt. Durch Rechnung habe ich mich überzeugt, dass bei einer rotirenden Scheibe sowohl als auch bei einer rotirenden Kugel die Lagen jener Stromsysteme sich in so complicirter Form darstellen, dass der erwähnte Zweck nicht erreicht wird. Deshalb bin ich bei folgender, speciellen Aufgabe stehen geblieben. Ein Kreiscylinder von unendlicher Länge rotire in einem homogenen, magnetischen Felde, d. h. unter dem

---

1) Wiedemann, l. c. 716.

2) Arago, Ann. de Chém. et de Phys. 1824, XXVII, XXVIII.

3) Abhandl. der Berl. Akademie. 1845, p. 15.

4) Borchardt, J. LXXI. 53—91.

Einfluss fester Magnete oder Ströme, deren Potential Q eine lineare Function der Coordinaten ist, also etwa unter der Einwirkung des Erdmagnetismus. Es entstehen dann nur Ströme, parallel der Cylinderaxe, deren Intensität ohne die oben erwähnte Vernachlässigung berechnet werden soll.

2.

Ich gehe aus von den Bewegungsgleichungen der Elektricität, wie sie von Kirchhoff[1]) und Helmholtz[2]) aufgestellt worden sind. Doch sollen diese Gleichungen, welche eigentlich gelten für Ströme in ruhenden Leitern, dadurch verändert werden, dass ich die elektromotorischen Kräfte hinzufüge, welche von den äusseren, magnetischen Massen herrühren. Auf Grund der von F. Neumann aufgestellten Inductionsgesetze und des Boot-Lavart'schen Gesetzes sind die Componenten der elektromotorischen Kräfte der Induction in dem Leiterelement: $dx.dy.dz$, dessen Coordinaten x, y, z und dessen Geschwindigkeiten nach den Axen: m, p, q sind, wenn das magnetische oder elektromagnetische Potential in dem betreffenden Punkte den Wert Q hat:

$$
1) \quad \left\{ \begin{aligned}
X &= A^2 \left\{ q \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - p \frac{\partial Q}{\partial z} \right\} \\
Y &= A^2 \left\{ m . \frac{\partial Q}{\partial z} - q \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \\
Z &= A^2 \left\{ p . \frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial Q}{\partial y} \right\}
\end{aligned} \right.
$$

A^2 hat hier denselben Sinn, wie in der Abhandlung von Helmholtz, wie denn überhaupt dieselben Einheiten für die elektromotorische Kraft und den Widerstand angenommen sind, wie dort. Hiernach lauten die Differentialgleichungen der Bewegung[3]):

$$
(2) \quad \left\{ \begin{aligned}
k . u &= X - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - A^2 \frac{dU}{dt} \\
k . v &= Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} - A^2 \frac{dV}{dt} \\
k . w &= Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} - A^2 \frac{dW}{dt}
\end{aligned} \right.
$$

---

1) Pogg. Ann. CII.

2) Borch. J. LXXII.

3) Helmholtz, l. c. 81.

In diesen Gleichungen sind:

u, v, w die Stromcomponenten nach den drei Axen,

φ das Potential der freien Elektricität,

$\frac{1}{k}$ die Leitungsfähigkeit,

U, V, W die Potentiale der Stromcomponenten: $\int \frac{u}{r} dm$, $\int \frac{v}{r} dm$, $\int \frac{w}{r} dm$, welche Integrale über den ganzen Körper auszudehnen sind[1]). Die Ableitungen nach t bedeuten die Aenderungen von U, V, W nach der Zeit.

Für den hier betrachteten, speciellen Fall werden diese Gleichungen bedentend einfacher. Die Cylinder- und Rotationsaxe sei die z Axe; dann ist:

$$q = 0.$$

Die x und y Axen seien so gelegt, dass das magnetische Potential

$$(2^a) \qquad Q = T.x$$

Dann folgt aus den Gl. (1):

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$Z = A^2.T.p$$

Die äusseren magnetischen Massen induciren daher in dem unbegrenzten Cylinder nur Ströme parallel der Cylinderaxe. Aber auch bei Mitberücksichtigung der Inductionsströme höherer Ordnung genügt man sowohl den Bewegungsgl. (2), sowie allen Grenzbedingungen, wenn man setzt:

$$u = v = 0, \quad U = V = 0,$$
$$\varphi = \text{Const.}$$

so dass die Gleichungen (2) sich auf die einzige Gleichung:

$$(2^b) \qquad k.w = A^2.T.p - A^2 \frac{dW}{dt}$$

reduciren. Alle hier auftretenden Grössen sind nur von x und y abhängig, von z dagegen unabhängig. Es handelt sich also nur noch

---

1) Für U, V, W sind vereinfachte Werte genommen, welche man erhält, wenn man die Helmholtz'sche Constante $k = 1$ setzt. Dies ist hier zulässig, weil alle Ströme unendlich lang und daher als geschlossen anzusehen sind.

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn die Coëfficienten aller Potenzen von r einzeln verschwinden. Es ergiebt sich hieraus:

1) Die Coëfficienten gerader Potenzen beider Reihen müssen verschwinden,

2) a_1, b_1 sind willkürliche Integrationsconstanten, die durch die vorhandenen Grenzbedingungen zu bestimmen sind.

3)
$$a_3 = \frac{\mu + \lambda b_1}{3^2 - 1},$$

$$b_3 = -\frac{\lambda a_1}{3^2 - 1},$$

4) Die übrigen Coëfficienten der ungeraden Potenzen lassen sich berechnen durch die Gleichungen:

$$a_m = \lambda \frac{b_{m-2}}{m^2 - 1},$$

$$b_m = -\lambda \frac{a_{m-2}}{m^2 - 1}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$k_m = \frac{1}{(3^2-1)(5^2-1)\dots(m^2-1)},$$

und ferner:

$$(14) \quad \begin{cases} M = r\{1 - k_5 \lambda^2 r^4 + k_9 \lambda^4 r^8 - \dots\} \\ N = r^3 \{k_3 - k_7 \lambda^2 r^4 + k_{11} \lambda^4 r^8 - \dots\} \end{cases}$$

so ist:

$$(15) \quad \begin{cases} B = a_1 M + (\mu + \lambda b_1) N \\ C = -a_1 \lambda N + b_1 \lambda M + \frac{\mu}{\lambda}(M - r) \end{cases}$$

Hiermit ist zunächst die partielle Differentialgleichung (9) integrirt. Zur Bestimmung der willkürlichen Constanten a_1, b_1 sind ferner die Grenzbedingungen (5) zu benutzen und dazu ist zunächst das Potential W_1 für jeden ausserhalb des Cylinders gelegenen Punkt zu bilden. Die allgemeinste Form desselben entsprechend der Gleichung:

$$\Delta W_1 = 0,$$

ist:

$$W_1 = \Sigma \left(\frac{\alpha_n}{r^n} \cdot \cos n\vartheta + \frac{\beta_n}{r_n} \cdot \sin n\vartheta \right).$$

Da aber in dem Potential für innere Punkte nur die Glieder vor-

kommen, welche $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ enthalten, so brauchen auch von dieser Summe nur die entsprechenden Glieder beibehalten zu werden, so dass

$$(16) \qquad W_1 = \frac{\alpha}{r} \cdot \cos\vartheta + \frac{\beta}{r} \cdot \sin\vartheta$$

zu setzen ist.

Ist der Cylinderradius $= d$, so ist nach (5) in W und W_1

$$r = d$$

zu 'setzen; die beiden Ausdrücke müssen dann gleich sein. Ebenso auch die beiden nach r differentiirten Ausdrücke, nachdem auch in diesen r durch d ersetzt worden. In den beiden Gleichungen müssen die Factoren von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ einzeln gleich sein. Aus den entstandenen 4 Gleichungen sind α und β zu eliminiren. Es bleiben dann zwei Gleichungen zur Bestimmung von a_1 und b_1.

Bedeutet M_0 und N_0, dass in den Ausdrücken M und N, M_0' und N_0' dass in den nach r differentiirten Ausdrücken M und N r ersetzt worden ist durch d, so lauten die Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} a_1(M_0 + M_0'.d) + \mu(N_0 + N_0'd) + b_1\lambda(N_0 + N_0'd) = 0 \\ -a_1\lambda(N_0 + N_0'd) + b_1(M_0 + M_0'd) + \frac{\mu}{\lambda}(N_0 + N_0'd - 2d) = 0 \end{cases}$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$(18) \qquad \begin{cases} M_0 + M_0'd = R \\ N_0 + N_0'd = S, \end{cases}$$

so ist:

$$(19) \qquad \begin{cases} a_1 = -\mu \dfrac{2dS}{R^2 + \lambda^2.S^2} \\ b_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}\left\{\dfrac{2d.R}{R^2 + \lambda^2.S^2} - 1\right\} \\ \mu + b_1\lambda = \mu \dfrac{2d.R}{R^2 + \lambda^2.S^2} \end{cases}$$

Hiermit ist die oben gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Die gesuchte Function ist:

$$W = B.\cos\vartheta + C.\sin\vartheta,$$

wo B und C vollständig durch die Gleichungen (15) und (19) bestimmt sind. Es bleibt nun noch übrig mit Hülfe des Potentials W den Wert der *Stromintensität* w zu bestimmen. Bevor ich aber dazu über-

gehe, sollen an dem Werte von W diejenigen Vereinfachungen vorgenommen werden, welche dem wirklichen Werte der dort auftretenden Constanten nach gestattet sind.

4.

Die Reihen M und N (14) sind nach aufsteigenden Potenzen von λ entwickelt. Es war:

$$\lambda = 4\pi\omega \cdot \frac{A^2}{k}.$$

Nach Helmholtz ist:

$$\frac{A^2}{k} = \frac{1}{227000},$$

wenn der leitende Körper aus Kupfer besteht. Leitet der betreffende Körper schlechter als Kupfer, so ist die Constante noch kleiner. Also:

$$\lambda = \frac{4\pi\omega}{227000}.$$

Es ist hierbei allerdings zu berücksichtigen, dass die Reihen nach Potenzen von λr^2 oder λd^2 fortschreiten, wo r und d in Millimetern gegeben sind.

Für grössere Winkelgeschwindigkeiten und Cylinder von beträchtlicherem Radius ist λ also keineswegs verschwindend klein. Dafür sind aber die Reihen für M, N, M_0, N_0 stark convergent und da der Wert von λr^2 und λd^2 bei nicht zu grossen Geschwindigkeiten ebenfalls nicht sehr beträchtlich ist, so kann man sich mit den ersten Gliedern aller vorkommenden Reihen begnügen, oder mit andern Worten alle höheren Potenzen von λ gegen die erste vernachlässigen.

Hiernach erhält man folgende vereinfachte Werte:

$$M = r, \qquad M' = 1,$$

$$N = \frac{r^3}{8}, \qquad N' = \frac{3r^2}{8},$$

$$R = 2d, \qquad S = \frac{d^3}{2},$$

$$a_1 = -\mu \frac{2dS}{R^2} = -\mu \frac{d^2}{4},$$

$$\mu + \lambda b_1 = \mu \frac{2d}{R} = \mu, \qquad \text{also: } b_1 = 0.$$

Aus den Gleichungen (15) ist dann:

$$B = r\left(a_1 + \mu \frac{r^2}{8}\right) = \mu \frac{r}{4}\left(\frac{r^2}{2} - d^2\right)$$

$$C = -a_1 \lambda \frac{r^2}{8} = \frac{\mu\lambda}{32} r^3 . d^2.$$

Der vereinfachte Wert der Function W lautet dann:

$$(20) \qquad W = \frac{\mu r}{4}\left\{\cos\vartheta \left(\frac{r^2}{2} - d^2\right) + \lambda . \sin\vartheta \left(\frac{r^3 . d^2}{8}\right)\right\}$$

Setzt man den gefundenen Wert in die Gleichung (2^b):

$$w = \frac{A^2}{k}\, \omega\, T . r \cos\vartheta - \frac{A^2 \omega}{k} \frac{dW}{dv},$$

so ist:

$$w = \frac{A^2 \omega}{k}\left\{T . r \cos\vartheta - \frac{\mu}{4} r \left[\sin\vartheta \left(d^2 - \frac{r^2}{2}\right) + \lambda \cos\vartheta \frac{r^3 d^2}{8}\right]\right\}$$

oder mit Berücksichtigung von (8):

$$w = \frac{A^2 \omega}{k} . T \left\{r \cos\vartheta + \frac{\lambda}{4} r \left(d^2 - \frac{r^2}{2}\right) \sin\vartheta + \frac{\lambda^2 d^2}{8} r^3 \cos\vartheta \right\}$$

Vernachlässigt man hier wieder das Glied, welches das Quadrat von λ enthält, so ist:

$$(21) \qquad W = \frac{A^2 \omega}{k} \cdot T . r \left\{\cos\vartheta + \frac{\lambda}{4}\left(d^2 - \frac{r^2}{2}\right) \sin\vartheta \right\}$$

Hiermit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Die Stromintensitäten parallel der Cylinderaxe sind für jeden Punkt eines Querschnitts bestimmt.

Die letzte Formel giebt gleichzeitig Aufschluss über die Verschiebung der Inductionsströme bei schnellerer Rotation der Scheibe. Während bei Vernachlässigung der Inductionsströme höherer Ordnung, d. h. für: $\lambda = 0$, die Ströme den Halbkreis ACD (s. Fig. 1.) in positiver, den Halbkreis BCD in negativer Richtung durchfliessen würden und in der Geraden COD die Intensität 0 sein müsste, so erhält man diejenige Curve, in welcher die Intensität verschwindet, wenn man in Gleichung (21) setzt:

$$w = 0.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\operatorname{ctg}(\vartheta) = -\frac{\lambda}{4}\left(d^2 - \frac{r^2}{2}\right).$$

Nimmt man z. B. die speciellen Zahlenwerte an:

$$\lambda = \frac{1}{10000},$$

$$d = 100^{mm},$$

also: $\lambda d^2 = 1$, so ist:

$$\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{1}{40000}\left\{10{,}000 - \frac{r^2}{2}\right\}$$

Einige zusammengehörende Werte von r und ϑ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

r	ϑ
0	104^0
40^{mm}	103^0
60^{mm}	102^0
80^{mm}	100^0
100^{mm}	97^0

Daraus ergiebt sich die Curve EOF in der die Stromintensität verschwindet. In dem Flächenstück $EOFA$ ist die Intensität positiv, in dem Flächenstück $DOFB$ ist dieselbe negativ gerichtet.

5.

Es soll endlich noch die Frage erörtert werden, wie sich das inducirte Stromsystem verhält gegen einen ausserhalb des Cylinders liegenden Magnetpol. Diese Einwirkung ist nach dem Biot-Savart-schen Gesetz zu berechnen. Ist m die magnetische Masse des betreffenden Punktes, dessen Coordinaten a, b, c sein mögen, ist ferner:

$$\varrho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

bedeuten dx, dy, dz die Projectionen des Stromelements ds auf die drei Axen, so sind die Componenten der Wirkung des Elementes auf den Magnetpol:

$$X = mi\left\{\frac{z-c}{\varrho^3}dy - \frac{y-b}{\varrho^3}dz\right\}$$

$$(22) \qquad Y = mi\left\{\frac{x-a}{\varrho^3}dz - \frac{z-c}{\varrho^3}dx\right\}$$

$$Z = mi\left\{\frac{y-b}{\varrho^3}dx - \frac{x-a}{\varrho^3}dy\right\}$$

In unserem Falle ist:

$$\left.\begin{aligned} idx &= idy = 0 \\ idz &= \quad w \end{aligned}\right\}$$

Also:

$$X = -m\,w\,\frac{y-b}{\varrho^3} = -m\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{w}{\varrho}\right),$$

$$Y = \quad m\,w\,\frac{x-a}{\varrho^3} = \quad m\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{w}{\varrho}\right).$$

Nimmt man endlich die Summe aller Elemente des Cylinders, so ist, wenn dv ein Volumelement des Cylinders bedeutet:

$$(23)\qquad \begin{aligned} X &= -m\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{w}{\varrho}\cdot dv, \\ Y &= \quad m\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{w}{\varrho}\cdot dv. \end{aligned}$$

Das hier vorkommende Potential: $\int\frac{w}{\varrho}dv$ ist aber nichts anderes, als die zuvor bestimmte Function W, oder, da der Magnetpol ausserhalb des Cylinders liegt, so ist:

$$\int\frac{w}{\varrho}dv = W_1.$$

Diese Function war früher gefunden:

$$W_1 = \frac{\alpha}{r}\cos\vartheta + \frac{\beta}{r}.\sin\vartheta; \qquad \text{wo:}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= r.\cos\vartheta \\ b &= r.\sin\vartheta \\ r^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}\right\}$$

Die Constanten α und β ergeben sich leicht aus den Gleichungen (5), (10), (15), (16):

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Bd \\ \beta &= Cd \end{aligned}\right\}$$

worin B und C, $r = d$ gesetzt ist. Mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von λ ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\mu}{8}d^4 \\ \beta &= \quad\frac{\mu\lambda}{32}d^6 \end{aligned}\right\}$$

also:

$$W_1 = -\frac{\mu}{8} d^4 \left\{ \frac{\cos\vartheta}{r} - \frac{\lambda}{4} d^2 \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \right\} \tag{24}$$

oder:

$$W_1 = -\frac{\mu}{8} d^4 \left\{ \frac{a}{r^2} - \frac{\lambda}{4} d^2 \cdot \frac{b}{r^2} \right\}$$

Danach ist:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -m \frac{\partial W_1}{\partial b} = -\frac{\mu}{8} \frac{d^4}{r^2} \left\{ \frac{ab}{r} + \frac{\lambda}{4} d^2 \left(1 - \frac{b^2}{r}\right) \right\} \\ Y &= \quad m \frac{\partial W_1}{\partial a} = -\frac{\mu}{8} \frac{d^4}{r^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r} + \frac{\lambda}{4} d^2 \frac{ab}{r} \right\} \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Für einen Punkt der x Axe ist:

$$b = 0,$$
$$r = a$$

also:

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{\mu\lambda}{32} \frac{d^6}{a^2}, \\ Y &= -\frac{\mu}{8} \frac{d^4}{a^2} \left\{ 1 - a \right\}. \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Es ist hieraus zu entnehmen, dass ein Magnetpol abgestossen resp. angezogen wird durch die Inductionsströme des rotirenden Cylinders, auch wenn der Pol auf der x Axe liegt, dass diese Wirkung (die x Componente) indes allein durch die Inductionsströme höherer Ordnung bedingt wird, da sie verschwindet, wenn $\lambda = 0$ ist.

Somit werden also die anfangs erwähnten Erscheinungen genügend erklärt durch Mitberücksichtigung der Inductionsströme zweiter Ordnung. Denn die genauere Rechnung und besonders die Einsetzung von Zahlenwerten für die Constanten hat gezeigt, dass die dadurch hervorgebrachten Aenderungen in dem stationären Stromsystem keineswegs verschwindend klein sind.

Es ist also nicht notwendig, specielle, complicirtere Hypothesen über den Vorgang der Induction aufzustellen.

Vielmehr werden alle, hierhin gehörige Aufgaben eine mit der Erfahrung übereinstimmende Lösung geben, wenn man nur immer diejenigen Glieder mitberücksichtigt, welche ihrer Grösse nach beibehalten werden müssen.

XXXVI.

Ueber die allgemeine Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

Von

Herrn Dr. *Nell*,

Professor am Polytechnikum in Darmstadt.

---

§ 1.

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen wird in den Lehrbüchern der algebraischen Analysis entwickelt. Doch wohl nur in den seltensten Fällen werden die Wurzeln einer numerischen Gleichung wirklich danach berechnet, indem die einzelnen Rechnungsoperationen nicht so übersichtlich vor Augen gelegt werden, um eine rasche und bequeme Anwendung zu gestatten. Zur möglichsten Beseitigung dieses Missstandes wollen wir die Entwickelung noch einmal vornehmen, und solche in dem angedeuteten Sinne ergänzen, wobei wir in der Hauptsache dem Wege folgen, den Euler eingeschlagen hat, und dabei von der folgenden Gleichung ausgehen:

$$x^4 - 6mx^2 + 4nx - p = 0$$

Setzt man

$$x = r + s + t,$$

so wird

$$x^2 = r^2 + s^2 + t^2 + 2(rs + rt + st)$$
$$x^4 = (r^2+s^2+t^2)^2 + 4(r^2+s^2+t^2)(rs+rt+st) + 4(r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2) + 8rstx$$

wenn nämlich im letzten Gliede wieder x an die Stelle von $r+s+t$ gesetzt wird.

Die Ausdrücke für x^4 und x^2 in die vorliegende Gleichung eingesetzt, so findet sich

$$(r^2+s^2+t^2)^2+4(rs+rt+st)(r^2+s^2+t^2-3m)+4(r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2)$$
$$-6m(r^2+s^2+t^2)+4x(2rst+n)-p=0$$

Die unbestimmte Gleichung $x=r+s+t$ gestattet uns noch 2 willkürliche Annahmen über die Werte von r, s, t zu machen; wir setzen daher:

$$r^2+s^2+t^2-3m=0$$
$$2rst+n=0,$$

daraus folgt

$$r^2+s^2+t^2=3m \text{ und } rst=-\tfrac{1}{2}n \quad \text{oder} \quad r^2s^2t^2=\frac{n^2}{4}$$

Durch Einführung dieser Werte geht die Gleichung über in:

$$9m^2+4(r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2)-18m^2-p=0,$$

daher

$$r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2=\frac{9m^2+p}{4}$$

Nach bekannten Eigenschaften der Gleichungen überhaupt lassen sich r^2, s^2, t^2 als die Wurzeln der folgenden cubischen Gleichung betrachten:

$$u^3-(r^2+s^2+t^2)u^2+(r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2)u-r^2s^2t^2=0$$

Die so eben erhaltenen Werte der Coefficienten eingesetzt, geben derselben die folgende Gestalt:

$$u^3-3mu^2+\frac{9m^2+p}{4}u-\frac{n^2}{4}=0$$

Man pflegt dieselbe die reducirte Gleichung der obigen Gleichung vom vierten Grade zu nennen. Bezeichnet man ihre 3 Wurzeln durch u, $u_,$ und $u_{,,}$ so hat man also

$$u=r^2, \quad u_,=s^2, \quad u_{,,}=t^2$$

oder

$$r=\pm\sqrt{u}, \quad s=\pm\sqrt{u_,}, \quad t=\pm\sqrt{u_{,,}}$$

folglich

$$x=r+s+t=\pm\sqrt{u}\pm\sqrt{u_,}\pm\sqrt{u_{,,}}$$

Macht man hier mit Beachtung der doppelten Vorzeichen alle möglichen Verbindungen, so erhält man in allem folgende 8 von einander *verschiedenen* Werte von x:

1. $+\sqrt{u}+\sqrt{u_{,}}+\sqrt{u_{,,}}$
2. $+\sqrt{u}+\sqrt{u_{,}}-\sqrt{u_{,,}}$
3. $+\sqrt{u}-\sqrt{u_{,}}+\sqrt{u_{,,}}$
4. $-\sqrt{u}+\sqrt{u_{,}}+\sqrt{u_{,,}}$
5. $+\sqrt{u}-\sqrt{u_{,}}-\sqrt{u_{,,}}$
6. $-\sqrt{u}+\sqrt{u_{,}}-\sqrt{u_{,,}}$
7. $-\sqrt{u}-\sqrt{u_{,}}+\sqrt{u_{,,}}$
8. $-\sqrt{u}-\sqrt{u_{,}}-\sqrt{u_{,,}}$

Diese 8 Werte können indessen nicht sämmtlich als Wurzeln der vorliegenden Gleichung gelten, weil wegen der Bedingung $rst = -\frac{1}{2}n$ das Product $\sqrt{u}\,.\sqrt{u_{,}}\,.\sqrt{u_{,,}}$ das entgegengesetzte Zeichen des Coefficienten n haben muss.

Für ein positives n sind danach 1, 5, 6, 7 die Wurzeln der Gleichung
" " negatives n " " 2, 3, 4, 8 " " " "

§ 2.

Um die reducirte Gleichung aufzulösen, leiten wir aus derselben eine andere ab, in welcher das zweite Glied fehlt, indem wir $y+m$ an die Stelle von u setzen; dadurch wird:

$$y^3-\tfrac{3}{4}(m^2-\tfrac{1}{3}p)y-\frac{n^2-m(m^2+p)}{4}=0$$

Schreibt man zur Abkürzung $m^2-\frac{1}{3}p = k^2$ und $n^2-m(m^2+p) = h$, so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$y^3-\frac{3k^2}{4}y-\frac{h}{4}=0$$

Eine Wurzel dieser letzteren erhält man nach **Cardani**, nämlich

$$y = P+Q,$$

wenn

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h+\sqrt{h^2-k^6}} = P \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h-\sqrt{h^2-k^6}} = Q$$

gesetzt wird.

Die beiden anderen Wurzeln der Gleichung sind:

$$\left.\begin{matrix} y_{,} \\ y_{,,} \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(P-Q)i$$

Die Wurzeln der reducirten Gleichung erhält man, wenn man zu den Werten der y noch die Grösse m addirt, daher:

$$u = m + P + Q$$

$$\left.\begin{matrix} u_, \\ u_{,,} \end{matrix}\right\} = \frac{3m-u}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(P-Q)i$$

§ 3.

Um die in den beiden vorhergehenden Paragraphen entwickelte Lösung für die Rechnung bequem einzurichten, sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Sei zuerst $m^2 > \frac{1}{3}p$ und $k^3 > h$, so erscheinen P und Q beide in imaginärer Form. Demungeachtet sind die 3 Wurzeln der reducirten Gleichung reell (der irreductible Fall). Weil nun hier $\sqrt{k^6-h^2}$ eine reelle Grösse ist, so schreiben wir

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h+i\sqrt{k^6-h^2}} = \tfrac{1}{2}k\sqrt[3]{\frac{h}{k^3}+i\sqrt{1-\left(\frac{h}{k^3}\right)^2}}$$

Wird $\frac{h}{k^3} = \sin 3\varphi$ gesetzt, so findet sich

$$P = \tfrac{1}{2}k\sqrt[3]{\sin 3\varphi + i\cos 3\varphi} = \tfrac{1}{2}k\sqrt[3]{\cos(90^0-3\varphi)+i\sin(90^0-3\varphi)}$$
$$= \tfrac{1}{2}k\{\cos(30^0-\varphi)+i\sin(30^0-\varphi)\}$$

Ganz ähnlich findet sich

$$Q = \tfrac{1}{2}k\{\cos(30^0-\varphi)-i\sin(30^0-\varphi)\}$$
$$P+Q = k\cos(30^0-\varphi), \quad P-O = ik\sin(30^0-\varphi)$$
$$u = m+k\cos(30^0-\varphi) = m+k\sin(60^0+\varphi)$$
$$\left.\begin{matrix} u_, \\ u_{,,} \end{matrix}\right\} = \frac{3m-u}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i^2 k\sin(30^0-\varphi)$$
$$= m - \tfrac{1}{2}k\cos(30^0-\varphi) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,k\sin(30^0-\varphi)$$

Weil nun $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so lässt sich auch schreiben

$$\left.\begin{matrix} u_, \\ u_{,,} \end{matrix}\right\} = m - k\{\sin 30^0\cos(30^0-\varphi) \pm \cos 30^0 \sin(30^0-\varphi)\}$$

woraus folgt:

$$u_1 = m - k\sin(60^0-\varphi), \quad u_{,,} = m - k\sin\varphi$$

Da in der reducirten Gleichung (§ 1.) das letzte Glied unter allen Umständen negativ ist, so folgt aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen, dass mindestens e i n e positive Wurzel (u) vorhanden sein muss. Die beiden anderen Wurzeln ($u_,$, $u_{,,}$) müssen entweder beide zugleich positiv oder beide negativ sein. Findet das erstere statt, dann haben die Wurzeln der Gleichung vierten Grades

reelle Werte. Im anderen Falle sind dagegen $\sqrt{-u_{,}}$ und $\sqrt{-u_{,,}}$ reelle Grössen; dann lassen sich die Wurzeln zweckmässig in folgender Weise anschreiben:

$$x_1 = \pm\sqrt{u} \pm (\sqrt{-u_{,}} + \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_2 = \pm\sqrt{u} \mp (\sqrt{-u_{,}} + \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_3 = \mp\sqrt{u} \mp (\sqrt{-u_{,}} - \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_4 = \mp\sqrt{u} \pm (\sqrt{-u_{,}} - \sqrt{-u_{,,}})i$$

Nur, wenn hier $u_{,}$ und $u_{,,}$ einander gleich sind, können die beiden Wurzeln x_3, x_4 reelle Werte haben; sonst sind alle 4 Wurzeln imaginär.

§ 4.

Wenn $m^2 > \frac{1}{3}p$ und $k^2 < h$, so bringen wir $\sqrt{u_{,}}$ und $\sqrt{u_{,,}}$ durch Einführung der Hülfsgrössen v und $\varkappa$ auf die Form $\alpha + \beta i$, indem wir setzen:

$$\sqrt{\frac{3m-u}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(P-Q)i} = \sqrt{\frac{v(\cos\varkappa \pm i\sin\varkappa)}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{v}\left(\cos\frac{\varkappa}{2} \pm i\sin\frac{\varkappa}{2}\right)$$

Daraus folgt zur Berechnung der beiden Hülfsgrössen

$$v\sin\varkappa = 2\sqrt{3}(P-Q)$$
$$v\cos\varkappa = 2(3m-u)$$

Ausserdem erhält man mit Beachtung der Werte von $u_{,}$, $u_{,,}$ in § 2.

$$\sqrt{u_{,}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{v}.\cos\frac{\varkappa}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{v}.\sin\frac{\varkappa}{2}$$
$$\sqrt{u_{,,}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{v}.\cos\frac{\varkappa}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{v}.\sin\frac{\varkappa}{2}$$

$$\sqrt{u_{,}} + \sqrt{u_{,,}} = \sqrt{v}.\cos\frac{\varkappa}{2}$$
$$\sqrt{u_{,}} - \sqrt{u_{,,}} = i\sqrt{v}.\sin\frac{\varkappa}{2}$$

Es kommt nun noch darauf an, die Ausdrücke für P und Q so umzugestalten, dass ihre Zahlenwerte sich bequem berechnen lassen.

Wir haben:

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h + \sqrt{h^2 - k^6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}.\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{k^3}{h}\right)^2}}$$

Führt man den Hülfswinkel φ ein, indem man setzt

$$\sin 2\varphi = \frac{k^3}{h}$$

so wird:

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,.\sqrt[3]{1+\cos 2\varphi} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,.\sqrt[3]{2\cos^2\varphi}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,.\sqrt[3]{1-\cos 2\varphi} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,.\sqrt[3]{2\sin^2\varphi}$$

$$P+Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{h}\,\{\sqrt[3]{\cos^2\varphi}+\sqrt[3]{\sin^2\varphi}$$

Da nun

$$h = \frac{k^3}{2\sin\varphi\cos\varphi}$$

also

$$\sqrt[3]{h} = \frac{k}{\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi}}$$

so ist

$$P+Q = \frac{k}{2}\left(\sqrt[3]{\cot\varphi}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}\right) = \frac{k}{2}(\cot\psi+\operatorname{tg}\psi) = \frac{k}{\sin 2\psi},$$

wenn nämlich $\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$ gesetzt wird. In ganz ähnlicher Weise erhält man

$$P-Q = \frac{k}{2}(\cot\psi - \operatorname{tg}\psi) = k\cot 2\psi$$

Sind daher die beiden Hülfswinkel φ und ψ berechnet, so findet sich

$$u = m + \frac{k}{\sin 2\psi} \quad \text{und} \quad v\sin\varkappa = 2\sqrt{3}\,.k\cot 2\psi$$

Die Werte von $\sqrt{u}$, $(\sqrt{u_{,}}+\sqrt{u_{,,}})$, $(\sqrt{u_{,}}-\sqrt{u_{,,}})$ in die Ausdrücke am Schlusse von § 1. eingesetzt, geben die gesuchten Wurzeln.

§ 5.

Wenn $m^2 < \frac{1}{3}p$, so setze man $k^2 = \frac{1}{3}p - m^2$ und wie früher $h = n^2 - m(m^2+p)$, dann erscheint die vereinfachte Gleichung in folgender Form:

$$y^3 + \tfrac{3}{4}k^2 y - \frac{h}{4} = 0$$

Ihre Wurzeln sind, wenn

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\sqrt{k^6+h^2}+h}, \qquad Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\sqrt{k^6+h^2}-h}$$

gesetzt wird

$$y = P - Q$$

$$\left.\begin{matrix} y_, \\ y_{,,} \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(P+Q)i$$

Die Wurzeln der reducirten Gleichung sind daher

$$u = m + P - Q$$

$$\left.\begin{matrix} u_, \\ u_{,,} \end{matrix}\right\} = \frac{3m-u}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(P+Q).i$$

Zur bequemeren Berechnung von P und Q setzen wir $\frac{k^3}{h} = \operatorname{tg} 2\varphi$ und erhalten

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}.\sqrt[3]{\sqrt{1+\left(\frac{k^3}{h}\right)^2}+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}.\sqrt[3]{\frac{1}{\cos 2\varphi}+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{k}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2\varphi}}\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2\varphi . \cot\varphi} = \tfrac{1}{2}k\sqrt[3]{\cot\varphi}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}.\sqrt[3]{\sqrt{1+\left(\frac{k^3}{h}\right)^2}-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}.\sqrt[3]{\frac{1}{\cos 2\varphi}-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{k}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2\varphi}}.\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2\varphi . \operatorname{tg}\varphi} = \tfrac{1}{2}k\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$$

Setzt man $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$, so wird

$$P = \tfrac{1}{2}k.\cot\psi, \quad Q = \tfrac{1}{2}k.\operatorname{tg}\psi, \quad \text{also}$$

$$P - Q = \frac{k}{2}(\cot\psi - \operatorname{tg}\psi) = k\cot 2\psi$$

$$P + Q = \frac{k}{2}(\cot\psi + \operatorname{tg}\psi) = \frac{k}{\sin 2\psi};$$

mit diesen Werten wird

$$u = m + k\cot 2\psi \quad \text{und} \quad v\sin\varkappa = 2\sqrt{3}\frac{k}{\sin 2\psi}$$

Für $\sqrt{u_,}$ und $\sqrt{u_{,,}}$ erhält man durch das gleiche Verfahren wie zu Anfang des § 4. Ausdrücke von ganz derselben Form, wie dort.

§ 6.

Handelt sich's um die Auflösung der allgemeineren Gleichung vierten Grades, welche wir in folgender Form anschreiben:

$$z^4 + 4az^3 + 2bz^2 + cz + d = 0$$

so setze man $z = x - a$, wodurch dieselbe übergeht in:

$$x^4 - (6a^2 - 2b)x^2 + (8a^3 - 4ab + c)x - (3a^4 - 2a^2b + ac - d) = 0$$

Die Vergleichung der Coefficienten dieser Gleichung mit denen unserer früheren

$$x^4 - 6mx^2 + 4nx - p = 0$$

liefert die Beziehungen:

$$\begin{aligned} 6m &= 6a^2 - 2b \\ 4n &= 8a^3 - 4ab + c \\ p &= 3a^4 - 2a^2b + ac - d \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte von m, n, p wie folgt:

$$\begin{aligned} m &= a^2 - \tfrac{1}{3}b \\ n &= 2a^3 - ab + \tfrac{1}{4}c = a(3m - a^2) + \tfrac{1}{4}c \\ p &= a^2(3a^2 - 2b) + ac - d = a^2(3m - b) + ac - d \end{aligned}$$

Mit diesen Werten von m, n, p sucht man nach den früheren Vorschriften die Werte der x und hat dann noch von jedem x die Grösse a zu subtrahiren, um die Wurzeln z der vorliegenden Gleichung zu erhalten.

§ 7.

Uebersichtliche Zusammenstellung der Formeln zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades

$$x^4 - 6mx^2 + 4nx - p = 0$$

Man berechne zunächst die Grösse h nach der Formel:

$$h = n^2 - m(m^2 + p)$$

und hat 3 Fälle zu unterscheiden, wobei stets derjenige auszuwählen ist, für welchen die Hülfsgrössen k und φ reelle Werte erhalten

I.

$$k = \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{3}p}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{h}{k^3}$$

$$u = m + k \sin(60^0 + \varphi)$$
$$u_{,} = m - k \sin(60^0 - \varphi)$$
$$u_{,,} = m - k \sin \varphi$$

1. Sämmtliche u sind positiv

$$x_1 = \mp \sqrt{u} \pm \sqrt{u_{,}} \pm \sqrt{u_{,,}}$$
$$x_2 = \pm \sqrt{u} \mp \sqrt{u_{,}} \pm \sqrt{u_{,,}}$$
$$x_3 = \pm \sqrt{u} \pm \sqrt{u_{,}} \mp \sqrt{u_{,,}}$$
$$x_4 = \mp \sqrt{u} \mp \sqrt{u_{,}} \mp \sqrt{u_{,,}}$$

2. u ist positiv, $u_{,}$ und $u_{,,}$ sind negativ

$$x_1 = \pm \sqrt{u} \pm (\sqrt{-u_{,}} + \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_2 = \pm \sqrt{u} \mp (\sqrt{-u_{,}} + \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_3 = \pm \sqrt{u} \mp (\sqrt{-u_{,}} - \sqrt{-u_{,,}})i$$
$$x_4 = \mp \sqrt{u} \pm (\sqrt{-u_{,}} - \sqrt{-u_{,,}})i$$

II.	III.
$k = \sqrt{m^2 - \frac{1}{3}p}$	$k = \sqrt{\frac{1}{3}p - m^2}$
$\sin 2\varphi = \frac{k^3}{h}$	$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{k^3}{h}$
$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$	$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\varphi}$
$u = m + \frac{k}{\sin 2\psi}$	$u = m + k \cot 2\psi$
$v \sin \varkappa = 2\sqrt{3} . k \cot 2\psi$	$v \sin \varkappa = 2\sqrt{3} . \frac{k}{\sin 2\psi}$
$v \cos \varkappa = 2(3m - u)$	$v \cos \varkappa = 2(3m - u)$

$$(\log 2\sqrt{3} = 0{,}539\ 5906\ 23)$$

In den beiden Fällen II. und III. findet sich:

$$x_1 = \mp \sqrt{u} \pm \sqrt{v} . \cos \frac{\varkappa}{2}$$
$$x_2 = \mp \sqrt{u} \mp \sqrt{v} . \cos \frac{\varkappa}{2}$$
$$x_3 = \pm \sqrt{u} \pm i \sqrt{v} . \sin \frac{\varkappa}{2}$$
$$x_4 = \pm \sqrt{u} \mp i \sqrt{v} . \sin \frac{\varkappa}{2}$$

In allen 3 Fällen sind in den Werten der x

die oberen Zeichen zu nehmen, wenn n positiv,
„ unteren „ „ „ „ n negativ.

Die allgemeinere Gleichung vierten Grades

$$z^4 + 4az^3 + 2bz^2 + cz + d = 0$$

lässt sich nach der obigen Gleichung

$$x^4 - 6mx^2 + 4nx - p = 0$$

auflösen, wenn man setzt:

$$m = a^2 - \tfrac{1}{3}b$$
$$n = a(3m - a^2) + \tfrac{1}{4}c$$
$$p = a^2(3m - b) + ac - d$$

Dann findet sich $z = x - a$.

§ 8.

Nach den in § 7. gegebenen Vorschriften lassen sich die Wurzeln jeder Gleichung vierten Grades ohne Schwierigkeit berechnen. Nun können aber doch besondere Fälle eintreten, wo man entweder auf eine unbestimmte Form stösst, oder wo das Resultat nicht diejenige Genauigkeit besitzt, die man nach der Anzahl der bei der Rechnung angewandten Decimalen zu erwarten berechtigt ist. Wir wollen diese Fälle besonders betrachten.

1. Wenn $p = 3m^2$, so findet sich

$$h = n^2 - 4m^3, \quad k = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{k}{\sin 2\psi} = \frac{0}{0}$$

Hier ist aber nach § 2.

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2h} = \sqrt[3]{\frac{n^2}{4} - m^3}, \qquad Q = 0,$$

folglich

$$u = m + P = m + \sqrt[3]{\frac{n^2}{4} - m^3}.$$

Da ferner $P - Q = P = u - m$, so ist nach § 4.

$$v \sin \varkappa = 2\sqrt{3}(u - m)$$
$$v \cos \varkappa = 2(3m - u)$$

2. Wenn $p = 3m^2$ und zugleich $n^2 = 4m^3$, so findet sich auch [illegible] $P = 0$, $u = m$, $v \sin \varkappa = 0$, $v \cos \varkappa = 4m$; daher

$$\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad v = 4m$$

[illegible]

$$x_1 = \mp\sqrt{m} \pm \sqrt{4m} = \pm\sqrt{m}$$
$$x_2 = \mp\sqrt{m} \mp \sqrt{4m} = \mp 3\sqrt{m}$$
$$x_3 = \pm\sqrt{m}$$
$$x_4 = \pm\sqrt{m}$$

Hier sind also 3 Wurzeln einander gleich.

3. Wenn $n = 0$, so heisst die Gleichung $x^4 - 6mx^2 - p = 0$. Man hat hier ganz einfach:

$$x = \pm\sqrt{3m \pm \sqrt{9m^2 + p}}$$

4. Wenn h nur wenig von k^3 verschieden ist, dann erhält man den Hülfswinkel φ nicht mit der notwendigen Schärfe; man wende dann statt der in § 7. angegebenen Formeln die folgenden an:

Im Falle I. $\quad \sin\left(45^0 - \frac{3\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{k^3 - h}{2k^3}}$.

„ „ II. $\quad \sin(45^0 - \varphi) = \sqrt{\frac{h - k^3}{2h}}$

„ „ III. $\quad \operatorname{tg}(45^0 - 2\varphi) = \frac{h - k^3}{h + k^3}$

§ 9.

Als erstes Beispiel lösen wir die folgende Gleichung auf:

$$x^4 - 18x^2 + 36x - 39 = 0$$

Die Vergleichung ergibt:

$$m = 3,\quad n = 9,\quad p = 39;\quad h = -63,\quad k = 2 \text{ (Fall III.)}$$

Man erhält

$\varphi = -3^0\,37'\,6'',46$, $\quad \psi = -21^0\,43'\,21'',57$, $\quad u = 0{,}888\,4078$,
$2(3m - u) = 16{,}223\,1844$, $\quad \log v = 1{,}280\,9665$, $\quad \varkappa = 328^0\,9'\,31'',17$;

$\sqrt{u} = 0{,}942\,5539$, $\quad \sqrt{v}\cos\frac{\varkappa}{2} = -4{,}202\,3951$, $\quad \sqrt{v}\sin\frac{\varkappa}{2} = 1{,}198\,7232$

$x_1 = -5{,}144\,9490$, $\quad x_2 = 3{,}259\,8412$, $\quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = 0{,}942\,5539 \pm 1{,}198\,7232 \,.\, i$

Zweites Beispiel. Die Wurzeln der folgenden Gleichung sollen berechnet werden:

$$z^4 + 312z^3 + 23337z^2 - 14874z + 2360 = 0$$

Hier ist $a = 78$, $b = 11668{,}5$, $c = -14874$, $d = 2360$

Mit diesen Werten findet sich zunächst:

$$m = 2194{,}5, \quad n = 35242{,}5, \quad p = -32099672$$
$$h = 61116424526{,}625, \quad k^2 = 15515720\tfrac{11}{12} \quad \text{(Fall I.)}$$
$$\log h = 10{,}7861579, \quad \log k = 3{,}5953860, \quad \log\sin 3\varphi = 9{,}9999999$$

Da die letzte Decimale von $\log\sin 3\varphi$ leicht um eine Einheit fehlerhaft sein kann, so ist möglicher Weise $\sin 3\varphi = 1$, also $\varphi = 30^0$, danach

$$k\sin(60^0 + \varphi) = k = 3939, \quad k\sin(60^0 - \varphi) = \tfrac{1}{2}k = 1969{,}5,$$
$$k\sin\varphi = \tfrac{1}{2}k = 1969{,}5$$
$$u = 6133{,}5, \quad u_{,} = 225{,}0, \quad u_{,,} = 225{,}0$$
$$\sqrt{u} = 78{,}316665, \quad \sqrt{u_{,}} = \sqrt{u_{,,}} = 15$$
$$x_1 = -48{,}316665, \quad z_1 = -126{,}316665$$
$$x_2 = x_3 = 78{,}316665, \quad z_2 = z_3 = 0{,}316665$$
$$x_4 = -108{,}316665, \quad z_4 = -186{,}316665$$

Sind nun aber die Werte von h und k^3 von einander verschieden, dann hat die Gleichung keine gleichen Wurzeln. Um darüber zu entscheiden, muss k^3 auf eine grössere Anzahl von Decimalstellen berechnet werden.

$$k = \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{3}p} = 3938{,}99998\ 94220\ 19110\ 78611\ 16$$
$$k^3 = 6111\ 642\ 4526{,}62500\ 06112\ 38$$
$$h = 6111\ 642\ 4526{,}62500\ 00000\ 00$$
$$k^3 - h = 0{,}00000\ 06112\ 38$$

Dieser Unterschied ist wohl sehr klein, aber immerhin noch merklich, wenn die Wurzeln auf eine grössere Anzahl von Decimalstellen berechnet werden sollen.

Zur Bestimmung des Winkels φ wenden wir jetzt statt der Formel $\sin 3\varphi = \frac{h}{k^3}$, die hier ein ganz unsicheres Resultat geben würde, die folgende an

$$\sin\left(45^0 - \frac{3\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{k^3 - h}{2k^3}} \quad \text{(Siehe § 8. Nr. 4.)}$$

$$\log(k^3 - h) = 13{,}820\ 2828 - 20$$
$$\log 2k^3 = 11{,}087\ 1879$$
$$2{,}733\ 0949 - 20$$

$$\log\sin\left(45^0 - \frac{3\varphi}{2}\right) = 1{,}366\,5475 - 10$$
$$\log\sin 1'' = 4{,}685\,5749 - 10$$
$$\log\left(45^0 - \frac{3\varphi}{2}\right)'' = 6{,}680\,9726 - 10$$

$$45^0 - \frac{3\varphi}{2} = 0'',000\,479\,7032$$
$$30^0 - \varphi = 0'',000\,319\,8021 = \delta$$

$$\varphi = 30^0 - \delta = 29^0\,59'\,59'',999\,6802$$
$$60^0 + \varphi = 90^0 - \delta = 89\;\;59\;\;59,\,999\,6802$$
$$60^0 - \varphi = 30^0 + \delta = 30\;\;0\;\;0,\,000\,3198$$
$$\sin(60^0 + \varphi) = \cos\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2$$
$$\sin(60^0 - \varphi) = \sin 30^0 \cos\delta + \cos 30^0 \sin\delta = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\delta$$
$$\sin\varphi = \sin 30\,\cos\delta - \cos 30\,\sin\delta = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\delta$$

$$k\sin(60^0 + \varphi) = k - \tfrac{1}{2}k\,\delta^2$$
$$k\sin(60^0 - \varphi) = \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.k.\delta - \tfrac{1}{4}k\,\delta^2$$
$$k\sin\varphi = \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.k.\delta - \tfrac{1}{4}k\,\delta^2$$

Da nun $\operatorname{arc}\delta = \delta''.\operatorname{arc}1''$, so findet sich

$$\log\operatorname{arc}\delta = 1{,}190\,4562 - 10, \qquad \log\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.k.\delta = 4{,}723\,3728 - 10.$$

Die Glieder, welche die 2te Potenz von δ enthalten, sind ganz verschwindend klein.

$$k = 3938{,}99998\,94220\,19$$
$$\tfrac{1}{2}k = 1969{,}49999\,47110\,10$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}k\delta = 0{,}00000\,52889\,90$$

$$k\sin(60^0 + \varphi) = 3938{,}99998\,94220\,19$$
$$k\sin(60^0 - \varphi) = 1969{,}50000\,00000\,00$$
$$k\sin\varphi = 1969{,}49998\,94220\,20$$

$u = 6133{,}49998\,94220\,19$	$\sqrt{u} = 78{,}31666\,48257$
$u_{,} = 225{,}0$	$\sqrt{u_{,}} = 15$
$u_{,,} = 225{,}00001\,05779\,80$	$\sqrt{u_{,,}} = 15{,}00000\,03526$
$x_1 = -48{,}31666\,44731$	$z_1 = -126{,}31666\,44731$
$x_2 = 78{,}31666\,51783$	$z_2 = 0{,}31666\,51783$
$x_3 = 78{,}31666\,44731$	$z_3 = 0{,}31666\,44731$
$x_4 = -108{,}31666\,51783$	$z_4 = -186{,}31666\,51783$

Die beiden Wurzeln z_2, z_3, die zuerst als gleich gross gefunden wurden, sind dies nach der genaueren Rechnung nicht; allerdings zeigen sie zuerst in der 6ten Decimalstelle einen Unterschied.

§ 10.

Die letztere Rechnung lässt sich zweckmässiger in folgender Weise ausführen. Nach § 3. ist

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h + i\sqrt{k^6 - h^2}} \quad \text{und} \quad Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h - i\sqrt{k^6 - h^2}}$$

Setzt man zur Abkürzung $w = \sqrt{\dfrac{k^6 - h^2}{h^2}}$, so ist

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,(1 + iw)^{\frac{1}{3}}, \qquad Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\,(1 - iw)^{\frac{1}{3}}$$

Die Entwickelung nach dem binomischen Satze gibt:

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\left\{1 + \tfrac{1}{3}iw + \frac{1.2}{3.6}w^2 - \frac{1.2.5}{3.6.9}iw^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}w^4 \ldots\right\}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{h}\left\{1 - \tfrac{1}{3}iw + \frac{1.2}{3.6}w^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}iw^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}w^4 \ldots\right\}$$

$$P + Q = \sqrt[3]{h}\left\{1 + \frac{1.2}{3.6}w^2 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}w^4 \ldots\right\}$$

$$P - Q = \sqrt[3]{h}\left\{\tfrac{1}{3}iw - \frac{1.2.5}{3.6.9}iw^3 \ldots\right\}$$

$$(P - Q)i = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{h}.w\left\{1 - \frac{2.5}{3.6}w^2 \ldots\right\}$$

Diese Werte in die Ausdrücke für die u am Schlusse des § 2. eingesetzt, gibt

$$u = m + \sqrt[3]{h}\left\{1 + \frac{1.2}{3.6}w^2 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}w^4 \ldots\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} u_{,} \\ u_{,,} \end{matrix}\right\} = \frac{3m - u}{2} \mp \tfrac{1}{6}\sqrt{3}.\sqrt[3]{h}.w\left\{1 - \frac{2.5}{6.9}w^2 + \frac{2.5.8.11}{6.9.12.15}w^4 \ldots\right\}$$

Zur Berechnung von w hat man folgende Formel

$$w = \frac{\sqrt{(k^3 + h)(k^3 - h)}}{h}$$

In § 9. hatten wir

$$k^3 + h = 1222328\,49053{,}25, \quad k^3 - h = 0{,}00000\,0611238$$

$$\log\sqrt[3]{h} = 3{,}5953860, \quad \log w = 1{,}6675775 - 10$$

$$\log(\tfrac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt[3]{h}.w) = 4{,}7233728 - 10$$

Die Glieder mit w^2 sind ausserordentlich klein

$$m = 2194{,}5 \qquad \frac{3m-u}{2} = 225{,}00000\,528889$$

$$\sqrt[3]{h} = 3938{,}99998\,942202 \qquad \tfrac{1}{6}\sqrt{3}.\sqrt[3]{h}.w = 0{,}00000\,528899$$

$$u = 6133{,}49998\,942202 \qquad u_{,} \doteq 225{,}0$$

$$u_{,,} = 225{,}00001\,057798$$

Diese Werte der u stimmen mit den am Schlusse des § 9. gefundenen vollständig überein.

Gleichungen höherer Grade mit vielziffrigen Coefficienten und wenn Wurzeln nahe an einander liegen empfehlen.

Auch die Auflösung durch Construction, von welcher wir ausgehen (Artikel I.), verdient einige Beachtung.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Bestimmung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen von der Form:

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0$$

wo unbeschadet der Allgemeinheit $\alpha_0 > 0$, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ beliebig reelle Coefficienten bedeuten.

Artikel I. (§ 1 – § 3.)

Hierzu 2 Tafeln.

Construction der reellen Wurzeln.

§ 1.

Das bekannte Schema, § 2. Aufg. I., zur Berechnung eines Functionswertes

$$f(c) = \alpha_0 c^n + \alpha_1 c^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} c + \alpha_n :$$

führt uns auf ein einfaches Verfahren $f(c)$ zu construiren.

Dasselbe schliesst die mechanische Auflösung von E. Lill*) der Gleichung

$$f(x) = 0$$

in sich.

Es sei in Figur I.:

1) $X'OX$, $Y'OY$ ein rechtwinkeliges Achsensystem,

$X_1'O_1X_1$, $Y_1'O_1Y_1$; $X_2'O_2X_2$, $Y_2'O_2Y_2 \ldots$ eine Reihe von Systemen mit zu den ursprünglichen parallelen Achsen.

2) Die Coordinaten von

*) Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue et description d'un instrument inventé dans ce but .... Nouv. Annales math., Jahrg. 1867, und Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue .... présentée par M. Hermite. Comptes Rendus, Jahrg. 1867.

O_1 in Bezug auf das Sxstem (O) seien a_1, b_1
O_2 . . . . (O_1) „ a_2, b_2
⋮
O_r . . . . (O_{r-1}) „ a_r, b_r

3) $O P_1 Q_1 P_2 Q_2 \ldots$ sei ein rechtwinkeliger Linienzug.

4) w bezeichne den spitzen Winkel zwischen $O P_1$ und $Y' Y$.

Wir legen demselben das $\pm$ Zeichen bei, je nachdem OP_1 durch den 1sten und 3ten resp. 2ten und 4ten Quadranten geht.

5) $x = \operatorname{tg} w$.

6) $\varphi_1(x) =$ der Abscisse von P_1 in Bezug auf (O_1)
$\varphi_2(x) =$ . . . . P_2 . . . . . . (O_2)
⋮

und weiter

$$\varphi_0(x) = -b_1$$
$\varphi_2(x) =$ der Ordinate von Q_1 . . . . (O_2)
$\varphi_4(x) =$ . . . . Q_2 . . . . (O_3)
⋮

Unter diesen Voraussetzungen folgt:

$$\varphi_1(x) = -a_1 - x\,\varphi_0(x) = +b_1 x - a_1$$
$$\varphi_2(x) = -b_2 + x\,\varphi_1(x) = +b_1 x^2 - a_1 x - b_2$$
$$\varphi_3(x) = -a_2 - x\,\varphi_2(x) = -b_1 x^3 + a_1 x^2 + b_2 x - a_2$$
$$\varphi_4(x) = -b_3 + x\,\varphi_3(x) = -b_1 x^4 + a_1 x^3 + b_2 x^2 - a_2 x - b_3$$
⋮

Allgemein:

$$\varphi_n(x) = \pm b_1 x^n \mp b_2 x^{n-2} \pm b_3 x^{n-4} \mp \ldots$$
$$\mp a_1 x^{n-1} \pm a_2 x^{n-3} \mp a_3 x^{n-5} \pm \ldots$$

wo die $\left\{ \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \right\}$ Zeichen gelten, wenn n eine der Formen

$4r+1$ oder $4r+2$
resp. $4r+3$ „ $4r$ hat.

Die letzten Glieder sind:

$+b_{\frac{n+1}{2}} . x$ und $-a_{\frac{n+1}{2}}$ wenn n ungrade

$-a_{\frac{n}{2}} . x$ und $-b_{\frac{n+2}{2}}$ wenn n grade ist.

Aufgabe. **Einen beliebigen Functionswert $f(c)$ zu construiren.**

Lösung: Bringe $f(x)$ auf die Form $\varphi_n(x)$, d. h. bestimme zunächst

$$a_1,\ a_2 \ldots;\ b_1,\ b_2 \ldots;$$

sodann construire die Geraden $X'X$, $X_1'X_1$, $X_2'X_2$ mit den Gleichungen:

$$y = 0,\quad = b_1,\quad = b_1 + b_2,\quad = b_1 + b_2 + b_3,\quad = \ldots,$$

sowie $Y'Y$, $Y_1'Y_1$, $Y_2'Y_2 \ldots$, dargestellt durch:

$$x = 0,\quad = a_1,\quad = a_1 + a_2,\quad = a_1 + a_2,\quad = a_1 + a_2 + a_3 \ldots,$$

ziehe durch den Punkt $A = (0, 1)$ *) die Gerade $Z'Z \parallel X'X$, bestimme auf derselben den Punkt $P_0 = (c, 1)$, den Durchschnitt P_1 von OP_0 mit $X_1'X_1$ und schliesslich den rechtwinkeligen Linienzug:

$$O P_1 Q_1 P_2 Q_2 P_3 Q_3 \ldots$$

mit den Ecken

$$P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots \text{ auf } X_1'X_1,\ X_2'X_2,\ X_3'X_3 \ldots,$$
$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \ldots \text{ auf } Y_1'Y_1,\ Y_2'Y_2,\ Y_3'Y_3 \ldots.$$

Alsdann ist:

$f(c)$ = dem algebraischen Abstande der $n$ten Ecke von P, mit P den Durchschnittspunkt der letzten Abscissen- und der letzten Ordinaten-Achse bezeichnet.

Wir finden successive $\varphi_1(c)$, $\varphi_2(c)$, $\varphi_3(c) \ldots \varphi_n(c) = f(c)$.

Es ist verglichen mit obigem Schema (siehe § 2, Aufg. I.):

$$\varphi_1(c) = c_{1,1},\quad \varphi_2(c) = c_{2,1} \ldots$$

Beispiel.

$$f(x) = x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 17x^3 + 18x^2 - 12x + 6 = 0 \text{ **)}$$

Hier ist $n = 6 = 4.1 + 2$, also

$$a_1 = 5,\quad a_2 = -17,\quad a_3 = +12$$
$$b_1 = +1,\quad b_2 = -11,\quad b_3 = +18,\quad b_4 = -6$$

somit

---

*) d. h. dessen Abscisse $= 0$, Ordinate $= +1$ ist. Wir werden uns dieser bekannten Bezeichnungsweise öfter bedienen.

**) P. C. Jelinek, S. J., die Aufl. der höheren numerischen Gleichungen, Leipzig 1865, S. 26.

$b_1 = +1$, $b_1 + b_2 = -10$, $b_1 + b_2 + b_3 = +8$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = +2$,
$a_1 = +5$, $a_1 + a_2 = -12$, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Wählen wir $1^{cm} = 10^{mm}$ als Längeneinheit, Fig. I.

Wir finden z. B. (siehe die Fig.)

$$f(1) = \varphi_6(1) = PQ_3' = +2,$$
$$f(2) = \varphi_6(2) = PQ_3'' = -2,$$

und durch Probiren (oder mittelst des geometrischen Ortes von P_1):

$$f(1,54\ldots) = \varphi_6(1,54\ldots) = PP = 0,$$
$$f(2,26\ldots) = \varphi_6(2,26\ldots) = PP = 0,$$

also zwei Wurzeln der Gleichung annähernd:

$$x_1 = 1,54 \quad \text{und} \quad x_2 = 2,26.$$

(Genauere Werte sind 1,543689 und 2,259921).

Die übrigen Wurzeln sind imaginär *).

§ 2.

Die bekannte Construction der Wurzeln von

$$f(x) = 0$$

als Abscissen der Durchschnittspunkte der Curve $\mathfrak{K}$, dargestellt durch $y = f(x)$, mit der X-Achse leitet uns zu einer allgemeineren Lösung, indem wir an die Stelle der Geraden $y = 0$ eine beliebige Curve K treten lassen, mit der Gleichung

$$y = F(x)$$

und von dieser als Leitlinie die Werte:

$$-\mathfrak{k} f(x),$$

wo $\mathfrak{k}$ eine willkürliche Constante bezeichnet, parallel zur Y-Achse abtragen, so dass die andere Curve $\mathfrak{K}$ dargestellt ist durch:

$$y = \mathfrak{F}(x) = F(x) - \mathfrak{k} f(x).$$

Jene Werte können wir nach § 1. construiren oder nach Schema § 2. Aufg. I. berechnen.

*) In ähnlicher Weise wie die reellen Wurzeln construirt E. Lill auch die reellen- und die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten- Bestandteile der complexen Wurzeln. (Nouv. Ann. Math., 1868.)

Ist $F(x)$ eine ganze rationale Function von x, so auch $\mathfrak{F}(x)$. In diesem Falle ist jede der Curven K und $\mathfrak{K}$ von einer gewissen Abscisse ($\overline{\gtrless}$ grösste Wurzel von $F''(x)=0$ resp. $\mathfrak{F}''(x)=0$) an in der Richtung $Y'Y$ gesehen convex, vorausgesetzt, dass die Glieder mit den höchsten Potenzen in $F(x)=0$ und $\mathfrak{F}(x)=0$ positiv sind.

Es liegt die Frage nahe, ob sich $F(x)$ und k so bestimmen lassen, dass von einer beliebig gegebenen Abscisse $x=c$ an K und $\mathfrak{K}$ convex ausfallen. Der Vorteil, den wir hierdurch erzielen, ist einleuchtend, indem die beiden Curven alsdann die einfachste Gestalt annehmen und wir daher verhältnissmässig nur eine geringe Anzahl von Curvenpunkten zu construiren brauchen, um die Abscissen der Durchschnitte, d. h. die Wurzeln von $f(x)=0$ zu erhalten.

Wir wollen uns im Folgenden mit dieser Frage näher beschäftigen *).

Die beliebige ganze rationale Function

$$\mathfrak{F}(x)=\beta_0 x^s+\beta_1 x^{s-1}+\ldots\beta_s$$

lässt sich auf die Form bringen:

$$\mathfrak{F}(x)=\frac{\mathfrak{F}^s(c)}{s!}(x-c)^s+\frac{\mathfrak{F}^{s-1}(c)}{(s-1)!}(x-c)^{s-1}+\ldots\frac{\mathfrak{F}'(c)}{1!}(x-c)+\mathfrak{F}(c),$$

wo c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Also die zweite Derivirte:

$$\mathfrak{F}''(x)=\frac{\mathfrak{F}^s(c)}{(s-2)!}(x-c)^{s-2}+\ldots\frac{\mathfrak{F}'''(c)}{1!}(x-c)+\mathfrak{F}''(c).$$

Hieraus folgt:

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Ist } \mathfrak{F}^s(c)>0,\quad \mathfrak{F}^{s-1}(c)>0\ldots\mathfrak{F}''(c)>0,\\ \qquad\text{so}\quad \mathfrak{F}''(x)>0 \text{ für jedes } x\overline{\gtrless}c.\end{array}\right.$$

Diese Bedingungen lauten für

---

*) Wir bedienen uns der bekannten Bezeichnungen:

$F^r(x)$ für die $r$te Derivirte von $F(x)$

$r!=1.2.3\ldots r$

$$\binom{z}{r}=\frac{z(z-1)\ldots(z-r+1)}{1.2\ldots r}$$

= ... ganze Zahl.

> 0

> 0

> 0

> 0

> 0

> 0

... genügt,

... kleinsten $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{negativen} \\ \textbf{positiven} \end{array} \right\}$ **Wert**

... Werte von $k_s, k_{s+1} \ldots k_t$

... eine elegantere Form an

$\leqq k < 0.$

β) wenn $r < n$:

1) $h < c$ oder $= c - a$, wo $a > 0$,

2) $k^{-}{}_{p,2} \overset{=}{<} \varkappa < 0$,

wenn $f^n(c) > 0, f^{n-1}(c) > 0 \ldots f^{p+1}(c) > 0$,

dagegen $f^p(c) < 0$ und $p \overset{=}{>} 2$.

Ist $f^n(c) > 0 \ldots f''(c) > 0$, so genügt

k beliebig < 0.

Aufgabe I. Die Constanten der Functionen

$$F(x) = \lambda (x-h)^r$$

und $\mathfrak{F}(x) = F(x) - kf(x)$,

wo $f(x)$ beliebig gegeben, so zu berechnen, dass für ein gegebenes c und eine Nichtwurzel x_1 von $f(x) = 0$:

1) $F''(x) > 0$ und $F''(x) > 0$ für jedes $x \overset{=}{>} c$,

2) $kf(x_1) > 0$,

a) falls $f(x_1) > 0$,

b) „ $f(x_1) < 0$.

Lösung:

1) Wähle λ beliebig > 0.

2) Transformire $f(x) = 0$ nach c, d. h. bilde nach dem bekannten Schema*) diejenige Gleichung $f(x+c) = 0$, deren Wurzeln um c kleiner sind als die ursprüngliche:

---

*)

	α_0	α_1	.....	α_{n-1}	α_n
$c_{0,1} = \alpha_0$		$\frac{c\,c_{0,1}}{c_{1,1}}$	.....	$\frac{c\,c_{n-2,1}}{c_{n-1,1}}$	$\frac{c\,c_{n-1,1}}{c_{n,1} = c_n}$
$c_{0,2} = \alpha_0$		$\frac{c\,c_{0,2}}{c_{1,2}}$		$\frac{c\,c_{n-2,2}}{c_{n-1,2} = c_{n-1}}$	

u. s. w.

wo $c_{1,1} = a_1 + c\alpha_0$; $c_{2,1} = \alpha_2 + c\,c_{1,1}$ etc.

Es ist $x_n = f(c)$; $c_{n-1} = \frac{f'(c)}{1}$; $c_{n-2} = \frac{f''(c)}{1.2} \ldots$

$$f(x) = [c_{0,1}x^{n-1} + c_{1,1}x^{n-2} + \ldots c_{n-1,1}](x-c) + c_{n,1}$$

$$\square = (c_{0,2}x^{n-2} + c_{1,2}x^{n-3} + \ldots c_{n-2,2})(x+c) + {}_{n-1,2}$$

u. s. w.

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots c_{n-1} x + c_n = 0.$$

3) ad a): $r \geqq n$ (= ganze Zahl),

„ b): Ist $c_0 > 0$, $c_1 > 0 \dots c_{n-2} > 0$, so

$$r \geqq 1.$$

Ist $c_0 > 0$, $c_1 > 0 \dots c_{n-p-1} > 0$, dagegen $c_{n-p} < 0$, $p \geqq 2$, so $r \geqq p$ = Exponent des ersten negativen Gliedes der Gleichung $f(x+c) = 0$.

4) mittelst der Formel (Vergl. (3))

$$k_z = \binom{r}{z} \frac{a^{r-z}}{c_{n-z}}$$

ad a): $+k^+_{n,2}$

ad b): $-k^-_{p,2} = -k^-_{n,2}$, wenn $p \geqq 2$ } für a beliebig > 0.

5) ad a): $0 < k \geqq k^+_{n,2}$,

„ b): $0 < -k \leqq -k^-_{p,2} (= -k^-_{n,2})$

resp. k beliebig < 0 wenn p nicht vorhanden oder < 2.

6) $k = \lambda k$.

Aufgabe II. Die vorige Aufgabe mit dem Unterschiede zu lösen, dass

$$k f(x_1) < 0,$$

a) wenn $f(x_1) < 0$,

b) „ $f(x_1) > 0$.

Die Lösung ist genau wie vor, d. h. wir haben die Aufgabe I. für den Fall a) zu lösen, wenn $f(x_1) < 0$, dagegen für den Fall b) wenn $f(x_1) > 0$.

Wir bemerken, dass sich die beiden Aufgaben in eine zusammenschieben lassen bei Unterscheidung der Fälle:

a) $k > 0$

und b) $k < 0$

Die obige Fassung und die Trennung in zwei Aufgaben zogen wir

jedoch vor, um uns bei den folgenden Untersuchungen kürzer ausdrücken zu können.

Aufgabe III. **Die im Intervall $(c, +\infty)$ liegenden Wurzeln w von $f(x) = 0$ als Abscissen der Durchschnitte W zweier convexen Curven K und $\mathfrak{K}$ zu construiren. Fig. III.**

Lösung:

Löse für $x_1 = c$ (oder beliebig, *z. B.* $x_1 = 0$) Aufgabe I. oder Aufg. II., construire die Curve K so, dass die laufende Ordinate $\overline{QP} = \lambda \overline{KQ'}$, die Punkte C und O und schliesslich eine Curve $\mathfrak{K}$ laut Fig. III.

Beispiel I.

In dem Beispiel des § 1. fanden wir 2 reelle Wurzeln > 1. Transformiren wir nach 1), so erhalten wir:

$$x^6 + x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2 = 0. \tag{1}$$

In dem Intervall (0,1) sind also 4 Zeichenwechsel verloren gegangen, mithin nach Fourier's Theorem in (0,1) 4 Wurzeln „angezeigt".

Wir wollen untersuchen, ob darunter reelle sind und sie eventuell construiren. Wir behandeln am zweckmässigsten die negative Gleichung von (1), d. h.

$$x^6 - x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2 = 0. \tag{2}$$

Lösen wir hierfür Aufgabe I., indem wir

$$c = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = c = 0$$

annehmen.

Da $f(0) = +2 > 0$, so liegt Fall a) vor.

1) λ sei $= 1$.

2) c_0 ist $= \alpha_0$, $c_1 = \alpha_1 \ldots \ldots c_n = \alpha_n$.

3) $r \geqq 6$, sei $= 6$.

4) Wir schreiben in erster Reihe die Exponenten $z > 1$ der positiven Glieder, darunter die entsprechenden Coefficienten, in 3ter, 4ter und 5ter Reihe: $\binom{r}{z}$, a^{r+z} und k_z, wie folgt:

$$\begin{array}{llll} z = & 6 & 4 & 3 \\ c_{n-z} = & 1 & 1 & 3 \\ \binom{r}{z} = \binom{6}{6} = & \binom{6}{0} & \binom{6}{4} = \binom{6}{2} & \binom{6}{3} \\ a^{r-z} = & 1 & a^2 & a^3 \\ k_z = & 1 & \frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{a^2}{1} & \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{3}. \end{array}$$

Wählen wir

$$a = 0{,}1,$$

so ist der kleinste der Wert $k_z : \frac{0{,}02}{3}$, also

5) $k = \frac{0{,}02}{3}$.

Mit Hülfe dieser Werte erhalten wir bei Zugrundelegung von $w^{cm} = 200^{mm}$ als Einheit die Construction in Fig. II.

Die Curve $\mathfrak{K}$ geht durch die Punkte:

$$\mathfrak{P}_0,\ \mathfrak{P}_4,\ \mathfrak{P}_5,\ \mathfrak{P}_6,\ \mathfrak{P}_7 \ldots\ldots \text{ entsprechend}$$
$$x = 0,\ {}^4/_{10},\ {}^5/_{10},\ {}^6/_{10},\ {}^7/_{10} \ldots\ldots$$

Fahren wir so fort bis $x = 1$, so finden wir, dass die beiden Curven keinen Durchschnitt gemein haben, die in Frage stehenden 4 Wurzeln also imaginär sind.

Beispiel IIa.

(1) $x^7 - 13x^6 + 66x^5 - 165x^4 + 210x^3 - 126x^2 + 28x - 1 = 0$ *)

Die in (0,1) enthaltenen Wurzeln zu construiren.

Die nach 1 transformirte Gleichung lautet:

(2) $x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 0.x^2 + 5x + 0 = 0$

Es ist also 1 eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung.

Dividiren wir durch x, setzen $-x$ statt x, so entsteht:

---

*) Die Wurzeln sind sämmtlich positiv reell, der Grösse nach:

$$(2\sin 6^0)^2,\quad (2\sin 18^0)^2,\quad (2\sin 30^0)^2,$$
$$(2\sin 42^0)^2 \ldots (2\sin 78^0)^2.$$

(3) $$x^6+6x^5+9x^4-5x^3-15x^2+0x+5=0$$

Construiren wir die zwischen 0 und 1 liegenden Wurzeln w, w' ... von (3) — die gesuchten von (1) sind $1-w$, $1-w'$ ...

Wir lösen Aufgabe I. für $c=0$, $x_1=0$, $\lambda=1$, $a=0{,}1$.

Da $f(0)=5>0$, so liegt Fall a) vor, also $r=6$, $k\vdash_{n,2}=0{,}0166...$, $k=\mathfrak{k}=0{,}01$ zulässig.

Es ergibt sich die Construction in Fig. IVa.

$\mathfrak{K}$ geht durch $\mathfrak{P}_0, \dots \mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_5, W, \mathfrak{P}_8, W'$. Man findet die Abscissen der beiden Durchschnitte

$$w=61{,}8^{\text{mm}} \quad \text{und} \quad w'=95{,}6^{\text{mm}}$$

also annähernd:

$$w=0{,}618 \quad \text{und} \quad w'=0{,}956.$$

Wählen wir

$$\mathfrak{k}=0{,}0166\dots=\frac{0{,}1}{6},$$

so geht $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{P}'_0 \dots \mathfrak{P}'_4 \dots \mathfrak{P}'_8$.

Beispiel IIb.

Wie vor, mit dem Unterschiede, dass dabei Aufg. II. zu lösen ist, oder was dasselbe Aufg. I., Fall b), so dass also $k<0$.

Wir finden $p=3$, $r \geqq 3$, sei $=3$,

Die Exponenten >1 der negativen Glieder sind $z=3$ und 2.

Die entsprechenden $-k_z: \frac{1}{5}$ und $\binom{3}{2} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}5}$ also $k=-0{,}02$.

Wir haben also für die Wurzeln w und w' von (3) eine zweite Construction Fig. IVb.

Beispiel III.

Die Wurzel x der Gleichung (1) in Beispiel IIa zu construiren, welche zwischen 1 und 2 liegt.

Die nach 1 transformirte Gleichung (2) durch x dividirt ist:

$$x^6-6x^5+9x^4+5x^3-15x^2+0x+5=0.$$

Construiren wir die Wurzel w im Intervall (0,1).

Es ist das gesuchte $x = 1 + w$.

Lösen wir zunächst Aufg. I. für $c = 0$, $x_1 = 0$. Wir finden $r = 6$, $k\dagger_{n,2} =$ dem kleinsten der Werte 1, $\frac{15}{9}a^2$, $4a^3$. Sei $a = 0,3$, so $k\dagger_{n,2} = 0,108$, $k = 0,1$. In Fig. V. wählten wir als Einheit 50^{mm}. Die Abscisse w des Durchschnittes von $K_3 \mathfrak{K}$ ist $w = 39,5^{mm}$, also $w = 0,79$ (genauer $w = 0,79094$).

Anmerkung. Wir können in dieser Weise die Gleichung (1) weiter behandeln, d. h. die Wurzeln in (2,3), (3,4) construiren. Durch die Substitution $x = mx$ lassen sich die Wurzeln einer Gleichung beliebig verkleinern, also die in einem grösseren Intervall liegenden ebenfalls mit Hülfe eines begrenzten Curvenstückes HK (Fig. III.) z. B. über einer Abscisse $HQ = 1,1$ verzeichnen. Dabei möchte jedoch nine grössere Längeneinheit zu wählen sein.

§ 3.

Bei der geometrischen Auflösung der Gleichungen können wir uns mit Vorteil folgender Kriterien bedienen, welche wir im Artikel II. begründen werden.

Für die Figuren VI, VII und VIII möge das Achsensystem einer der vorigen Figuren gelten. Es seien K und $\mathfrak{K}$ zwei beliebige convexe Curven (in der Richtung $Y'\,Y$ gesehen).

$$\mathfrak{P}_1 P_1 \parallel \mathfrak{P}_2 P_2 \parallel \mathfrak{P} P \parallel Y'\,Y.$$

Kriterium I. Liegt in Fig. VI. die begrenzte Sehne $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ganz ausserhalb K, so befindet sich zwischen P_1 und P_2 kein Durchschnitt W von $\mathfrak{K}$ und K.

Beispiele.

In jeder der Figuren II, IVa und V liegt $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_4$ unterhalb der X-Achse, dagegen die Curve K oberhalb, mithin in dem Intervall $\left(0, \frac{4}{10}\right)$ keine Abscisse w, d. h. keine Wurzel der betreffenden Gleichung.

In Fig. II. hat keine der Sehnen $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_5\mathfrak{P}_6$, $\mathfrak{P}_6\mathfrak{P}_7$ mit K einen Punkt gemein, also enthält keines der Intervalle $\left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right)$, $\left(\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right)$, $\left(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right)$ eine Wurzel.

Kriterium II. In Fig. VII. liegt zwischen P und T einer- und P und T' andrerseits höchstens ein Durchschnitt W, wenn die Tan-

genten in T, T' durch $\mathfrak{P}$ gehen oder die Ordinate dieses Punktes oberhalb $\mathfrak{P}$ schneiden.

Beispiel.

In Fig. V. schneidet die Tangente des Punktes T die Y-Achse oberhalb $\mathfrak{P}_0$. Die betreffende Gleichung hat also zwischen 0 und $t = 23^{\mathrm{mm}} = 0{,}46$ höchstens eine Wurzel, mithin, da $f(0) > 0$ und $f(0{,}46) > 0$ keine solche.

Kriterium III. Ist, Fig. VIII., $S\mathfrak{P}S'$ Tangente an $\mathfrak{K}$, so befindet sich auf dem Bogen SPS' kein Durchschnittspunkt W von $\mathfrak{K}$ und K.

Beispiel.

Die Tangente P_0S, Fig. IVb, trifft die Curve K in einem Punkte S, dessen Abscisse $s = 37^{\mathrm{mm}} = 0{,}37$ ist. Zwischen 0 und 0,37 hat also die Gleichung keine Wurzel.

(Es ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den $\mathfrak{P}_0S$ mit der X-Achse bildet, $= f'(0) = F'(0) - kf'(0) = F' = 3\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}03\Big)$.

Anmerkung. Zur Construction der Tangente (Fig. III.) in einem Punkte P, $\mathfrak{P}$ von K bezüglich $\mathfrak{K}$ haben wir zu bemerken:

1) Die Subtangente von K in P ist

$$= \frac{x-h}{r}.$$

2) Die Abscisse d des Durchschnitts D der Tangenten PD und $\mathfrak{P}D$ ist gegeben durch

$$d-h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(Euler'scher „Näherungswert").

Als Beispiel diene Fig. IVa, $x = \frac{8}{10}$; man findet:

$$d-h = 0{,}66\ldots; \quad \frac{x-h}{r} = 0{,}15.$$

Wir haben im vorliegenden Artikel stillschweigend angenommen, dass die Gleichung $f(x) = 0$ keine gleiche Wurzeln besitzt. Der Fall, dass solche vorhanden, lässt sich auf den obigen zurückführen, indem wir Folgendes beachten.

Ist das grösste gemeinschaftliche Maass

$$\begin{array}{llll} \text{zwischen } f(x) & \text{und } f'(x) & : f_1(x), \\ \text{,,} \quad f_1(x) & \text{,,} \quad f'_1(x) & : f_2(x), \\ \vdots \qquad \vdots & \qquad \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

und allgemein:

$$F_m(x) = \frac{f_m(x)}{f_{m+1}(x)} \quad \text{und} \quad \varphi_m(x) = \frac{F_m(x)}{F_{m+1}(x)},$$

so enthalten die Gleichungen

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0 \ldots$$

die 1, 2, 3 ... fachen Wurzeln von $f(x) = 0$ (nach Hudde).

XXXVIII.

Ein Beitrag zur Lehre der Transversallinien.

Von

Herrn Dr. ***Ludwig Külp***

in Darmstadt.

Zieht man von irgend einem Punkte m Fig. 1 in der Ebene, der ausserhalb eines regelmässigen Kreispolygon's liegt, nach den Ecken $a, b, c, d \ldots$ und ebenso nach den Mittepunkten der Seiten dieses Polygon's Transversallinien, so ist: die Summe der Quadrate der Mittepunktstransversalen vermehrt um das n fache Quadrat der halben Polygonseite gleich der Summe der Quadrate der Ecktransversalen.

Bezeichnen $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ die Längen der Mittepunktstransversalen, s_n die Polygonseite des n-Ecks und $a, b, c, d \ldots$ die Längen der Transversallinien, welche nach den Ecken des Polygon's $a, b, c, d \ldots$ gezogen sind, so besteht der Ausdruck:

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \ldots + t_n^2 + n\left[\frac{s_n}{2}\right]^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ldots + n^2.$$

Der Nachweis für die Richtigkeit dieses Satzes soll an einem regelmässigen Fünfeck gegeben werden. Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatze über Transversallinien, hat man zunächst mit Hülfe von Fig. 1 die Gleichungen:

$$t_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$$

$$t_2^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$$

$$t_3^2 = \frac{c^2+d^2}{2} - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$$

$$t_4^2 = \frac{d^2+f^2}{2} - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2$$

und:

$$t_5^2 = \frac{f^2+a^2}{2} - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2,$$

wenn s_5 die Länge der Polygonseite darstellt.

Werden diese Gleichungen addirt, so erhält man die Relation:

$$t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2+t_5^2+5\left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+f^2,$$

welche den Beweis der Richtigkeit des obigen Satzes liefert.

Dieser Satz ist auch gültig, für den Fall, wenn der Punkt m innerhalb des Polygon's liegt.

Zieht man Tangenten an den Kreis der Art, dass ein regelmässiges Polygon gebildet wird, so besteht auch in diesem Falle, für einen ausserhalb und innerhalb der Ebene gelegenen Punkt m der gleiche Satz.

Bezeichnet man in einem regulären n-Eck den grossen Radius mit R, den kleinen Halbmesser mit r und die Polygonseite mit s_n, so ist:

$$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = R^2 - r^2,$$

berücksichtigt man diesen Wert, so erhält man:

$$t_1^2+t_2^2+t_3^2+ \ldots t_n^2+n[R^2-r^2] = a^2+b^2+c^2+ \ldots +n^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Mittepunktstransversalen vermehrt um die $n$fache Differenz der Quadrate des Halbmessers des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises ist gleich der Summe der Quadrate der Ecktransversalen.

Ist das Vieleck welches im Kreise liegt, unregelmässig, dann besteht z. B. für ein Fünfeck ein ähnlicher Satz, der leicht mit Hülfe von Fig. 2. bewiesen werden kann, man hat nämlich:

$$t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2+t_5^2+\tfrac{1}{4}[ab^2+bc^2+cd^2+df^2+af^2]$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+f^2,$$

wenn die Längen der Ecktransversalen wieder durch $a, b, c, \ldots$ die Mittepunktstransversalen durch $t_1, t_2, t_3, \ldots$ und die Polygonseiten hier durch $ab, bc, cd, \ldots$ bezeichnet werden.

Besteht nun das regelmässige Polygon aus einer graden Anzahl von Ecken, so hat man Nachstehendes.

Zieht man in einem Kreise der Art n Durchmesser, dass ihre Schnittpunkte mit der Kreislinie ein regelmässiges Polygon von der Seitenzahl $2n$ bilden, und zieht von einem ausserhalb des Polygon's in der Ebene gelegenen Punkte m nach dem Mittelpunkt des Kreises vom Halbmesser R eine Transversale, sowie Transversallinien nach den Ecken des Polygon's, so ist: die $2n$fache Summe der Quadrate der Mittelpunktstransversale und des Radius des umschriebenen Kreises gleich der Summe der Quadrate der Ecktransversalen des Polygon's, d. h. es ist:

$$2n[e^2+R^2] = a^2+b^2+c^2+\ldots+n^2.$$

Der hier ausgesprochene Satz soll mit $n = 3$ Durchmesser bewiesen werden. Mit Hülfe von Fig. 3., und des oben schon angewandten Lehrsatzes über Transversallinien, bestehen zunächst die folgenden Ausdrücke:

$$e^2 = \frac{c^2+g^2}{2} - R^2,$$

$$e^2 = \frac{b^2+f^2}{2} - R^2$$

und

$$e^2 = \frac{d^2+a^2}{2} - R^2,$$

wenn die Längen der Ecktransversalen durch $a, b, c, \ldots$ der Halbmesser mit R und die nach dem Mittelpunkt gezogene Transversallinie (Mittelpunktstransversale) mit e bezeichnet werden. Man erhält durch Addition dieser Gleichungen die Relation:

$$6[e^2+R^2] = a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+g^2.$$

Auch gilt dieser Satz für einen Punkt m innerhalb des Polygon's.

Gehen Strahlen von einem Punkt ausserhalb oder innerhalb nach den Ecken des Polygon's, so kann man solche Strahlen einen äusseren oder inneren Polygon-Büschel erster Art, und im Falle auch noch

äusseren oder

ausserhalb
ingeschrie-
so ist: die
ransversalen
regulären
Halbmes-

dass das Quadrat
Dreieck's:

Ausdruck:

R^2,

ransversalen des um-
nden Längen der
Dreiecks dargestellt

gelmässige Poly-

Punkt m hat dieser

und

$$t_1 = t_2 = t_3 = R,$$

folglich:

$$3T_1^2 - 3R^2 = 9R^2$$

und

$$T_1 = 2R,$$

woraus:

$$x^2 = 3R^2$$

sich ergibt, ein Wert, welcher dem Obigen entspricht.

Gehen die Strahlen von einem Punkt ausserhalb oder innerhalb sowohl nach den Ecken des umschriebenen als auch nach den Ecken des eingeschriebenen regelmässigen Polygon's von gleicher Seitenzahl, so kann man solche Strahlen einen Polygonbüschel dritter Art nennen.

Werden weiter Transversallinien nach den Mitten der Seiten des eingeschriebenen regulären Dreiecks gezogen, so besteht der Satz:

Die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der Ecktransversalen und den Mittetransversalen des eingeschriebenen Dreiecks ist $= [\frac{3}{2}R]^2$.

Man erhält mit Hülfe Figur 4. unter Berücksichtigung, dass das Quadrat (y^2) der halben Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks:

$$y^2 = \tfrac{3}{4}R^2$$

ist, den nachstehenden Ausdruck:

$$[t_1^2 + t_2^2 + t_3^2] - [e_1^2 + e_2^2 + e_3^2] = [\tfrac{3}{2}R]^2,$$

wenn die Längen der Mittetransversalen des eingeschriebenen Dreiecks durch e_1, e_2 und e_3 dargestellt werden.

Aus diesen beiden letzten Sätzen folgt unmittelbar durch Addition die weitere Relation:

$$[T_1^2 + T_2^2 + T_3^2] - [e_1^2 + e_2^2 + e_3^2] = \tfrac{5}{4}[3R]^2,$$

d. h.

die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der Ecktransversalen des umschriebenen und der Mittetransversalen des eingeschriebenen Dreiecks ist

$$= \tfrac{5}{4}[3R]^2.$$

Auch möge hier der Satz gegeben werden: dass, wenn Paralleltransversalen, von den Ecken des umschriebenen und des eingeschriebenen regulären Dreiecks, nach irgend einer ausserhalb gelegenen Graden gezogen werden, die Summe der Paralleltransversalen nach den Ecken des umschriebenen gleich ist der Summe der Paralleltransversalen nach den Ecken des eingeschriebenen Dreiecks.

Es ist nach Figur 5:

$$2b_1 = a_1 + a_2$$
$$2b_2 = a_2 + a_3$$

und

$$2b_3 = a_3 + a_1$$

folglich:

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

wenn durch a_1, a_2 und a_3 die Längen der Paralleltransversalen nach den Ecken des umschriebenen und durch b_1, b_2 und b_3 die Längen dieser Transversalen nach den Ecken des eingeschriebenen Dreiecks bezeichnet werden.

Zieht man ferner von einem ausserhalb in der Ebene gelegenen Punkte m nach den Ecken eines Dreiecks Transversalen a, b und c, und zieht ferner durch die Mitten zweier anstossenden Seiten eine Transversale mn, alsdann von der Mitte α dieser Transversale nach den Ecken des Dreiecks und des ausserhalb gelegenen Punktes m die Transversallinien e, e_1, e_{11} und E, so besteht zwischen diesen verschiedenen Transversallinien die Relation:

$$a^2 + c^2 + 2b^2 = 4E^2 + e^2 + e_{11}{}^2 + 2e_1{}^2.$$

Um diesen Satz zu beweisen, zieht man Figur 6. zunächst die Hülfslinien t und t_1, und hat nach dem schon mehrmals gebrauchten Transversalsatze die beiden folgenden Gleichungen:

$$t^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - y^2$$

und

$$t_1{}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - z^2,$$

durch Addition derselben entsteht die weitere Relation:

$$t^2+t_1^2=\tfrac{1}{2}[a^2+2b^2+c^2]-(y^2+z^2)$$

oder:

$$2t^2+2t_1^2+2y^2+2z^2=a^2+c^2+2b^2.$$

Es besteht ferner die Gleichung:

$$E^2=\frac{t^2+t_1^2}{2}-x^2$$

oder:

$$2E^2+2x^2=t^2+t_1^2;$$

hiernach geht der obige Ausdruck in den nachfolgenden über:

$$4E^2+4x^2+2y^2+2z^2=a^2+c^2+2b^2.$$

Zieht man endlich die zwei weiteren Gleichungen:

$$x^2=\frac{e_1^2+e_{11}^2}{2}-y^2$$

und

$$x^2=\frac{e^2+e_1^2}{2}-z^2$$

in Betracht, welche sich leicht aus Figur 6. ergeben, so entstehr die obige Formel:

$$a^2+c^2+2b^2=4E^2+e^2+e_{11}^2+2e_1^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Transversalen von dem ausserhalb gelegenen Punkte nach den Ecken, welche die dritte mit den anstossenden Seiten bildet, vermehrt um das doppelte Quadrat der Transversale nach der Ecke der anstossenden Seiten, ist gleich der Summe des vierfachen Quadrats der Mittelpunktstransversale der Paralleltransversale zur dritten Seite und den Quadraten der Entfernungen dieser Mitte von dieser Seite vermehrt um das doppelte Quadrat der Entfernung besagter Mitte von der Ecke der anstossenden Seiten.

Liegt der Punkt m Fig. 7. innerhalb des Dreiecks, dann ist dieser Satz gleichfalls gültig, der Beweis geht dem Obigen analog.

Werden Fig. 8. in einem Dreieck drei Ecktransversalen durch einen Punkt gezogen, so verhält sich die Summe der drei Producte gebildet aus einem unteren Abschnitt einer Ecktransversale eines Dreiecks, mit je den ganzen Längen der beiden anderen Ecktrans-

versalen zur Summe der drei Producte gebildet aus einem oberen Abschnitt einer Ecktransversale, mit je den ganzen Längen der beiden anderen Ecktransversalen, wie die Zahlen 1:2, d. h. es besteht der Ausdruck:

$$\frac{m.b.c+n.a.c+o.a.b}{\alpha.b.c+\beta.a.c+\gamma.a.b}=\tfrac{1}{2},$$

wenn m, n und o die Längen der unteren Abschnitte, α, β und γ die Längen der oberen Abschnitte und a, b und c die ganzen Längen der Ecktransversalen bedeuten.

Nach Fig. 8. bestehen zunächst die drei Proportionalgleichungen:

$$\frac{m}{a}=\frac{f}{F},$$

$$\frac{n}{b}=\frac{f_1}{F}$$

und

$$\frac{o}{c}=\frac{f_{11}}{F},$$

und weiter, wenn von den umgekehrten Werten dieser Gleichungen die Einheit weggenommen, und mit der entsprechenden obigen Gleichung nochmals multiplicirt wird, unter Berücksichtigung dass:

$$a-m=\alpha,$$

$$b-n=\beta$$

und

$$c-o=\gamma$$

ist, die drei weiteren Proportionalgleichungen:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{F-f}{F},$$

$$\frac{\beta}{b}=\frac{F-f_1}{F}$$

und

$$\frac{\gamma}{c}=\frac{F-f_{11}}{F},$$

wenn f, f_1 und f_{11} die einzelnen Dreiecke bedeuten, in die das ganze Dreieck F durch die Ecktransversalen a, b und c zerlegt wird, also:

$$F=f+f_1+f_{11}$$

ist. Durch Addition je drei dieser Proportionalgleichungen, und Division dieser beiden Summen in einander, entsteht der Ausdruck:

$$\frac{m.b.c+n.a.c+o.a.b}{\alpha.b.c+\beta.a.c+\gamma.a.b}=\tfrac{1}{2},$$

der die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes beweist.

Es bestehen zwar schon die beiden Sätze:

dass die Summe der drei Quotienten gebildet aus den unteren Abschnitten und den ganzen Längen der zugehörigen Transversalen $= 1$, und ebenso, dass die Summe der Quotienten aus den oberen Abschnitten und den ganzen Längen der zugehörigen Transversalen $= 2$ ist; doch ist der hier gegebene Satz, der auch als eine Vereinigung der beiden erwähnten Sätzen angesehen werden kann, wohl in eine andere, neue Form gebracht werden.

Wird eine Strecke p Fig. 9. von einem ausserhalb gelegenen Punkte M durch die Strahlen:

$$a,\ a_1,\ i \text{ und } i_1$$

harmonisch geteilt, so dass die Gleichung:

$$m.n=p.q$$

eine richtige ist, dann besteht die Gleichung:

$$p[i_1^2-i^2]=q[a_1^2-a^2]+mn(m-n),$$

d. h. das Product gebildet aus der Differenz der Quadrate der inneren harmonischen Strahlen und der ganzen Strecke, ist gleich dem Product aus der Differenz der Quadrate der äusseren harmonischen Strahlen und dem Mittelstück, vermehrt um das Product aus der Differenz und dem Producte der äusseren Stücke.

Nach einem Lehrsatze über Ecktransversalen bestehen die beiden Gleichungen:

$$i^2=\frac{a^2[n+q]+a_1^2 m}{p}-m[n+q]$$

und

$$i_1^2=\frac{a^2 n+a_1^2[m+q]}{p}-n[m+q],$$

durch Subtraction derselben erhält man die Relation:

$$p[i_1^2-i^2]=q[a_1^2-a^2]+pq[m-n]$$

woraus, da $pq=m.n$:

XXXIX.

Uebungsaufgaben.

1. An den Halbkreis ADB ist eine Tangente EDF parallel dem Durchmesser ACB gelegt, und über AB das gleichseitige Dreieck SAB construirt, dessen Seiten die Tangente in E und F treffen; dann erzeugt, bei Rotation um AB, die gebrochene Linie $AEFB$ eine ebenso grosse Fläche als der Halbkreis.

2. Ist statt dessen das Dreieck SAB nur gleichschenklig, und seine Höhe $SC = AB$, so erzeugt bei Rotation um AB die Fläche $AEFB$ einen ebenso grossen Körper als die Halbkreisfläche.

3. Erzeugt ein rechtwinkliges Dreieck bei Rotation um die Hypotenuse a und die Katheten b und c bzhw. die Volumina A, B und C, so ist ausser den bekannten Relationen $aA = bB = cC$ und unabhängig davon

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}; \qquad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} + \frac{c}{C}$$

4. In jedem Dreieck ist

$$\frac{\sin^2 A}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2\cos A}{bc}$$

wo A den Winkel zwischen den Seiten b und c, und h die vom Scheitel A aus gehende Höhe bezeichnet. G. Dostor.

5. Sind $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei Quadrate, und die gleichbenannten Seiten einander parallel, so ist

$$\overline{AA'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2$$

6. Schneidet eine Gerade die Verlängerung einer Seite AB eines gleichseitigen Dreiecks über A hinaus in D, die Seiten AC, BC bzhw. in A', B', so ist

$$\frac{AD}{AA'} - \frac{BD}{BB'} = -1$$

7. Fallen die Hypotenusen BC und $B'C'$ zweier gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in eine Gerade, so ist

$$\overline{AB'}^2 + \overline{AB'}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2$$

8. Ist S der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC, und sind ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c für die Dreiecke BSC, CSA, ASB, ϱ' für das von den Seitenhalbirenden als Seiten gebildete Dreieck, ϱ für das Urdreieck die Inkreisradien, so ist

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{3}{\varrho} + \frac{3}{\varrho'}$$

E. Hain.

Litterarischer Bericht
CCXXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Publicato da B. Boncompagni. Tomo VI. Roma. 1873. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Das Aprilheft enthält eine Reclamation von Angelo Genocchi zu Gunsten Felice Chio's, betreffend eine Abhandlung von Maximilian Marie über den Umfang der Convergenz der Taylor'schen Reihe; dann Zugaben und Verbesserungen zu der Schrift: Intorno ad una traduzione latina dell' ottica di Tolomeo". Bull. IV. p. 470—492. nov. 1871. von B. Boncompagni; endlich Ankündigungen neuer Publicationen. Das Maiheft bringt eine Notiz von D. Bierens de Haan über Holländische logarithmische Tafeln (von Adriaan Vlaek). Hoppe.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Die Hauptsätze der Elementarmathematik. Zum Gebrauch an höhern Lehranstalten. Bearbeitet von A. F. G. Th. Gauss, Oberlehrer am Gymnasium zu Bunzlau. Erster Theil: Arithmetik und Planimetrie. Mit 124 — Zweiter Theil: Stereometrie und Trigonometrie. Mit 47 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Bunzlau 1873. G. Kreuschmer. 213 S.

Das Lehrbuch soll, wie der Verfasser sagt, nur der Repetition dienen. Er folgert daraus, dass es ein wesentlich synthetisches Gepräge haben müsse. Ob die erstere Bestimmung, welche beim vor-

liegenden zutrifft, eine Notwendigkeit sei, kann man dahingestellt sein lassen; das letztere Merkmal ist wol auch ohnedies durch die Natur der Sache gefordert. Hier ist indes rühmlich harvorzuheben, dass das synthetische Princip mit Bewusstsein und consequenter Klarheit durchgeführt worden ist. Es hätte nahe gelegen, am Schlusse jedes Abschnitts den synthetisch gewonnenen höhern Standpunkt durch einen allgemeineren Satz zu manifestiren. Am auffallendsten ist es in dieser Beziehung, dass bei den Logarithmen die Grundzahl als beliebige Grösse immer mitbezeichnet wird, und doch der Hauptsatz gar nicht aufgenommen ist, dass der Logarithmus von b zur Grundzahl $a = \frac{\log b}{\log a}$ ist, welcher zeigt, dass zum Rechnen eine einzige Grundzahl genügt. Manche abgekürzte Redeweise könnte bedenklich erscheinen, doch ist der Ausdruck nirgends irreleitend. Dies gilt auch von den in Betracht gezogenen unendlichen Grössen, welche sich, wenn sie nur, wie es hier geschieht, als Variable aufgefasst werden, leicht genug ganz elementar und streng behandeln lassen. Nur hätte, da bei der Proportionalität der Linien davon Anwendung gemacht wird, der Hauptsatz nicht fehlen dürfen, dass a genau $= b$ ist, wenn $a-x$ und $b-x$ unendlich klein sind, ohne welchen die Bündigkeit des ganz richtigen Schlusses nicht einleuchten kann, und welcher überdies die Anwendung des Unendlichen in sofern gekürzt hätte, als er die Einschliessung zwischen zwei Grenzen erspart.

Die Arithmetik beginnt mit der discreten Zahl, deren Begriff allmälig erweitert wird. Hieran schliesst sich die Algebra nach Einführung der allgemeinen Grösse. Als Zugabe, wiewol für die Anforderungen an die Schule unentbehrlich, folgen die Progressionen, der binomische Lehrsatz, Combinationslehre und Kettenbrüche. Auch die Geometrie enthält manche kleine Zugabe, namentlich aus der neuern Geometrie, eingestreut, ohne dass dadurch der Hauptinhalt wesentlich zurücktritt. In der Stereometrie sind besonders eingehend und in grösserm Umfange behandelt die Sphärik, die Kubatur und Complanation.

Der Titel des ersten Teils hätte vollständig heissen müssen: Arithmetik, Algebra und Geometrie. Es ist ein, der Bequemlichkeit der Schulen dienender Familiarismus, alles, was in der Arithmetikstunde gelehrt wird, unter den Namen Arithmetik zusammenzufassen. Diese Ungenauigkeit wird jedoch zu einem nicht mehr zu duldenden Misbrauch und führt zur Verwirrung der Terminologie, wenn man sich, wie es neuerdings geschehen ist, darauf als unabänderlich feststehende Begriffsbestimmung beruft, um die Grundbedeutung nach Namen und Sache zu verdrängen. Hier ist es wichtig genug zu erklären: Der zufällige Usus hat kein Recht, wo der Begriffsunterschied

in der Natur der Sache gegeben ist. Arithmetik oder Zahlenlehre, elementare wie höhere, ist die Doctrin von der discreten Zahl, Algebra die der allgemeinen Grösse; erstere hat der Geometrie gegenüber ihre eigene Quelle für ihre Grundbegriffe, letztere vereinigt beide unter einer Theorie. Das vorliegende Lehrbuch gehört zu denjenigen, welche die Zahlenlehre zur Entwickelung führen und erst dann zur Algebra übergehen. Es beweist damit das Recht eines besondern Platzes für erstere im elementaren Cursus, es beweist aber ausserdem, dass der bequeme Usus nicht bloss die allgemeine Grössenlehre, sondern auch die Lehre von den Gleichungen, die doch jedermann Algebra nennt, mit unter den Titel Arithmetik bringt, dass er also kein feststehender ist.

Hoppe.

Lehrbuch der Arithmetik. (Zweiter Cursus.) Erster Theil. Zunächst zum Gebrauch in der Secunda. Von H. P. H. Grünfeld, Oberlehrer, erstem ordentlichen Lehrer an der Königl. Domschule in Schleswig. Schleswig 1872. Julius Bergas. 100 S.

Sammlung methodisch geordneter Aufgaben zur Benutzung beim Unterricht in der Arithmetik. Erster Theil. Von H. P. H. Grünfeld, Oberlehrer, erstem ordentlichen Lehrer an der Königl. Domschule in Schleswig. Schleswig 1873. Julius Bergas. 133 S.

Bezeichnend für das Lehrbuch ist die Sorgfalt und Gründlichkeit, mit welcher die gesammten Objecte der Doctrin nach dem Ursprung der Ideen entwickelt werden. Infolge dessen, dass es der Verfasser in dieser Beziehung nicht leicht genommen hat, ist auch in der Tat die rechte Deutung nie verfehlt. Hauptaugenmerk ist unverkennbar die deutliche, correcte Vorstellung des Einzelnen, dahingegen der Zusammenhang und die Gesammtauffassung merklich zurückgesetzt und als nebensächlich behandelt erscheint.

Nur in den ersten Erklärungen findet sich die discrete Zahl unterschieden; von da an wird sofort und ausschliesslich der aus der Linearabmessung hervorgehende Zahlbegriff zugrunde gelegt, und demgemäss die Sätze vorwaltend geometrisch begründet. Hieraus lässt sich jedoch nicht auf die Ansicht des Verfassers schliessen; vielmehr ist zu vermuten, dass im ersten Cursus dieser Standpunkt bereits erreicht war, im zweiten daher unmittelbar zur Basis genommen werden konnte.

Die Aufgabensammlung beginnt mit Einübung der Uebersetzung der Worte in Zeichen und der Zeichen in Worte. Dann folgen mit Bezugnahme auf die Paragraphen des Lehrbuchs eine reichliche Anzahl

Uebungsbeispiele, erst in Zeichen, dann in Worten, welche wol schwerlich einen Rechnungsfall vermissen lassen. Die Resultate sind am Schluss dazugegeben. Hoppe.

Lehrbuch der Geometrie mit Einschluss der Coordinaten-Theorie und der Kegelschnitte. Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. K. H. M. Aschenborn, † weiland Professor am Berliner Cadettenhaus, Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule. Erster Abschnitt. Die ebene Geometrie. Zweite unveränderte Auflage. Berlin 1873. Verlag der Kön. Geh. Oberhofbuchdruckerei (R. v. Decker). 372 S.

Das Buch kennzeichnet den Verfasser als Meister in seinem Fache, einem Lehrfache von näher zu charakterisirenden Grenzen. Er beherrscht mit seltener Begabung den Lehrstoff und giebt, ohne Befangenheit in vererbten Schulgrundsätzen, ohne Anlehnen an Autoritäten, ohne Entlehnen von fremden Bearbeitungen, vollkommen sein Eignes, Selbstdurchdachtes, Selbstgestaltetes. Um diesem originellen Werke seine richtige Stellung zu geben, ist jedoch folgendes in Betracht zu ziehen. Es ist nicht zur Einführung in das Studium der Wissenschaft, auch nicht zur Ausbildung für das Lehrfach gemacht und brauchbar, sondern ausschliesslich zur Unterweisung dessen, der praktische Anwendung von der Mathematik machen will. Dies liegt jedoch nicht in der Wahl des Lehrstoffs. Der Umfang desselben ist der weiteste, den wol je der Gymnasialunterricht aufgenommen hat, und über die reine Geometrie geht er nirgends, etwa zugunsten besonderer Anwendung, hinaus. Der Unterschied liegt vielmehr darin, dass zum Selbstdenken des Schülers weder Anlass und Nötigung noch die erforderliche logische Grundlage gegeben wird. Der Schüler empfängt alles, was er wissen soll, in vortrefflicher Weise disponirt, bis ins äusserste ausgeführt und begründet; aber in irgend einer Frage selbst entscheiden lernt er nicht. Dass die Euklidische Satzform nicht inne gehalten wird, wird wol kaum vom theoretischen Gesichtspunkte gemisbilligt werden, da sie ohnedas von vielen für Pedanterie gehalten wird. Doch hiermit hängt ein sehr wesentliches Merkmal zusammen. Es ist anerkannter didaktischer Grundsatz, in allen mathematischen Urteilen weder zu wenig noch zu viel Bestimmungen anwenden. Dies Erforderniss der Entwickelung des exacten Denkens, welchem im Grunde die Euklidische Satzform zu dienen bestimmt ist, welches jedoch auch ohne Zweifel bei Abweichung von derselben noch *sehr gut* erfüllt werden kann, ist es, was Aschenborn dermassen *ausser* Augen setzt, dass im weitern Fortschritt der Faden der Not-

wendigkeit verloren gehen, die Fähigkeit sichern Schliessens unentwickelt bleiben muss. Er sorgt mit grosser Umsicht dafür, dass nichts fehlt, stellt die Sätze positiv und negativ, neben der Gleichheit die Ungleichheit auf. Wieviel aber notwendig ist, lernt man nur in der einen Frage: Welche Grössen müssen bekannt sein, um die übrigen daraus zu berechnen?

Da an Gebrauch auf Gymnasien schon darum niemand denken kann, weil diesen nicht die der grossen Ausführlichkeit entsprechende Zeit zur Verfügung steht, bei technischen Lehranstalten die Notorität jede Empfehlung überflüssig macht, so ist nur in Betreff der auf dem Titel erklärten Bestimmung zum Selbstunterricht zu bemerken, dass letztere nur für Solche gelten kann, denen es auf Aneignung des in reichlichem Masse Gegebenen ankommt, die eben nicht weiter forschen wollen. Diese werden den Weg zum Verständniss in erwünschtester Weise geebnet finden. Hoppe.

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Masses. Ein Lehrbuch von Dr. Oskar Schlömilch, Kgl. Sächs. Geh. Hofrath und Professor am Kgl. Sächs. Polytechnicum. Erster Theil: Planimetrie und ebene Trigonometrie. Fünfte Auflage. — Zweiter Theil: Geometrie des Raumes. Dritte Auflage. — Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Eisenach (Jahrg. fehlt). J. Bacmeister. 254 und 266 S.

Für welcherlei Leser das Buch eigentlich bestimmt sei, ist aus dem Inhalte schwer zu erkennen. Es behandelt mit grosser Ausführlichkeit diejenigen Seiten der Geometrie, welche in die Augen fallen, ohne diejenigen zu berühren, welche mehr zu denken geben. Man könnte darum geneigt sein es als Anschauungsunterricht für minder entwickelte Schüler anzusehen. Dem widerspricht jedoch stellenweise die Anwendung längerer Rechnungen ohne alle didaktische Vorbereitung. Halten wir uns daher an die Angaben des Titels, so ist die Benennung „Geometrie des Masses" kaum ein unterscheidendes Merkmal, man müsste sie denn der Geometrie der Lage entgegensetzen wollen. Auf das Messen im engsten Sinne beschränkt sich das Lehrbuch nicht, es ist eben nur äusserst karg in der Explication derjenigen Lehren, welche indirect, aber darum nicht minder zur Bestimmung von Grössenverhältnissen befähigen. Was aber die Bezeichnung „wissenschaftliche Darstellung" betrifft, so dürfte es wol selbst im Vergleich mit vielen Lehrbüchern, die aus pädagogischen Gründen um der Leichtfasslichkeit willen die Strenge nicht urgiren, dafür nur „unwissenschaftliche Darstellung" heissen. Um den Mangel zuerst im *ganzen auszudrücken*, so ist es eine hervortretende Eigen-

tümlichkeit, dass die Anschauungen nie zu fest normirten Begriffen hingeführt werden, wie es unbestritten jede exacte Wissenschaft verlangt. Zwei Trugschlüsse mögen beispielsweise angeführt sein. Der Winkel wird Differenz der Richtungen zweier Geraden genannt; da hiernach die correspondirenden Winkel an Parallelen Differenzen gleicher Richtungen sind, so folgert der Verfasser, man sei „berechtigt" den Satz auszusprechen: Correspondirende Winkel sind einander gleich. Also aus dem Namen soll die Tatsache folgen! In Wirklichkeit steht die Sache umgekehrt: wir sind berechtigt den Winkel die Differenz der Richtungen zu nennen, wenn wir wissen, dass diese Bezeichnung mit den aus dem Begriff der Differenz hervorgehenden Folgerungen im Einklang ist; insbesondere wird also die Berechtigung dadurch bedingt, dass gleiche Richtungen gleiche Winkel bilden, dessen Nachweis wir zunächst schuldig bleiben. Der Verfasser verleugnet oder ignorirt mit seiner Aufstellung die Anstrengungen von Jahrhunderten, was mit der wissenschaftlichen Wahrhaftigkeit doch in zu starkem Widerspruch steht. Zweitens wird nach Kettenbruchentwickelung des Verhältnisses zweier beliebigen Geraden behauptet, wir besässen daran ein Kriterium der Commensurabilität, während in Wirklichkeit doch nur eine Frage auf eine neue zurückgeführt ist. Ueber den Sinn des Verhältnisses incommensurabler Linien lässt das Lehrbuch den Leser ganz im Stich. Wie in diesem Falle ist das Verfahren überall. Alles was wissenschaftliche Untersuchung und wissenschaftliches Urteil erfordert hätte, wird stillschweigend übergangen; nur was man an der Figur sehen oder algebraisch ausrechnen kann, wird discutirt. Hoppe.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Distanzen- und Höhen-Messung. Formeln und Tabellen behufs Aufnahme und Höhenbestimmung. Von H. Stück, Ober-Geometer. Hamburg 1873. Otto Meissner. 143 S.

Diese Tafeln sind für die Vermessung eines Terrains mit steilen Abhängen bestimmt. Die Methode, welche zur Aufnahme des Hamburger Gebiets und Darstellung desselben in äquidistanten Niveaulinien in Anwendung gebracht worden ist, findet sich im Anfang des Buchs beschrieben. Von einem Standorte des Instruments, welches aus einem vertical drehbaren Fernrohr verbunden mit einem Theodoliten und mit einem, je nach der grössern oder geringern Visirweite verschiebbaren Fadenkreuz (drei horizontale Fäden über einen verticalen) versehen besteht, werden die Horizontal- und Verticalwinkel und die Distanzen von zwei Orten gemessen, letztere durch den Ab-

schnitt auf einer vertical aufgestellten Latte, welcher zwischen zwei Fäden gesehen wird. Die Einleitung giebt dann weiter die Entwickelung der Reductionsformeln, die Bestimmung der Constantenwerte aus einer Anzahl Beobachtungen, die Anordnungen der Operationen im Felde und das Eintragen der Höhenpunkte in die Karten. Die Tafeln geben für 200 Lattenabschnitte und für Elevationswinkel von 5 zu 5 Minuten bis 30 Grad die Distanzen und die Differenzen der Tangenten. Die logarithmische Rechnung ist hier als unvorteilhaft beseitigt.

Hoppe.

Astronomie und Meteorologie.

Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. Von H. W. Dove, Mitgl. d. Akad. v. Amsterdam, Berlin, Boston, Brüssel, Dublin, Genf, Göttingen, d. Leopoldina, v. London, Moscau, München, Petersburg, Prag, Upsala, Wien u. s. w. Mit Holzschnitten und zwei Karten. Vierte vermehrte Auflage. Berlin 1873. Dietrich Reimer. 365 S.

Die erste Hälfte des Buchs handelt von den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. Es werden zuerst die möglichen Windformen aufgestellt, dann nach einander die vorgefundenen Windarten nach Ort, Zeit und Charakter geordnet durchgegangen, zuerst als beständige Winde der untere und obere Passat, dann als jährlich periodische Winde der Indische Monsoon, die Westmonsoons der Linie, die Seitenablenkung des Passats an der Küste von Afrika und die subtropischen Winde, dann die veränderlichen Winde, in welchen der Polar- und Aequatorialstrom und das Drehungsgesetz als Regelmässigkeiten auftreten. Die Darstellung ist eine nur lose verknüpfte: nach kurzer Beschreibung und Erklärung verweilt sie bis zum Ende bei tatsächlichen Angaben, welche dann auf die vorausgehende Disposition nicht mehr reflectiren. Dennoch kann man nicht den Wert des Werks allein nach diesen Einzelheiten messen. Man vermisst zwar in allen Stücken die exacte Durchführung, aber zur wissenschaftlichen Behandlung ist von allen Seiten ein Anfang gegeben, der sich verfolgen und fruchtbar machen lässt. Insbesondere ist die von Veränderungen und Ursachen isolirte Auffassung des Bewegungszustands wenigstens anfänglich in Angriff genommen, wenn gleich auf einer etwas niedrigen Stufe der Ausbildung gelassen und dem Folgenden, wo Zustand und Ursache noch zu sehr in einander fliessen, nicht weiter zu Grunde gelegt. In ähnlicher Weise wird dann die Erscheinung der Stürme behandelt, anknüpfend an die Bemerkung, dass den Stürmen immer ein ungewöhnlich niedriger Atmosphären-

druck vorhergeht. Ein anderes kann nach allem wol nicht mit dem Gesetz der Stürme gemeint sein. Die sich daran schliessenden tatsächlichen Angaben sind als dessen Bestätigungen aufgestellt. Einzeln durchgegangen werden die Wirbelstürme der heissen Zone, die an der äussern Grenze des Passats entstehenden Stürme der gemässigten Zone, die Sausstürme, die Stürme durch seitliche Einwirkung entgegengesetzter Ströme. Beigegeben sind 6 Karten, welche die behandelten localen Sturmformen darstellen, und eine grössere für den Sturm vom 20. Januar 1863 nebst Nachweis. Hoppe.

Vermischte Schriften. Teile von Zeitschriften.

Annali di matematica pura ed applicata. Diretti da F. Brioschi e L. Cremona. Serie II. Tomo V. Milano. Giuseppe Bernardoni.

Das 3. Heft vollendet den Aufsatz von Noether, sulle curve multiple di superficie algebraiche, und enthält weiter: Schläfli, nota alla memoria del Sig. Beltrami „sulli spazii di curvatura costante" — Beltrami, osservazione sulla precedente memoria — Schläfli, sopra un teorema di Jacobi recato a forma piu generale ed applicato alla funzione cilindrica — Codazzi, sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio (memoria 5ª) — Gundelfinger, intorno ad alcune formole della teoria delle curve di secondo e di terzo ordine — Combescure, sur quelques problèmes relatifs à deux séries de surfaces — Aoust, théorie des coordonnées curvilignes quelconques (troisième partie).

Das 4. Heft beendigt den Aufsatz von Aoust und enthält: Schläfli, Quand' è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? — Siacci, intorno ad alcune trasformazioni die determinanti — Dini, sulla integrazione della equazione $\Delta^2 u = 0$.

Litterarischer Bericht

CCXXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VI. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1873.

Das Juniheft enthält eine Abhandlung von C. Am. Sedillot über den Ursprung der planetarischen Woche, und Platon's Spirale; dann ein Verzeichniss der neu erschienenen Schriften. Das Juliheft enthält einen Bericht über die Mathematik in Belgien im Jahr 1872 von Dr. P. Mansion, Professor an der Universität Gent, bestehend in Mitteilung aus den einzelnen Arbeiten in der reinen Analysis, Geometrie und Mechanik nebst darauf bezüglichen litterarischen Notizen.

H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Die Determinanten nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt von Dr. H. Dölp, ordentl. Professor am Grossh. Polytechnikum zu Darmstadt. Darmstadt 1874. Ludwig Brill. 94 S.

Nachdem die Einführung der Determinantenrechnung in den Schulunterricht von vielen Seiten befürwortet, und von einzelnen Lehrern bereits vollzogen worden ist, kann über das Bedürfniss eines für diesen Zweck bearbeiteten Lehrbuchs kein Zweifel sein. Gegen die Einführung kann man geltend machen, dass die Theorie, obwol sie keine hohen Vorkenntnisse zum Verständniss erfordert, doch bei rei-

ferer Ausbildung leichter erlernt wird, dass daher das Studium selbst durch ein frühzeitiges Betreiben keinen rechten Gewinn hat. Auch betrachtet es der Verfasser als weniger bedeutend, ob die akademischen Studien damit beginnen, oder der mathematische Unterricht in der Schule damit abschliessen solle. Fasst man aber die Frage so auf: Enthält die Theorie ein bildendes Element und steht sie in guter Verbindung mit andern Unterrichtszweigen? — so bietet sich die bejahende Antwort augenfällig genug dar. Das bildende Element ist die systematische Ordnung, für welche die glänzenden, leicht zu erringenden Erfolge der Determinantentheorie den Sinn zu wecken ohne Gleichen geeignet sind, eine Sinnesrichtung die unstreitig die notwendigste Bedingung alles erfolgreichen Treibens der Mathematik ist. In engster Verbindung aber steht die Theorie mit der Combinationslehre, welche man geradezu als Vorbereitung zur Determinantenlehre behandeln, und der man so die sonst sehr mangelnde Nutzanwendung geben könnte.

Es handelt sich nun um die Frage, wie die Methode gestaltet werden müsse, damit sie zum Schulunterricht passe. Ueber den Umfang des dahin gehörigen Lehrstoffs kann man nicht wol sehr verschiedener Meinung sein. Es gibt einen nicht zu verfehlenden Kreis von einfachen Sätzen, Schlussweisen und Operationen, mit welchen der Anfänger bald vertraut wird, und zu deren Anwendung sich unzählige mal Gelegenheit bietet. Das Bildungsgesetz, die Entwickelung nach Unterdeterminanten, die Vertauschung der Reihen, die gleichen Reihen, der Reihenfactor, die Addition und Zerlegung, die Auflösung linearer Gleichnngen und Elimination machen den Inhalt des elementaren Teiles der Determinantenlehre aus; die darauf bezüglichen Sätze folgen der Reihe nach aus einander ohne alle umständliche Betrachtung, mit jedem Schluss einer. Diese einfache Methode brauchte nicht erst gesucht zu werden, da die ersten wissenschaftlichen Bearbeitungen sie schon befolgen. Die vorliegende Bearbeitung überschritt die genannten Grenzen um ein kleines durch Hinzufügung einiger Themata: das Differenzenproduct, die Multiplication der Determinanten und die adjungirten Determinanten. Da diese gleichfalls mitunter Anwendung gestatten, das zweite noch besondere Wichtigkeit hat, so ist es nur zu billigen, dass auf höhere Ansprüche einige Rücksicht genommen ist; nur hätte das Differenzenproduct nicht sollen im Anfang stehen, wo es durch bedeutende Vermehrung der Betrachtungsobjecte das Lernen sehr erschwert. Zur Deduction der Sätze ist es ganz überflüssig.

Was aber diese Deduction der einzelnen Sätze betrifft, so ist die Wahl des Verfahrens die unglücklichste, die sich denken lässt. Statt

sogleich die einfache Schlussweise zu enthüllen, werden ermüdende Specialbetrachtungen vorausgeschickt, welche schliesslich das Resultat doch nicht evident machen. Der Schüler muss glauben, darauf beruhe der logische Zusammenhang; er wird aber nur in ein unabsehbares Feld von Rechnungen geführt, ohne den Geist der Theorie, welcher ihn dasselbe zu beherrschen befähigt, kennen zu lernen. Weiterhin, wo die Erklärungen gerade bei wachsendem Bedürfniss immer kärglicher werden, findet er sich ganz im Stiche gelassen. Was dem Verfasser zu einem solchen Zuwerkegehen verleitet hat, ist vermutlich (Behauptung liegt fern) die irrige Ansicht, eine elementare Darstellung müsse sich der Gewohnheit der Schüler anbequemen. Jeder wesentliche Fortschritt im Lernen ist bedingt durch die Ueberwindung einer Gewohnheit. Bei der Determinantenlehre wird nur wenig mehr gefordert als dieses; diese Bedingung aber ist unerlässlich. Man tue nur den Schritt bei einem kleinen Object, und alles ist erreicht. Der Schüler in der Algebra ist z. B. gewohn zu sagen: Um m mit $s = a + b + c$ zu multipliciren, multiplicire ich m mit a, b, c und addire die Producte. Jetzt soll er dafür sagen: Ich substituire in ms für s nach einander a, b, c und addire die Resultate. Sofort erhellt daraus der Satz von der Zerlegung einer Determinante, deren eine Reihe aus Summen besteht. Ebenso ist es bei den übrigen Sätzen. Nachdem die allgemeinen Deductionen deutlich sind, mag man, und zwar nach jedem einzelnen Satze, eine reichliche Specialanwendung nachfolgen lassen; nur soll man den Schüler nicht zu dem Irrtum verleiten, als habe er das Allgemeine aus dem Speciellen zu verstehen.

Der genannte Missgriff lässt sich im vorliegenden Lehrbuch nicht verbessern; nur eine ganz neue Bearbeitung kann dem Bedürfniss Genüge tun. Solange wir keine solche besitzen, würden sich wissenschaftliche Darstellungen, z. B. die von Brioschi (deutsch von Schellbach), wovon man nur den Anfang zu benutzen hätte, für den Schulgebrauch noch immer mehr empfehlen als die vorliegende.

H.

Geometrie.

Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, nach den Methoden der neuern Algebra (Invariantentheorie) behandelt von Hugo Rosenow, Dr. phil. Breslau 1873. Maruschke. u. Berendt. 48 S.

Die hier behandelten ebenen Curven bilden unter den Curven dritten Grades einen besonders einfachen Fall vermöge der Eigen-

schaft, dass sich die homogenen Coordinaten eines Punktes in ganzen homogenen Functionen 3. Grades zweier Parameter darstellen lassen, von welcher Form die Betrachtung auch ausgeht. Als Vorgänger in der Behandlung ihrer Theorie werden genannt: Clebsch (Crelle J. Bd. 64. p. 43.) Steiner (Bd. 53. p. 231.) Schröter (Bd. 54. p. 31. und Math. Ann. Bd. V. p. 50 und 85.) Cremona (Crelle J. Bd. 64. p. 101.) Weyr (Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde 1869.) Möbius (der barycentrische Calcul 1827. und Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1852.) Durège (Math. Ann. Bd. 1. p. 509.) Guessfeldt (Diss. inaug. Bonn 1865.) Nur letztere beiden haben einen Parameter eingeführt aber specielle Functionen zugrunde gelegt. Hierin würde demnach der Unterschied der gegenwärtigen Untersuchung zu sehen sein. Es werden untersucht die 3 Wendepunkte, die von einem Punkte ausgehenden Tangenten und die Tangenten im Doppelpunkte. Vom Vorzeichen einer Invariante hängt es ab, ob letztere imaginär oder reell sind. Beziehungsweise besteht dann die Curve aus zwei getrennten Teilen mit dem Doppelpunkt als isolirtem Punkt oder aus einem stetigen Zuge. Im Grenzfall ist der Doppelpunkt ein Rückkehr- und ein Stillstandspunkt. Ferner werden Curvenpunkte als Centra von Strahlensystemen und in Verbindung mit Kegelschnitten betrachtet. H.

Physik.

Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Von Gustav Wiedemann. Zweiter Band. Wirkungen des galvanischen Stromes in die Ferne. Erste Abtheilung: Elektrodynamik, Elektromagnetismus und Diamagnetismus. Zweite Auflage. Mit zahlreichen Holzschnitten. Braunschweig 1873. Vieweg und Sohn. 776 S.

Das Werk ist eine wissenschaftlich systematische Bearbeitung der gesammten Lehre vom Galvanismus nach ihrem gegenwärtigen Standpunkt und erfüllt die Anforderungen einer solchen in jeder Hinsicht. Die Methode ist nach allgemeinen rationalen Grundsätzen, wie sie sich im ganzen ziemlich gleichartig, im einzelnen mehr oder weniger modificirt für alle physikalischen Gegenstände ergeben müssen, den vorhandenen Resultaten angemessen. Die natürlichen Objecte der Darlegung sind die Erscheinung, die Theorie und die Bestätigung. Selten werden diese Elemente so deutlich aus einander gehalten, die Abhängigkeit jeder Aufstellung so durchsichtig erhalten wie es hier geschehen ist. Die Erscheinungen des Galvanismus sind fast ausschliesslich derartig, dass sie durch Experiment herbeigeführt werden müssen; um so mehr war es gestattet, dass dies im Anschluss an die

Theorie geschah, und demgemäss eine jede so isolirt als möglich dargestellt ward. Nun umfasst aber die Theorie ausser dem einfachen Galvanismus den Erdmagnetismus, den durch Ströme erzeugten und permanenten Magnetismus und den Diamagnetismus, welche aus gemeinsamer Hypothese erklärt werden, doch bis jetzt nicht als reine Ergebnisse mechanischer Principien aufgefasst werden können. Es entsprach daher der Sachlage, dass das Werk den genannten verschiedenartigen Erscheinungen gemäss in Hauptabschnitte geteilt, und die Darlegung jener drei Elemente an jedem besonders vollzogen ward. Die Theorie, welche in der Behandlung als das eigentliche und Hauptaugenmerk des Ganzen erscheint, ist im ersten Abscheitt nach den Arbeiten von Ampère, Liouville, Grassmann, Hankel, Reynard, Plana, Kirchhoff, Weber, Savary, Blanchet, Frost, Stefan bearbeitet, besteht auch zum Teil noch in diesen selbst. Beim Magnetismus verzweigen sich die Untersuchungsobjecte mehr und haben fernere Einteilung in successive Behandlung notwendig gemacht. Dass die mathematische Theorie von den gesammten Hülfsmitteln der Analysis Gebrauch macht, war selbstverständlich; Beschränkung auf Elementarmathematik, die sonst so häufig mit Beeinträchtigung des Zweckes gesucht wird, honnte hier am wenigsten Platz finden. H.

Compendium der Experimental-Physik nach Jamin's Petit traité de physique deutsch bearbeitet von Dr. G. Recknagel, Professor für Physik u. techn. Mechanik, Rector der königl. Industrieschule in Kaiserslautern. I. Abtheilung: Schwere. Elasticität. Mit vielen Abbildungen in Holzschnitt. Stuttgart 1874. Meyer u. Zeller.

Die folgenden Abteilungen sollen enthalten 2: Wärme. 3: Elektrostatik und Elektrodynamik. 4: Elektromagnetismus und Akustik. 5: Optik. Die Behandlungsweise der Mechanik deutet entschieden auf die Bestimmung des Compendiums für die Schulen. Es nimmt weder höhere mathematische Kenntnisse in Anspruch, noch ist es dazu gemacht, den Anforderungen eines wissenschaftlichen Studiums zu genügen. In jener Eigenschaft aber besitzt es Vorzüge, die nicht gering anzuschlagen sind: die Methode ist durchweg instructiv, gut erwogen ohne Beengung durch gewohnte Gleise der Darstellung, und den Zweck des Hinleitens zur exacten Auffassung consequent im Auge behaltend. Es mag dies grossenteils eine Frucht des Hinzutretens deutscher Gründlichkeit zu französischer Originalität sein. Was aber die Zutat der Gründlichkeit betrifft, so bleibt noch viel zu wünschen übrig. Gleich im Anfang steht der falsche Satz: „Der Bewegungszustand eines Körpers ist durch zwei Merkmale bestimmt: Richtung und Geschwindigkeit". War es so schwer, denselben in aller Kürze exact

auszudrücken? Doch dies ist nur ein formeller Fehler. Mehr irreleitend ist S. 16. die Aussage: das Geschoss stände unter dem Einflusse zweier Bewegungsursachen. Dass nach dem Abschiessen nur eine einzige, die Schwere, wirksam ist, welche den Bewegungszustand beständig ändert, dass man für unveränderte Dauer des Bewegungszustandes keine Ursache zu suchen hat, war die für den Anfänger so wichtige Bemerkung, die hier in das Gegenteil verkehrt wird. Ein ganz sachlicher Fehler aber wird S. 31. bei Erklärung der Centrifugalkraft begangen, welche dem vulgären Irrtum gemäss für eine wirkliche Kraft statt für eine Rechnungsgrösse ausgegeben wird. Der Verfasser trägt den falschen Schluss vor ohne ihn zu berichtigen: „Da der Faden gespannt ist, so schliessen wir, dass der Körper am andern Ende mit einer gleich grossen entgegengesetzten Kraft zieht“. Er vergisst hier, dass sich die Kräfte nicht aufheben dürfen, wenn der im Kreise geführte Körper aus der Tangentialrichung abgelenkt werden soll. Da die Ablenkung genau der Spannung des Fadens entspricht, so war im Gegenteil zu schliessen, dass die vermeintliche Wirkung der Centrifugalkraft null sein muss.

Der Titel „Experimental-Physik“ muss in sehr weitem Sinne genommen werden. Viele Versuche sind nebst den dazu notwendigen Apparaten beschrieben, gut ausgewählt und benutzt; andere, die sich aus freier Hand machen lassen, sind nicht weniger dem Zwecke entsprechend. Hierzu kommen jedoch auch Beobachtungen, die nicht in der Schule, oder überhaupt nicht angestellt werden können; die blosse Vorstellung des Vorgangs muss dann die Stelle des Versuchs vertreten. Offenbar kam es dem Verfasser darauf an, seine Methode auf die Entwickelung der gesammten Theorie anwenden zu können. In deren Ausdehnung ist er dann wol etwas weiter gegangen als nötig: die gesonderte Behandlung der Schwere verlangte kein Eingehen auf die kosmische Attraction. Statt dessen hätte wol etwas mehr geschehen können, die systematische Ordnung der Bestandteile der Theorie, welche, wie es bei Ableitung aus lauter Versuchen kaum anders sein kann, etwas buntgemischt auftreten, wenigstens nachträglich herzustellen.

H.

Das im 217. litt. Bericht besprochene Lehrbuch der ebenen Geometrie von Dr. Th. Spieker ist in achter Auflage erschienen. Ausser der Umstellung eines Satzes ist zu erwähnen, dass kleine Lücken des Systems ausgefüllt, das heuristische Material durch einzelne Bemerkungen und neue Aufgaben verstärkt worden ist.

Im Interesse an der Lebensgesichte Kepler's wird folgende, kürzlich mitgeteilte Entdeckung gewiss Manchem willkommen sein.

M. Johann Kepler's Heiratsbrief von 1597.

(Angezeigt von Dr. R. Peinlich.)

Einem glücklichen Zufalle und einem archivalisch geübten Blicke verdankt die vaterländische Geschichte die kürzlich vorgekommene Auffindung einer höchst interessanten Reliquie, nämlich eines Bruchstückes vom Heiratsbriefe (Originalurkunde) des weltberühmten Mathematikers J. Kepler, welcher 1597 bei Gelegenheit seiner Vermählung mit der Witwe des landschaftlichen Bauschreibers Marx Müller ausgestellt wurde.

Der Chorherr und Archivar des Stiftes Vorau, Ottokar Kernstock, fand diese werthvolle Reliquie in der Bibliothek seines Stiftes als Einbanddecke eines Büchleins, betitelt: „Nomenclator Hadriani Junii medici“ (Augsburg, Mich. Manger, 1592), und übergab dieselbe mit Genehmigung seines Stiftsvorstandes dem Landesarchive in Graz.

Das Deckelblatt ist Pergament, ungefähr 25 Cm. hoch und 15·5 bis 17 Cm. breit. Es wurde durch seine Verwendung zum Büchereinbande an manchen Stellen beschädigt und lässt auch die Schrift an einzelner Stelle gar nicht mehr, an anderen nur schwer erkennen. Von der Urkunde ist über die vordere Hälfte noch etwa ein Siebentel weggeschnitten.

Der k. k. Universitäts-Professor Dr. Arnold Ritter v. Luschin unterzog sich mit dem schönsten Erfolge der mühevollen Arbeit, durch Combination mit ähnlichen Urkunden des 16. Jahrhunderts den fehlenden Text zu ergänzen.

Da Kepler Steiermark bereits im September 1600 mit Frau und Kindern verliess und später nur vorübergehend 1601 und 1605, und seine Frau 1603, nach Graz kam, um die Regelung ihrer finanziellen Verhältnisse, nämlich die Ausfolgung des väterlichen Erbtheiles der Frau und die Erlassung des den Exulanten abverlangten zehnten Pfennigs von den Gütern derselben zu betreiben, wobei dieser Heiratsbrief nichts zur Sache hatte, so lässt sich das Verbleiben dieser Urkunde im Lande durch die Annahme erklären, dass sie sich bei seinem Schwiegervater Jobst Müller zu Mühleck befand.

Wir lassen beides, den Rest der Originalurkunde und die Ergänzung von einander geschieden, folgen und bemerken nur, dass Zeile für Zeile von Seite 172 auf 173 hinüber zu lesen ist.

Ergänzung.

'ch M.(agister) Johannes Kepler, einer er:(samen) la:(andschaft)
nich vnd auch für all mein erben, dass ich meiner lieben hauswi
chaft pauschreiber witib gegeben und gemacht han zu einer widerlag ihres hey
zig kreuczer oder funfzehen paczen guter landeswerung in Steyer- gerecht
hundert gulden Reinisch bringt, secz ich meiner lieben frau all mein hab sie sei
uetrug, dass ich vor meiner lieben wirtin frauen Barbara an leibserben
vierhundert guldein Reinisch heiratguett und widerlag meiner lieben wirtin gefal
alsdann aus ihrer ersten ehe, mit weiland N. Lorencz noch vorhand
Regina Lorenczin, vnd aber auch die fahrnuss die ich bei meinen lebzeite
tail getailt werden, meiner lieben hauswirtin frauen Barbara und meinen
Lorenczin aigenthumblich haimbfallen vnd verbleiben, ausgenomen leibskleide
lieben hausfrauen Barbara allerdings freylediglich haimbfallen vnd unwiderrufflich ver
Doch da mir oft ermelte mein liebe hausfrau uber solch mein empfangen heiratsgu
notwendiger, genuegsamber verschreibung versehen, auf das sy oder ir erben sich de
nach meinem todtlichen abgang an all mein gelassen hab vud guet halten muge vnd an
meinen schadenpundt im lande Steyer, als ob desselben clauseln, punct vnd a
diesen heyratbrieff mit meiner handtschrift und betschafft verfertigt, auch zu merer bekräf
und Adamen Nidnaus beede burger in Gracz, fleissiglichen erpeten, das sie zusamt mir i
iren nachkomen und allen iren erben an schaden. Der brief ist geben ze Gracz nach Chri
den **27.** *tag des monats Aprilis.*

M. Johan Kepter m. p.

L. S.

Anmerkung. Die Ergänzung wurde mit Rücksicht auf die bekannten Daten aus Kepler's Leben und (so mit Benützung gleichzeitiger Urkunden und Formelbücher vorgenommen. Dem in der Kepler-Lit kannten Herrn Vereinsvorstande Dr. R. Peinlich verdanke ich die Nachricht, dass Hans Ni und Rathsverwandter in Graz war, welcher mit Kepler auch noch in späterer Zeit in vertrauter licher Beztehung stand, daher dieser im Jahre 1601 durch die Zeit seines mehrmonatlichen Be Hauptstadt in seinem Hause wohnte (nach einem Briefe Kepler's aus Graz, d. 30. Mai 1601 an Prag); wie auch Nidenaus noch 1607 der Regina Lorentzin 1000 fl. schuldete. (Frisch, Keple S. 777) und dass ein Adam Nyednaus am 2. Aug. 1600 unter den Grazer Vorstadtbürgern ers ihre Rückkehr zur katholischen Kirche mit Handschrift und Petschaft zur selben Zeit versprach wegen der Gegenreformation die Steiermark verliess. (H. H. u. Staats-Archiv zu Wien, I. Steierm. V, Fasc. 1590—1618). Actenauszüge, welche mir gleichzeitig der Herr Vereins-Schriftfü

Original.

eyer mathematicus, bekhenn hiemit für
en Barbara weilendt Marxen Müllers wolermeldter lanndt-
enänntlichen zwayhundert gulden Reinisch, jeden derselben zu sech-
umb solch heyratguett vnd widerlag so in ainer summa vier-
verfangne, oder frey verfallene alles mit der beschaidenheit, ob sich
weliches alles in gottes gnädigen willen steet,) so sollen berüerte
ist abgeredt vnd beschlossen worden, das in der ihenigen fahrnuss weliche
fall gleich halber thaill irer in dero ersten ehe erzeugten tochter namens
möcht, solle für ain fahrnuss geschätzt, vnd widerumb in zwen gleiche
bnen zugleich; da aber dern khaine vorhanden, alsdan mergemeldter Regina
vnd was zur mannswehr gehört vnd genennt wirdt, also auch ir meiner
was ihro von mir oder andern an yeczo oder khunfftig geschenckht wurde
mehrers wurde zuebringen, daruber *soll vnd will ich sie jederzeit* mit
ter so wol vmb ir heyrath, vermacht, als vmb ir mehrers zuebringen
nit schuldig sein solle. Alles treulich vnd pei verpindung des allge-
nen geschriben waren, ongeuerde. Des zue wahrem vrkund hab ich

Sebastian Speidl ainer er: la: in Steyer einnemer, Hannsen Nidnaus

dterschriben vnd auch ire bettschaft hieran gehangen haben; doch inen
tausent fünfhundert siebenunndneunzigisten jar

Speidl m. p.
Nidnaus m. p. **Hanns Nidnaus** m. p.

(L.S.) **(L.S.)**

Widmanstetter zur Verfügung stellte, ergeben, dass entweder nebst dem Rathsbürger und Handelsmann Hans Nidenaus gleichzeitig noch ein anderer, ganz gleichen Namens, bei der i. ö. Kammerbuchhaltung in Graz (seit 1575) 1586 als Raitdiener, 1599 als Adjunct und 1607 als Amtsverwalter bedienstet war, oder was nicht unwahrscheinlich ist, dass beide identisch sind. Sebastian Speidl ist ein Bruder des berühmteren Stefan Speidl zu Vattersdorf (Liebenau), landschaftlichen Secretärs, von welch' letzterem ein noch heute in Bayern blühendes Freiherrengeschlecht abstammt. Die Unterschrift Kepler's wurde seinen Gehaltsquittungen aus den J. 1597|8 entnommen, deren Originale das steierm Landesarchiv gleich dem Heiratsbriefe verwahrt. Das Wort „verfallene“ in der 5. Zeile v. o. ist übergeschrieben und das darunter stehende „aigne“ durchstrichen. Luschin.



Litterarischer Bericht

CCXXIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VI. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche 1873.

Das Augustheft enthält die Abhandlung des Dr. Sigmund Günther: „Die historische Entwickelung der Theorie der Sternpolygone im Altertum und im Mittelalter“ ins Italienische übersetzt von Dr. Alfonso Sparagna; ferner Noten von B. Boncompagni zu einer Stelle der Geometrie des Boetius bezüglich auf das Sternfünfeck. Die erstere Abhandlung ist von Boncompagni besonders herausgegeben. — Das Septemberheft enthält ein Referat von P. Mansion über den ersten Teil von Cours d'analyse de l'école polytechnique. Par M. Ch. Hermite, membre de l'institut, professeur à l'école polytechnique et à la faculté des sciences. H.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, im Verein mit andern Mathematikern herausgegeben von Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin. Dritter Band. Jahrgang 1871 in 3 Heften. Berlin 1874. G. Reimer. 588 S.

Der kürzlich erschienene dritte Jahrgang ist in ganz gleicher Weise bearbeitet wie der zweite, über welchen im litt. Ber. 219. einiges gesagt ist. Titel ohne Referate kommen noch weniger vor.

H.

Bibliografija pismiennictwa polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastósowań. Na obchod czterechsetletniéj rocznicy urodzin Kopernika. Nakładem właściciela Biblioteki kórnickiéj, przewodniczącego w towarzystwie nauk ścisłych w Paryżu, napisana i wydana przez Dra Teofila Żebrawskiego Człon. Akad. Krak. W Krakowie w drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem K. Mańkowskiego 1873. — gr. 8°. 1. Blatt, III u. 618 SS., 4 Tf. Abb.

Die vorliegende polnisch-mathematisch-physikalische Bibliographie von Theophil Żebrawski verzeichnet 2640 Schriften u. dergl. In den Kreis der aufzunehmenden Bücher sind aber eine solche Menge von Sachen hineingezogen, die füglich nicht hineingehören, dass sich die Zahl wohl bedeutend vermindern würde, wollte man alle die betreffenden Bücher ausmerzen. Wie dickleibig würde wohl eine deutsche mathematische Bibliographie werden, wenn wir jeden beliebigen Kalender als mathematisches Werk aufführen wollten, statt uns auf die wirklich zu astronomischen Zwecken edirten zu beschränken? Wird ein Werk, wie z. B. des Ptolemäus Geographie, dadurch zu einem polnischen Werke, dass darin auch von Sarmatien gehandelt wird, so dass sämmtliche Ausgaben des Buches, jede mit fortlaufender Nummer, als Bestandteil der polnischen Literatur aufgeführt werden? Hat ein Pole irgendwo das Werk irgend Jemandes abgeschrieben, so ist die betreffende Handschrift eine polnische Handschrift, mag nun der wirkliche Verfasser ein Italiener, Deutscher oder sonst wer sein. Dass Arbeiten über polnische Schriftsteller an betreffender Stelle aufgeführt werden, hat seine Berechtigung; auch darüber wollen wir kein Wort verlieren, dass der Begriff Polen im weitesten Sinne genommen wird, und dass also ein gut Teil jetzt völlig deutscher Länder als polnisch herhalten müssen, und es dem Verfasser nicht selten geschieht, dass er deutsche Schriften als polnische aufführt, weil dieselben z. B. in Danzig erschienen sind.

Die Anordnung ist nach Jahrhunderten, so dass die Zugehörigkeit einer bestimmten Persönlichkeit zu einem bestimmten Jahrhundert sowohl seinem Werke, als den über ihn handelnden Schriften den Platz anweist. Am Ende ist ein *Index Nominum* angehängt; eine systematische Uebersicht sucht man vergebens, und dies ist ein Hauptmangel der Arbeit, deren Angaben sonst vollkommenes Vertrauen verdienen, da sie zum grössten Teile auf Autopsie beruhen. Es ist in dem Werke zum ersten Male der Versuch einer *Bibliographia Copernicana* gemacht, die freilich bei Weitem nicht vollständig ist, nicht einmal die Ausgaben vollständig enthält, denn 1640 ist von der Müller'schen Ausgabe eine neue Titelauflage gemacht worden, wo

der z. B. ein Exemplar auf der Dresdner königl. Bibliothek sich befindet. Die Bibliographie liefert für die Streitfrage der Nationalität des Copernicus übrigens, ohne es zu wollen, einen wichtigen Beitrag. Mit Recht haben die Biographen des Copernicus auf deutscher Seite betont, dass man wohl Schriften des Copernicus in deutscher Sprache, nicht aber in polnischer besitze; dagegen war das Argument der Polen immer das, es hätte zu des Copernicus Zeiten Polnisch als Schriftsprache noch nicht existirt, Copernicus habe also überhaupt polnisch nicht schreiben können. Wie hinfällig dieses Argument ist, zeigt die *Bibliografija* schlagend, denn sie giebt unter Nr. 377 folgenden Titel eines Werkes aus dem Jahre 1538: *Algoritmus: To jesth nauka Liczby: Polką rzeczą wydana: Przez Kxiędza Tomasza Kłosa etc. Cracovię ex Officina Ungleriana* 1538, unter Nr. 378 eine Neuausgabe desselben Werkes aus demselben Jahre und unter Nr. 579 den Titel: *Przezrzenie Przygód swiatskich z biegów Niebieskich obaczone. Na Rok Bozy* 1544. *Przez Mistrza Piotra z Proboszczowicz etc.* Wenn also zu Lebzeiten des Copernicus mathematische Bücher in polnischer Sprache gedruckt sind, wie jetzt sicher feststeht, so muss doch unbestreitbar damals Polnisch Schriftsprache, ja schon längere Zeit Schriftsprache gewesen sei, da wohl kaum mit einer so abstracten Sache, wie Mathematik, der erste Versuch zu einer Schriftsprache gemacht sein dürfte. Dass übrigens Polnisch schon viel früher schriftlich fixirt ist, zeigt unser Werk ebenfalls, denn der *Computus manualis* von 1451 (Nr. 88 der *Bibliografija*) endigt mit einem polnisch geschriebenen Distychon:

„*Duch krzysz lucia po popyelczu szroda pyywa*
Ossada moya myla swathe dny wyedzecz ma."

Die vier angehängten Tafeln enthalten unter I und II Initialen aus Handschriften, unter Nr. III Wasserzeichen des Papieres der Handschriften und Buchdruckersignete, endlich unter Nr. IV Facsimile des Titelblattes der „Practica deutsch Magistri Johannis von Krakaw auf das Jahr tautenth funf hundert vnd . iij.".

Thorn, 2. Januar 1874. M. Curtze.

Biblioteca Matematica Italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX, compilate dal Dott. Ing. Pietro Riccardi etc. Modena 1870—72, *fascicolo* 1°—4°. XXIX S., 3 Blatt, Sp. 1—96; Sp. 97—256; Sp. 257—432; Sp. 433—656, 2 Blatt und Sp. 1—16.

Die vorliegenden vier Hefte der *Biblioteca Matematica Ita-*

liana, welche den ersten Band des ersten Teiles, der alphabetisch nach den Autoren geordnet ist, sowie einen Teil des Nachtrags enthalten, bilden einen höchst wertvollen Beitrag zur mathematischen Bibliographie. Es wäre wohl zu wünschen, dass jede Nation einer ähnlichen sich erfreue. Man sieht, mit welcher Liebe der Verfasser seine Aufgabe erfasst, mit welcher Treue er dieselbe durchgeführt hat. Auf seine Arbeit könnte man mit Recht jene Lobsprüche anwenden, welche, wie ich früher in diesen Blättern mitteilte, Herr A. Erlecke seiner nichts weniger als exacten und brauchbaren Arbeit selbst spendet.

Der bis jetzt erschienene erste Band des ersten Teiles umfasst die Werke von *Abaco* bis *Kirchoffer di Kirchoffen veronese*. Der zweite Band wird die Werke von *L* bis *Z* bringen, der zweite Teil dann eine systematische Uebersicht der jetzt nur alphabetisch aufgeführten Werke. Der *Appendice* enthält ausser einer Druckfehlersammlung noch *Correzioni di Aggiunti*, die aber noch nicht zum Abschluss gelangt sind.

Die Einrichtung des Buches ist folgende. Zunächst steht der Name des Verfassers, dessen Werke aufgezählt werden sollen, mit Angabe des Geburtsortes und der Lebenszeit, soweit sie mit Sicherheit angegeben werden kann. Dann folgt in kleinerer Schrift die Angabe der Literatur über den Autor, darauf in grösserer Schrift die Aufzählung der einzelnen Werke von 1 an numerirt. Verschiedene Ausgaben werden durch Indices, wie 1_1, 2_2 unterschieden. Unter jedem einzelnen Werke ist die genauere bibliographische Angabe, sowie, wenn nöthig, kurze Mitteilung über den Inhalt des betreffenden Werks in kleiner Schrift abgedruckt. Als Beispiele der Reichhaltigkeit wählen wir zwei berühmte Namen: *Cardano* und *Galilei*. Der Artikel *Cardano Girolamo, milanese nato a Pavia*, 1501—1566 umfasst Spalte 248—260; der Artikel *Galilei Galileo, da Pisa*, 1564—1642 erstreckt sich von Spalte 503—565. Von den in Zeitschriften erschienenen Schriften eines Autors ist stets in dem Artikel, der ihm gewidmet ist, gehandelt, mit Angabe, wo die Abhandlung erschien; die betreffende Sammlung ist jedoch unter ihrem Stichwort an gehöriger Stelle, aber ohne Inhaltsangabe aufgeführt.

Wir können dem verdienten Verfasser nur wünschen, dass er sein Werk in solcher Weise fortführen möge bis an das glückliche Ende, und dass ihm noch fernere Musse bleiben möge, auch das neunzehnte Jahrhundert in ähnlicher Weise zu behandeln. Das Buch dürfte leider bald zu den Seltenheiten der Literatur gehören, da es nur in 250 *Exemplaren* gedruckt ist.

Thorn, 2. Januar 1874. M. Curtze.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Von Dr. Karl Heinrich Liersemann. Leipzig 1871. B. G. Teubner. 174 S.

Nach Angabe im Vorwort hat sich der Verfasser bei Bearbeitung des Lehrbuchs streng systematische Anordnung des Stoffes zum Ziel genommen. Dieser Gesichtspunkt ist denn auch unverkennbar als höchste Norm, und man darf sagen mit Glück zur Durchführung gelangt. In der dazu gewählten Form und Methode ist der Verfasser grossenteils selbständig productiv zu Werke gegangen. Ueber die Berechtigung der getroffenen Wahl lässt sich streiten, und wird wol die Billigung schwerlich eine ungeteilte sein; doch ist dieselbe zu sehr auf Umsicht und richtige Auffassung gegründet, als dass sie sich sofort von der Hand weisen liesse. Die erste wesentliche Abweichung vom Gewöhnlichen deutet der Verfasser mit den Worten an: er habe die in mehreren Lehrbüchern an die Spitze gestellten allgemeinen Grundsätze als unnützen Ballast über Bord geworfen. Statt derselben beginnt das Werk mit „einleitenden und allgemeinen Bemerkungen". In ihnen sind — das erscheint als ihre eigentliche und Hauptbedeutung — die Motive und Gesichtspunkte der theoretisch didaktischen Massnahmen dargelegt, d. h. es wird dem Schüler ein Verständniss eröffnet, warum man so und nicht anders zu Werke gehen muss. Hier könnte man fragen, ob es überhaupt möglich sei, das Warum zu erklären ohne vorher oder doch gleichzeitig eingehend und speciell das Was zu erörtern. Dass gleichwol auf Grund von Begriffen und Kenntnissen, die sich selbst beim Anfänger voraussetzen lassen, das Wesentliche in der Kürze geleistet ist, wird man zugestehen können, wenn man von demjenigen Inhalte absieht, der das Notwendige überschreitet. Allerdings geht die Einleitung in Erörterung des Allgemeinen und in Aufstellung von Gesetzen etwas zu weit, und gelangt dadurch zu complicirten Sätzen und Regeln, welche der Anfänger schwerlich verstehen wird. Allein gerade diese sind es, die am wenigsten in der wissenschaftlichen Praxis wurzeln, nur um der Systematisirung willen künstlich hergestellt sind, und ohne Nachteil für das Ganze wegbleiben können. Wozu kann es z. B. dienen, in einer Progression von 3 Gliedern (den 3 directen Rechnungsarten) schon ein umfassendes Gesetz zu bezeichnen, an welches man bei der Praxis nie zu denken Anlass hat? Hier wird das Einzelne leichter einzeln verstanden. Dass dies geschieht, dass die Gesetzmässigkeit, Analogie und Parallelität zum Bewusstsein gezogen, durch Uebersichtlichkeit das Behalten erleichtert wird, dafür ist in anerkennenswerter Weise reichlich, u. a. durch die tabellarische Uebersicht der Operationen, Zeichen

und Namen, gesorgt. Ist im Vorstehenden ein unschädliches Uebermass gekennzeichnet, so bleibt noch ein einzeln stehender verderblicher Fehler zu erwähnen. Die Einleitung beginnt mit der falschen Definition: inverse Rechnungsarten seien solche, welche zur Verkleinerung einer Grösse dienen — einer Bestimmung, welche schon mit dem nächst folgenden Satze im Widerspruch steht, da durch Messen (was daselbst inverse Rechnungsart genannt wird) doch gewiss nichts verkleinert wird. Man braucht also gar nicht erst an Operationen mit Brüchen und negativen Zahlen zu erinnern, um die gänzliche Unhaltbarkeit der Bestimmung nachzuweisen. Doch auch wenn beides nicht entgegenstünde, würde es noch zwei wichtige Entscheidungsgründe geben. „Inverse Operation" heisst schon etwas anderes, und die gebräuchliche Bedeutung ist aus dem Wortsinn von invertere hinreichend verständlich; die Erklärung im Lehrbuch kann daher nur die Folge haben Begriffsverwirrung zu erzeugen. Die Subtraction ist nicht absolut invers, sondern die inverse Rechnungsart der Addition, ebensogut wie die Addition von der Subtraction. Ist A das Umgekehrte von B, so ist B das Umgekehrte von A. Inverse Operation einer vorliegenden heisst die Aufsuchung eines Datums der letztern aus deren Resultat und den übrigen Datis, unterscheidet sich also von ihr nur durch veränderte Fragestellung, nicht durch die Definitionsgleichung. Mit dem Misbrauch des Wortes „invers" steht nun in einem leicht begreiflichen Zusammenhang, dass das Lehrbuch die Beziehungen der Inversion gar nicht kennt. Es macht keinen Gebrauch davon, dass die Subtraction, Division, Radicirung und Logarithmirung durch blosse veränderte Fragestellung aus Addition, Multiplication und Potenzirung hervorgehen, sondern definirt jede Operation für sich, und wenn gleich die Bemerkung der Reciprocität in den Sätzen vorkommt, so ist sie doch viel zu sehr in den Winkel gestellt, als dass der Schüler inne werden könnte, dass es sich bei je 2 oder 3 inversen Operationen nur um eine einzige Beziehung handelt.

Das Charakteristische des Lehrgangs besteht nun darin, dass im ersten Teil des Buchs sämmtliche Rechnungsarten ausschliesslich auf die natürlichen (d. h. reellen positiven ganzen) Zahlen angewandt, und erst im zweiten Teil successive die analytischen, d. i. die negativen, die gebrochenen, die irrationalen Zahlen eingeführt werden. Zunächst also unterscheidet sich die hier vorgetragene Theorie als reine Arithmetik von der, oft fälschlich Arithmetik genannten, allgemeinen Grössenlehre. Doch von letzterer ganz abgesehen, bleibt noch ein Eigentümliches in der Reihenfolge der Betrachtung. Da nämlich jede der Inversionen zu einer Erweiterung der Zahlenreihe führt, so liegt es nahe, dieselbe auch im Lehrgang sofort an jede inverse Rechnungsart anzuschliessen, und in der Tat haben wol die Meisten dieser Ver-

knüpfung mehr oder weniger Raum gegeben. Der Verfasser ist, zugunsten der systematischen Ordnung, hierauf nicht eingegangen, er hat sich selbst dadurch nicht beirren lassen, dass fast die ganze Fruchtbarkeit mancher Operationsbegriffe erst mit der erweiterten Zahl beginnt, und, sieht man das Resultat an, so muss man zugestehen, dass dadurch eine grosse Vereinfachung gewonnen ist. Die Hauptrechtfertigung liegt aber in der Vermeidung eines pädagogischen Uebelstandes, der gewiss schon Manchen gegen die Methode der reinen Arithmetik eingenommen hat. Die eingeschobene Abänderung der Betrachtungsobjecte vexirt den Geist. Beim vorliegenden Lehrgang hingegen lernt der Schüler zuerst die Operationen auf festem Terrain, und kann nachher die Aufmerksamkeit ungeteilt auf die Abänderungen und die dadurch bedingten Folgen richten.

Der dritte Teil enthält die Lehre von den Gleichungen, welche recht passend in Gruppen eingeteilt werden, der vierte einzelne numerische Algorithmen. H.

Die Elemente der Arithmetik für den Schulunterricht bearbeitet von H. Seeger, Direktor der Realschule zu Güstrow. Zwei Anhänge: 1. Historische Notizen. 2. Deutsch-französisches Vokabularium. Schwerin i./M. 1874. A. Hildebrand. 193 S.

Das vorliegende Buch giebt keine Unterweisung, setzt vielmehr diese als vorher- und nebengehend voraus, und enthält nur eine wolgeordnete Aufzeichnung des Lehrstoffs. Das Bedürfniss einer solchen ist wol nicht fraglich, und der Gebrauch bedarf keiner Besprechung. Die Art der Bearbeitung kann offenbar nicht ganz unabhängig von den didaktischen Grundsätzen sein. Es ist daher sehr zu billigen, dass die Definitionen wesentlich neu auftretender Begriffe stets in extenso, von den durch sie und mit ihnen eingeführten Elementen hingegen nur die zu erklärenden Namen aufgeführt sind, und sowol in Betreff jener als auch ausserdem über den Zusammenhang der Disciplinen genügende Rechenschaft gegeben wird. Soviel sich hieraus erkennen lässt, ist die Auffassung eine vernünftige und gediegene zu nennen. Auch die Wahl der Begrenzung ist eine angemessene, und an Vollständigkeit schwerlich etwas zu vermissen. Das Elementare aus der Zahlentheorie ist mit in den Bereich gezogen. Es verdient constatirt zu werden, dass die Bedeutung von „Algebra" hier einmal richtig bestimmt ist als Lehre von der allgemeinen Grösse. Einen grossen Teil des Buches füllen die dem Ganzen nachfolgenden, aber zu den einzelnen Capiteln gehörigen Aufgaben. Sie sind einfach und instructiv gewählt. Der erste Anhang handelt I. von der Darstellung der Zahlen, insbesondere von der sprachlichen Numeration,

den griechischen, römischen, indisch-arabischen Zahlzeichen, den Decimalbrüchen, von Leibnitz's dyadischem und Werneburg's dodekadischem System; II. von der Entwickelung der Algebra bis zum Ende des 16. Jahrhunderts bei den Griechen, Römern, Arabern, in Italien, Deutschland, den übrigen Ländern; III. von den algebraischen Zeichen, insbesondere für die Potenzen. Der zweite Anhang ist eine recht nützliche und dankenswerte Arbeit, wiewol nur als ein Anfang zu betrachten. Eine definitive Vollendung lässt sich nicht von einem Autor allein erwarten; erst die Erfahrungen Vieler können die Desiderata mit der Zeit liefern. Weit mehr als in der Elementarmathematik macht sich das Bedürfniss in der höhern Mathematik geltend, wo ein beständiger litterarischer Verkehr über die Sprachgrenzen hinweg besteht; doch ist bis jetzt keine entsprechende Unternehmung bekannt. Was die Anordnung betrifft, so scheint die alphabetische nicht wol geeignet; auch hier ist die sachliche Einteilung gewählt; nur würde bei einigermassen grösserm Umfang die Einteilung nach Objecten nicht ausreichen, während die Redeformen in buntem Gemisch folgen. Auch in letzterer Beziehung würde ein einfaches Ordnungsprincip sehr wol möglich und am Orte sein. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Nach Grundsätzen Bolyais für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von Hermann Wagner, Dr. phil. Lehrer der Mathematik in Hamburg. Hamburg 1874. Lucas Gräfe. 150 S.

Es ist der ausgesprochene Zweck der vorliegenden Bearbeitung eines neuen Lehrbuchs, die Entdeckung von Lobatschewsky, Bolyai und Riemann, dass der Raum ein empirischer Begriff sei, in den Grundlagen der Geometrie zur Geltung zu bringen und dadurch die Anfangsgründe der Disciplin von Dunkelheiten zu befreien. Ehe wir darauf eingehen, wie der Verfasser seine Aufgabe angreift, ist es wol an der Stelle einen Irrtum zu berichtigen, welcher in Betreff jener Entdeckung gäng und gebe ist. Man pflegt dieselbe so zu deuten, als sei durch sie bewiesen, dass der Raumbegriff sich in anderm Falle befände als die übrigen mathematischen Begriffe, ja sogar, wie Einige meinen, als habe dadurch die Geometrie etwas von ihrer festen Begründung verloren; man giebt zu, dass Kant, sofern er die Unabhängigkeit der mathematischen Erkenntnisse und Denkformen von der Erfahrung lehrte, im einen Punkte, dem des Raumes, geirrt habe, denkt aber nicht daran, dass daraus weit mehr folgt, und von Jedem, der nicht von dem in der Philosophie herrschenden Aberglauben eingenommen ist, ohne Mühe verstanden wird. Hätte Kant seine Lehre *bewiesen,* so hätte Riemann den Fehler in seinem Beweise entdecken

müssen; an die Existenz eines solchen Fehlers aber denkt kein Mensch, also auch nicht an die eines Beweises, am wenigstens die, welche in diesem Punkte Kant folgen; sie verraten, indem sie den Irrtum einräumen ohne zu wissen, wo er begangen ist, dass sie von Evidenz nichts gewusst, vielmehr Kant als Propheten geglaubt haben. — Positive Ergebnisse lassen sich nun leicht folgende ziehen: 1) Aus der Widerlegung Kant's in dem einen Punkte folgt die Nichtigkeit seiner Lehre von der Erkenntniss apriori im ganzen; denn es ist widersinnig zu sagen, es könne vielleicht anderes Wissen apriori geben: vielleicht wissen ist eben kein Wissen. Wissen apriori im Kant'schen Sinne ist nichts als uncontrolirte Meinung, vor jeder Erfahrung wissen heisst nur, die Erfahrung nicht kennen, durch die wir dazu gelangt sind. 2) Indem Riemann bestimmte empirische Grundelemente des Raumbegriffs nachwies, hat er der Geometrie nichts entzogen, sondern eine Aufklärung hinzugefügt, wo die Ansicht vom Apriori eine leere Stelle gesetzt hatte. Die Geometrie ist also zur Erfahrungswissenschaft nicht degradirt, sondern erhoben worden. 3) Die Sicherheit der geometrischen Grundbegriffe und ihrer Anwendung auf die Wirklichkeit ist durch die Entdeckung ihres empirischen Ursprungs weder vermehrt noch vermindert.

Obwol nun Riemann's Leistung nicht sowol in dem genannten Gesammtresultat — denn dieses war bekannt und jedem Unbefangenen von selbst deutlich — sondern in der Ausführung lag, so hat er es doch bei dessen Nachweis bewenden lassen und ist an die psychologische und logische Frage gar nicht herangetreten. Es blieb daher zur didaktischen Verwertung erst noch mancher Schritt zu tun übrig, und man durfte einen, wenn auch unvollkommen gelungenen Versuch, wie ihn der Verfasser unternimmt, immer hochschätzen. Doch so wenig er es auch sichtlich hat an Fleiss fehlen lassen, und so gut er auch die elementare Seite aus der Bolyai'schen Arbeit herausgefunden hat, so findet sich doch zwischen dem Richtigen soviel Falsches, dass das Ganze dadurch fast entwertet wird. Einiges lässt sich leicht berichtigen, z. B. die Erklärung: „Eine gerade Linie ist eine solche Linie, welche durch zwei in ihr liegende Punkte völlig bestimmt ist". Das würde heissen, die Gestalt der Linie sei durch 2 Punkte bestimmt. Es liegt aber vielmehr die vorhererklärte Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Raumgebilde bei Transposition zugrunde, an welche letztere als einzig mögliche Variation gedacht wird. Statt „welche" muss es also heissen „deren Lage". — Nach Definition der Geraden hatte die der Richtung keine Schwierigkeit. Statt dessen wird dazu ein sonst nicht vorkommendes und ohne Erklärung gelassenes Wort „Nachbarpunkt" verwendet, um eine kaum verständliche Definition unterstützt durch eine gleichfalls sehr dunkele

Erläuterung zustande zu bringen. — Ebenso ist, nachdem bereits aufgestellt und leicht bewiesen, dass die Summe zweier Dreieckswinkel kleiner als 2 Rechte, als neuer Satz ausgesprochen: Jeder Dreieckswinkel ist kleiner als 2 Rechte — und es folgt ein neuer Beweis, dessen Sinn nicht wol zu enträtseln ist. — Von tief eingreifenden Fehlern aber genüge es, zwei zu nennen. Punkt, Linie, Fläche werden unendlich kleine Teile des Raumes genannt, was vermutlich auf unklaren Begriffen des Verfassers vom Unendlichkleinen beruht; auch hätte die Erklärung des Unendlichkleinen nicht fehlen dürfen. Diese, den ersten geometrischen Begriffen widerstreitende Bestimmung steht zwar überall wo sie vorkommt überflüssig, doch wiederholt sie sich so oft, dass sie irreleitend und störend wird. — Ferner beweist der Verfasser, dass sich die Summe zweier Winkel eines Dreiecks durch wiederholte Verwandlung bei unveränderter Summe aller 3 Winkel beständig verkleinern lässt, meint aber damit bewiesen zu haben, dass sie sich beliebig klein machen liesse. Mit diesem Trugschluss wird seine Parallelentheorie, auf die er Gewicht legt, hinfällig. — Diejenigen Partien, in welchen nicht gerade principielle Abhülfe nötig war, sind in Euklidischer oder doch ähnlicher Weise behandelt.

H.

Lehrbuch der elementaren Geometrie für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule zu St. Petersburg. Erster Band: Planimetrie. Mit 205 Holzschnitten. St. Petersburg 1873. G. Hässel. 93 S.

Das Vorwort beginnt mit der Ankündigung, dass die Parallelentheorie ohne Grundsatz bewiesen sei. Der Trugschluss ist hier kein versteckter; denn gleich nach Beweis der Umkehrung des Parallelensatzes wird der Umkehrung der Satz selbst substituirt, nämlich im Zusatz zu der Aufgabe, durch einen Punkt eine Parallele mit einer Geraden zu ziehen, indem daraus gefolgert wird, es sei nur eine Parallele möglich. Im allgemeinen charakterisirt sich die Darstellung durch eine grosse Kürze, die hauptsächlich davon herrührt, dass unausgesprochen bleibt, was man an der Figur sehen kann. Sie ist hinreichend zur richtigen Leitung der Vorstellung; in Hinsicht auf logische Geistesentwickelung ist dagegen kein sonderlicher Fleiss angewandt, und es macht den Eindruck, als solle man mit dem Pensum nur recht bald fertig werden; es würde daher nicht lohnen auf manche unzureichende Schlüsse hinzuweisen. Das Buch besteht aus 5 Teilen, nämlich 1) die Grundlehren, 2) vom Kreise, 3) von den geometrischen Proportionen, der Gleichheit und Proportionalität der Vielecke, 4)

von den Verhältnissen beim Kreise, der Berechnung der regelmässigen Vielecke und der Zahl π, 5) von den Transversalen, der harmonischen Teilung und den Aehnlichkeitspunkten. H.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Classen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Professor an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Erster Theil: Aufgaben. Dritte Auflage. Leipzig 1874. C. A. Koch. 210 S.

Da bei der Auswahl der Aufgaben für Abiturienten mit grösster Sorgfalt auf bestimmte Erfordernisse geachtet werden muss, namentlich dass eine jede bei ihrer Behandlung Gelegenheit giebt, von den in den verschiedenen Gebieten erworbenen Kenntnissen Gebrauch zu machen; dass der Wortlaut der Aufgabe so klar gefasst ist, dass die Schüler das Geforderte ohne Ueberlegung erkennen; dass die Aufgabe zu ihrer Lösung nicht eines ungewöhnlichen Kunstgriffs bedarf; dass sie sich dennoch elegant, wo möglich auf mehreren Wegen lösen lasse; dass endlich die vollständige Entwickelung von den Abiturienten in der vorgeschriebenen Arbeitszeit wirklich geliefert werden könne; da man überdies diejenigen Aufgaben bevorzugen wird, deren Resultat ein einfaches ist, wo sich abgerundete Zahlen ergeben, die Wurzeln aufgehen — so müssen, nach Ansicht des Verfassers, Aufgaben, die nach solchen Erwägungen als passend befunden wurden, Prüfsteine für Klarheit und Sicherheit erlangter Kenntnisse zu sein, gesammelt und geordnet, ein für den mathematischen Unterricht sehr förderliches Uebungsbuch bilden. Zu einer solchen Sammlung hat, wie derselbe sagt, der Professor Dr. Grunert schon im Jahre 1861 öffentlich aufgefordert. Der Verfasser hat sich dieser Arbeit mit treuem Fleisse gewidmet, und es sich angelegen sein lassen, das Werk zu der so chrakterisirten, erwarteten Vollendung wirklich hinzuführen. Was das vorgefundene Material noch vermissen liess, hat er aus eigner Erfindung nach gleichem Massstabe der geforderten Sorgfalt ergänzt, und die im Laufe der Zeit sich darstellenden neuen Erfordernisse in den neuen Auflagen erfüllt. Ohne auf den Specialinhalt einzugehen, welcher keiner Bemerkung bedarf, empfehlen wir das Buch in dem Sinne, wie es der Titel ausspricht. H.

Trigonometrie.

A sokszögtan továbbfejtése. Nemely eddig megoldatlan föladatok megoldása, nevezetesen: a szabályos hét-, kilencz-, és több más szögök beirása s bármely köriv három egyenlö részre osztása mértani pontossággal; a szabályos sokszögök általános egyenlete és az ebböl folyó felsöbb egyenletek. Irta Dr. Weisz József. Budapest 1874. Nyomatott az athenaeum nyomdájábon. — 51 S.

Die Uebersetzung des ungarischen Titels ist: Neue Entdeckungen im Gebiete der Geometrie und Mathematik, namentlich: die Einschreibung der regelmässigen Sieben-, Neun- und mehrerer andern Vielecke und die Teilung eines beliebig gegebenen Kreisbogens in 3 gleiche Teile mit geometrischer Pünktlichkeit, die allgemeine Gleichung der regelmässigen Vielecke und die Auflösung der damit identischen höhern Gleichungen. Eine deutsche Uebersetzung hiervon ist vorhanden, und im Verlage des Unterzeichneten zu beziehen.

Ferd. Tettey & Co. in Pest.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Lehrbuch der freien Perspektive für Oberrealschulen, Realgymnasien, Lehrerbildungs-Anstalten und höhere Bürgerschulen. Von Franz Smolík, Oberrealschulprofessor und Mitglied der k. k. Prüfungskommission für allgemeine Volks- und Bürgerschulen in Budweis. Mit sechs lithographirten Tafeln. Prag 1874. F. Tempsky. 124 S.

Was hier freie Perspective genannt wird, ist nur, was man gewöhnlich unter Perspective versteht; der Verfasser setzt sie zwei verschiedenen Methoden entgegen, gegen welche sie bisher zu sehr zurückgesetzt worden sei, ohne diese näher zu bestimmen. Die erste Abteilung des Buchs besteht aus einem theoretischen und einem praktischen Teile. In ersterem werden die Beziehungen zwischen dem Object und dem Bild erörtert und auf diejenigen festen Elemente zurückgeführt, welche nachher die Richtpunkte der Construction bilden; letzterer behandelt die Constructionsaufgaben in einer ausgewählten Reihenfolge von Beispielen vom Einfachern zum Complicirteren hin aufsteigend mit besonderer Berücksichtigung vorkommender Fälle. Die Darstellung ist, soweit sie reicht, klar und leicht fasslich. Doch der Geübte vergisst leicht manche Dinge auszusprechen, die der Unkundige nicht wissen kann und die er Mühe hat zu erraten. Dieser

Mangel zeigt sich besonders am Anfang und Ende der einzelnen Auseinandersetzungen, am Anfang wol hauptsächlich infolge davon, dass nirgends im allgemeinen davon die Rede ist, in welcher Weise das Object als gegeben zu betrachten sei; und am Ende wird oft abgebrochen, ehe man recht sieht, dass das Ziel erreicht ist. Die Lösungen begnügen sich mit dem speciellen Nachweis der Punkte, auf die es ankommt, und überlassen es dem Schüler, von der Theorie Gebrauch zu machen. Eine vollständige Durchführung wenigstens bei den einfachen Grundaufgaben würde die Deutlichkeit sehr gefördert haben. Die zweite Abteilung behandelt die perspectivische Darstellung schiefer Ebenen und ihrer Beziehung zur geraden Linie und zu den Körpern, die dritte die Schattenperspective. H.

Vermischte Schriften. Teile von Zeitschriften.

Polytechnische Bibliothek. Monatliches Verzeichniss der in Deutschland und dem Auslande neu erschienenen Werke aus den Fächern der Mathematik und Astronomie, der Physik und Chemie, der Mechanik und des Maschinenbaues, der Baukunst und Ingenieurwissenschaft, des Berg- und Hüttenwesens. Mit Inhaltsangabe der wichtigsten Fachzeitschriften. Redigirt von Hugo Händel in Leipzig. Verlag von Quand u. Händel. N. 1. 13 Seiten.

Eine vollständige Liste der blossen Titel aller wissenschaftlichen Werke und Journalartikel aus bestimmten Fächern würde offenbar für diejenigen, welche umfassende Arbeiten für Litteraturkenntniss machen, eine grosse Erleichterung sein. Insofern würde sich an die vorliegende Unternehmung manche Hoffnung für die Zukunft anknüpfen, wenn wir von dem Zweck der beschleunigten Nachricht über das Erscheinen der Schriften, welche gleichfalls willkommen sein kann, auch absehen. Was aber die Vollständigkeit, namentlich der Inhaltsverzeichnisse der Journale betrifft, so giebt die erste Nummer, für Januar 1874, indem sie 7 Journale, und zwar 1 theoretisches und 6 technische, aufführt, dazu allerdings wenig Aussicht; auch ist nicht wol abzusehen, wie auf dem kleinen Raume bei der Ausdehnung über so viele Fächer das Versprochene geleistet werden kann. H.

Methode und Principien.

Rechnungsabkürzungen, dem rechnenden Publicum, insbesondere den Rechenlehrern an niederen und höheren Schulen und an Semi-

narien zur Berücksichtigung empfohlen von Dr. Ed. Müller, Realschuldirector zu Neustrelitz. Neustrelitz 1873. Barnewitz. 15 S.

Die empfohlenen Abkürzungen bestehen einesteils in der Benutzung von Eigenschaften einzelner Zahlen, andernteils in der Verbindung des Kopfrechnens mit dem Schreibrechnen. Von ersterer Art liessen sich leicht weit mehr nennen; wer viel rechnen muss, erfindet sie sich selbst, und wer das nicht kann, weiss meistens auch die mitgeteilten nicht recht zu gebrauchen. Für die Schule möchte es sich doch empfehlen, das Schnellrechnen lieber aus dem Sicherrechnen hervorgehen zu lassen, welches der Verfasser nach blosser Erwähnung gar nicht weiter in Betracht zieht. Die letztere Art besteht im wesentlichen darin, dass man, statt mehrere Reihen von Ziffern zu nachfolgender Addition hinzuschreiben, jede Columne für sich im Kopfe rechnet und nur die Summe notirt. Gegen dieses Verfahren ist der Einwand sehr begründet, dass man sich dadurch der Controle des Resultats beraubt, was sowol für den Lehrer als auch für den, welcher es im Leben anwendet, ein offenbarer Nachteil ist. H.

Verwendung der Geometrie zum Beweise arithmetischer Lehrsätze. Dr. Karl Heinrich Liersemann. (Beilage des 4. Jahresberichtes der König Wilhelms-Schule zu Reichenbach in Schlesien.)

Der Verfasser erhebt seine Stimme dafür, dass man die Anfangsgründe der Arithmetik an die Geometrie anknüpfe. Die Ausführung enthält nichts neues. Die Motivirung besteht aus lauter absprechenden Urteilen über gewöhnliche Methoden ohne Angabe, welche er meint. Auffallend ist, dass er dabei sein eignes Lehrbuch völlig ignorirt, welches in ganz entgegengesetztem Sinne verfasst ist. H.

Litterarischer Bericht

CCXXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VI. 1873. Tomo VII. 1874. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Das Octoberheft von B. VI. enthält einen Brief von C. F. Menabrea an den Herausgeber über den Gültigkeitsbezirk der Lagrangeschen Reihe, als Antwort auf die Abhandlung von Angelo Genocchi über das Leben und die Schriften des Felice Chiò, B. IV. S. 363—380; dann ein Publicationsverzeichniss. Das Novemberheft enthält eine Abhandlung von Gottfried Friedlein über den Mathematiker Hypsikles; dann eine kurze Antwort von Genocchi an Menabrea. Das Decemberheft enthält eine Abhandlung von Domenico Chelini über geometrische Interpretation von Formeln, welche in der Lehre von der Ausdehnung, der Bewegung und den Kräften von Bedeutung sind; dann einen Brief von Louis Poinsot an Chelini; dann Zugaben und Berichtigungen zu den 2 Abhandlungen von Biadego über 10 Briefe von Lagrange (S. 101.) und von Boncompagni über eine Stelle in der Geometrie des Boetius (S. 341.) von Boncompagni; dann Publicationen.

Der Jahrgang VII. beginnt mit einer Abhandlung über das Leben und die wissenschaftlichen Arbeiten des gegen Ende December 1872 verstorbenen, William John Macquorn Rankine von Mariano Quercia, gelesen im Athenäum zu Venedig am 13. Febr. 1873, welche das Januarheft einnimmt. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule bearbeitet von Dr. Hubert Müller, Oberlehrer am Kaiserlichen Lyceum in Metz. In zwei Theilen: I. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. II. Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. Erster Theil. Leipzig 1874. B. G. Teubner. 132 S.

Der Verfasser sagt im Vorwort: „Ich habe in dieser Arbeit von Anfang an versucht, soviel es mir möglich schien, Anschauungsweisen, welche der Geometrie der Lage entnommen sind, in den Lehrstoff einzuflechten.“ In der Tat ist jedoch mehr geschehen, als man hiernach erwarten würde, und man auch schon in andern Lehrbüchern findet. Es ist der Anfang einer wirklich organischen Umbildung der Geometrie von der Euklidischen Grundlage aus im Sinne der neuern Geometrie. Das Lehrbuch leitet mehr dazu an, ins unendliche neue Sätze zu finden, als zum Bewusstsein zu bringen, was für bestimmte Forderung notwendig und gerade ausreichend ist. In dieser Richtung geht es jedoch mit grosser Mässigung und Umsicht vor, ohne den Boden exacter Begriffe zu verlassen. Was davon etwa eine Ausnahme machen könnte, ist sicher nicht der Tendenz zuzuschreiben. Mehrmals ist die Eingangserklärung neuer Begriffe im Anfang der Abschnitte für den Unkundigen nicht wol verständlich, und wird es erst bei specieller Anwendung. Aenderungen des Ausdrucks würden hier in jedem Falle abhelfen können. Es wird bemerkt, der Kreis, sowie jede andere Curve, lasse sich als Vieleck von unendlich kleinen Seiten betrachten. Die Bemerkung ist falsch, aber auch müssig, denn eine solche Betrachtung folgt nicht. In der Lehre von den Linien- und Flächenverhältnissen ist die Rationalität stillschweigende Voraussetzung; sie ist daher unvollständig und zugleich nicht exact, sofern die Sätze als allgemeingültige aufgestellt werden.

In der Anordnung tritt hervor die nicht bloss dann und wann, sondern fast durchgängig angewandte Zusammenstellung eines Kreises von Sätzen in eine Doppelreihe. Die neben einander gestellten Sätze entsprechen sich nicht nach gleichem Princip: bald entsprechen sich Punkt und Gerade, Verbindung und Durchschnitt, bald Strecke und Richtung, bald sind die Sätze gegenseitig Folgerungen von einander, bald sind die Beziehungen noch andrer Art. Auch bilden die Reihen keine geschlossenen Systeme, sondern bleiben gewöhnlich offen zu beliebiger Fortsetzung. Die Beweise folgen einzeln nach der ganzen Zusammenstellung. Jedem Abschnitt ist eine Anzahl Uebungsbeispiele zugegeben, welche jedoch besondere Sammlungen von solchen nicht ersetzen sollen.

Als zugezogen aus der neuern Geometrie sind besonders zu nennen: das Princip der Dualität, die Congruenz und Symmetrie der Figuren, die harmonischen Punkte und Transversalen des Dreiecks, die Potenzlinien und Kreispolaren; manches andere ist eingewebt. H.

Rechenbuch für Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. Von Christian Harms, Professor an der Realschule in Oldenburg, und Dr. Albert Kuckuck, ord. Lehrer am Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster in Berlin. Dritte Auflage. Oldenburg. 1874. Gerhard Stalling. 262 S.

Das vorliegende Rechenbuch unterscheidet sich von andern nicht durch wesentlich neue Gesichtspunkte oder abweichende Grundsätze, zeichnet sich aber aus durch die Vielseitigkeit, Umsicht und Klarheit in der Berücksichtigung der an ein solches zu stellenden Anforderungen. Auf diese näher einzugehen, ist hier keine Veranlassung: einzeln sind sie allbekannt, nur vergisst man leicht eine über die andre und sieht ihren Umfang für zu gering an. Einige Bemerkungen mögen genügen. Alle vorgängige Anleitung und Erklärung dessen, was zum Verständniss gehört, ist grundsätzlich ausgeschlossen. Dagegen wird man keine notwendige Angabe über das vermissen, was reine Sache des Gedächtnisses ist und auf factischer Festsetzung beruht; numerische Angaben findet man immer gleich an der Stelle, wo sie zuerst gebraucht werden. Es ist dies in der Tat ein Vorzug, denn Manche wissen beides nicht von einander zu unterscheiden. Hervorzuheben ist ferner, dass die Anwendungen des Rechnens nicht von der directen Einübung der Operation geschieden auftreten. Vielmehr wird bei der Einübung die Fragestellung auf alle möglichen Weisen gewandt, so dass der Schüler die Bedeutung der Operation fortwährend im Bewusstsein erhalten muss, und jede mögliche Anwendung zugleich lernt. Hiermit steht in Verbindung, dass die für das praktische Leben bestimmten Anwendungen, auf welche reichlich Rücksicht genommen ist, schon vollständig in der gebräuchlichen Form als Beispiele für die einfache Operation aufgegeben werden. Der zweite Teil des zweiten Cursus handelt dann insbesondere von den wichtigsten praktischen Rechnungsarten. Resultate sind nie angegeben. H.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien und Gewerbeschulen bearbeitet von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. In drei Theilen. Erster Theil: Arithmetische Aufgaben. Zweiter und dritter Theil: Algebraische Aufgaben. Sechste mit Rücksicht auf

das neue Mass- und Münzsystem umgearbeitete und vermehrte Auflage (des 1. u. 2. Th.) dritte (des 3. Th.). Bayreuth 1874. Heinrich Grau. 804 S.

Die neue Auflage der im 217. litt. Ber. besprochenen Aufgabensammlung unterscheidet sich durch Einführung der Markrechnung, wodurch die auf Münzen bezüglichen Capitel Aenderungen erfahren haben. H.

Geometrie.

Conforme Abbildung einiger Flächen, welche den unendlich fernen Punkt enthalten, auf den Kreis. Von Dr. O. Hentschel, Gymnasiallehrer in Salzwedel. Berlin 1874. S. Calvary u. Co. 16 S.

Die nach Aehnlichkeit der Flächenelemente abgebildeten Flächen sind Ebenen unter folgenden Begrenzungen. Ein Hyperbelzweig begrenzt zwei unendliche Flächenräume gegen einander, beide Zweige haben einen solchen zwischen sich; die Parabel begrenzt ebenfalls zwei gegen einander; Ellipse, Kreis und Lemniscate den Flächenraum ausserhalb. Zur Lösung der Aufgabe wird die Ebene durch zwei orthogonale Curvenscharen erzeugt, deren einer die Grenzlinie angehört, und die Abbildungsfunction durch eine nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen desjenigen Parameters, welcher am Rande constant ist, fortschreitende Reihe dargestellt, dann deren Coefficienten durch Einführung des Randwerts bestimmt. Die Reihen lassen sich in den genannten Fällen summiren und ergeben sehr einfache Resultate in geschlossener Form. Auf jede analytische, d. h. directe Lösung folgt unter dem Namen „synthetische Lösung" eine vermittelte durch vorgängige Abbildung auf die Halbebene. H.

Die prismatischen und pyramidalen Drehungskörper. Von Dr. C. Heinze, Professor am Gymnasium zu Cöthen. Separat-Abdruck aus dem Schulprogramm 1874. Mit einer lithographirten Tafel. Cöthen 1874. Otto Schulze. 22 S.

Die Körper, um deren Inhaltsberechnung es sich hier handelt, sind begrenzt von zwei ähnlichen Vielecken in parallelen Ebenen, deren homologe Ecken sämmtlich untereinander, ausserdem beliebig mit den Nachbarecken durch Gerade verbunden sind, und von seitlichen Flächen, welche eine den Ebenen parallele, an zwei successiven Seitenkanten gleitende Gerade erzeugt. Die seitlichen Flächen sind also entweder Dreiecke oder windschiefe Regelflächen, im besondern

Falle Paralltrapeze. Die Methode ist rein synthetisch und beruht auf Zerlegung in Pyramiden, doch schreitet die Deduction in allgemeiner Form ohne Hülfsbetrachtung und successives Aufsteigen fort. Erst wird die Simpson'sche Formel bewiesen, dann die Darstellung des Mittelschnitts in Bestimmungsstücken der Endflächen hergeleitet. Nach Einsetzung von dessen gefundenem Werte, hat der Ausdruck des Inhalts die Form:

$$J = \tfrac{1}{6}h\left(f_0 + f_2 + \frac{\cos(\varepsilon - \varphi)}{\cos\varepsilon}\sqrt{f_0 f_2}\right)$$

wo f_0, f_2 die Endflächen, h ihren normalen Abstand, φ den Winkel, um den ihre Stellung differirt, bezeichnet, und ε unter gewissen Beschränkungen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a^2 + b^2 + \ldots}{4G}$$

definirt ist, unter a, b, ... die Seiten der Endfläche $G = f_0$ oder f_2 verstanden. Die notwendigen Unterscheidungen sind aus der obigen Definition des Körpers ersichtlich. Die Darstellung ist im ganzen leicht fasslich, leidet aber stellenweise an Ungenauigkeit des Ausdrucks, der leicht genug zu bessern gewesen wäre, dem Leser aber überflüssigerweise eine jedenfalls grössere Mühe des Enträtselns auferlegt. H.

N a u t i k.

Memoria sobre la velocidad y estabilidad de los solidos sumergidos y flotantes en un fluido. Por Enrique Heriz. Barcelona 1872. Narciso Ramirez y C. 32 S.

Memoria sobre la navegacion aérea. Por Enrique Heriz. Barcelona 1872. Narciso Ramirez. 11 S.

Die beiden Schriften unterscheiden sich dadurch, dass die erstere das gesammte Thema der Bewegung durch Flüssigkeiten mittelst regulirter Kräfte, d. i. das Schwimmen und Fliegen, in grösstem Umfange behandelt, die letztere dagegen sich auf die Luftschifffahrt beschränkt. Beide verfahren indes in gleicher Art: sie besprechen alle erdenklichen Punkte, die dabei in Betracht kommen können, ohne bei irgend einem zu verweilen, ohne mathematische oder technische Fragen in Angriff zu nehmen, ohne erfinderisch zu combiniren. Die Gegenstände der Hauptabschnitte der erstern sind die Gestalt der (schwimmenden und submarinen) Fahrzeuge, ihre Bewegung und ihre

Stabilität. Hierbei wird die elementare Theorie, zwar ohne Herleitung, doch mit leichtverständlicher Erklärung, vorgetragen, mitunter Zahlenangaben und beispielsweise Berechnung hinzugefügt, die einzelnen Motoren (Segel, Rad, Schraube, Ballon) durchgegangen, Vergleichung zwischen den Wirkungen angestellt, wiewol immer nur bezüglich auf bekannte, realisirte Verwendungsweisen mit vorgefundenen Dimensionen. Auch wird das Schwimmen und Fliegen der Tiere, die Bewegung der Geschosse in Betracht gezogen. So wenig das Ganze auch Neues bietet, so ist wenigstens anzuerkennen, dass sich durchgängig ein richtiges Urteil und vielseitige Kenntniss des Gegenstandes kund giebt. H.

Vermischte Schriften. Teile von Zeitschriften.

Annali di matematica pura ed applicata. Diretti da F. Brioschi e L. Cremona. Serie II. Tomo VI. Fascicolo I. Dicembre 1873. Milano. G. Bernardoni.

Der Inhalt des Heftes ist

Schlaefli. Sull' uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione è costante.

Ascoli. Sulla serie di Fourier.

D'Ovidio. Ricerche sulla geometria non-euclidea. (Unvollendet.)

Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft

in Leipzig.

Aus der Mathematik und Naturwissenschaft.

1. Für das Jahr 1874.

Das Problem der electrischen Vertheilung auf einem Conductor von gegebener Gestalt ist durch die bisher in Anwendung gebrachten Methoden nur in verhältnissmässig wenigen Fällen zur definitiven Lösung gelangt oder einer solchen zugänglich geworden. Um die genannten Methoden ihres speciellen Charakters zu entkleiden und wo möglich auf ein allgemeineres Niveau zu erheben, scheint es zunächst wünschenswerth, wesentlich neue Fälle in den Kreis der Untersuchungen hereinzuziehen. Demgemäss stellt die Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

> Auf einem Rotationskörper, dessen Meridian durch die Lemniscate (Cassini'sche Curve)
>
> $$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4$$
>
> dargestellt ist, soll die Vertheilung der Electricität unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte ermittelt werden.

Die Beantwortung des Secialfalles $a=b$ würde durch die Methode der reciproken Radien (Methode der sphärischen Spiegelung) auf den Fall eines Hyperboloids reducirbar, und für die Erlangung des Preises unzureichend sein. Preis 60 Ducaten.

2. Für das Jahr 1875.

Die Frage nach der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes ist trotz mannigfacher Bemühungen bis jetzt nicht entschieden worden. Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

> Es ist durch neue Untersuchungen die Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes **endgültig** festzustellen.

Preis 60 Ducaten.

3. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

> Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des sciences), von Hansen (in den Berichten der Kön. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1787) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss ver-

rathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1874 Prof. Dr. G. Curtius) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1869. 25. J. Red. von B. Schwalbe. 2. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 3 Thlr. 15 Ngr.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 3. Bd. J. 1871. 3. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 1 Thlr.

Küster, C. J., Dr. Schöpffer d. grosse Reformator der Astronomie. 8. Cöln, Römke & Co. 2½ Ngr.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Baltzer, R., die Elemente der Mathematik. 2. Bd. 4. Afl. 8. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

Gallencamp, W., d. Elemente d. Mathematik. 4. Afl. 1. Thl. 8. Iserlohn, Bädeker. 20 Ngr.

Dass., 3. Afl. 2. Thl. 8. Ebd. 24 Ngr.

Harms, Chr., u. A. Kuckuck, Rechenbuch f. Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen etc. 3. Afl. 8. Oldenburg, Stalling. 22½ Ngr.

do., Resultate dazu. 3. Afl. 8. Ebd. 2½ Ngr.

Paugger, F., Logarithmen-Taf. f. d. Zahlen v. 1 bis 1000 u. f. die goniometr. Functionen d. Winkel d. ersten Quadranten von 10 zu 10 Minuten auf 4 Decimalstellen. 8. Triest, Lit.-artist. Anstalt. 12 Ngr.

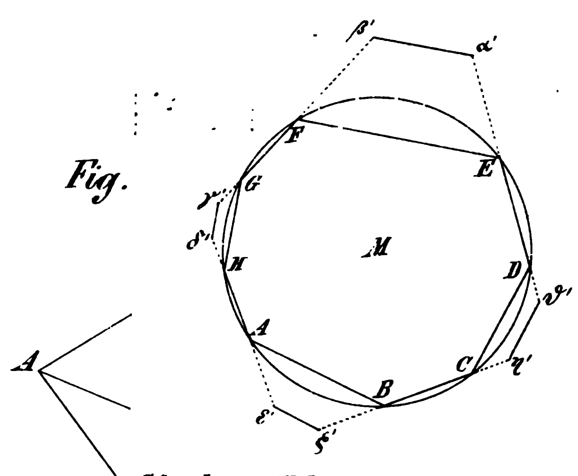
Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gruber, K., der arithm. Unterr. Für Schüler. 1. Thl. 4. Afl. 8. Carlsruhe, Groos. 14 Ngr.

Lübsen, H. B., Einleitg. in d. Infinitesimal-Rechng. 5. Afl. 8. Leipzig, Brandstetter. 2 Thlr. 20 Ngr.

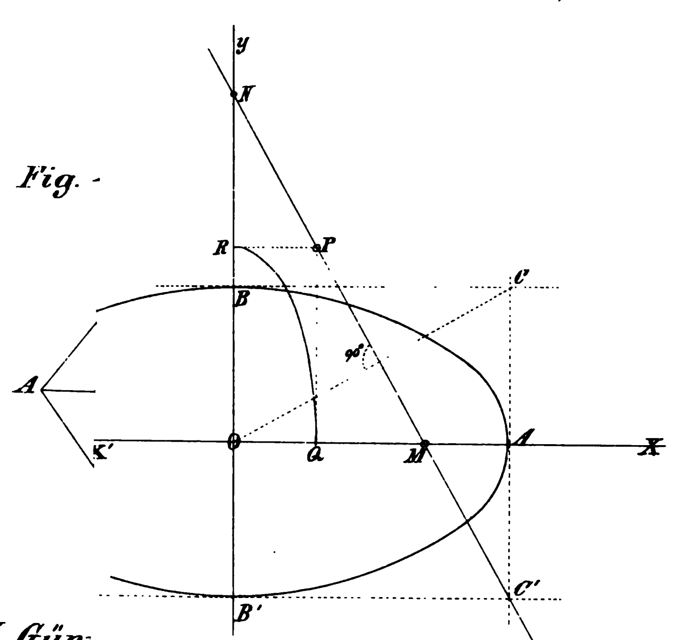
Paugger, F., Lehrb. d. allg. Elementar-Arithmetik od. Algebra. Neue Afl. 8. Triest, Lit.-artist. Anstalt. 1 Thlr. 10 Ngr.

Fig.



Günther: Ueber einige Anwendungen und
iterungen des Hauber'schen Systems.

Fig.



I°: V. Güni

I. Wagner: Eine Aufgabe etc.

